MATEMATICAS CCSS & II

DISTRIBUCIÓN NORMAL

https://aprendeconmigomelon.com

19 de febrero de 2024

IÑIGO ZUNZUNEGUI MONTERRUBIO

**En este libro he reunido una serie de ejercicios de Distribución Normal. Todos han sido propuestos en algún examen de EVAU de los últimos años.
Con este libro aprenderás al manejo de la distribución Normal y del Teorema Central del Límite.En total 65 ejercicios resueltos que espero te resulten de utilidad.**

Índice general

EVAU - Matemáticas CCSS

Andalucia

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

El peso de los paquetes de arroz de una marca comercial concreta sigue una ley Normal de media 1000 *g y varianza* 256 g^2.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que el peso medio de las muestras de tamaño 64 *sea menor que* 996 *g*.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los paquetes de arroz (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(1000, \sqrt{256}) = \mathcal{N}(1000, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(1000, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1000, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(1000, 2)$

$$P(\overline{X} < 996) = P\left(z < \frac{996 - 1000}{2}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 *días.*

c) (0.5 puntos) Suponiendo μ = 7.61 días y tomando muestras aleatoria de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque D - Extraordinario)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de días hasta el primer empleo”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(7.6, 3)$$

c) $X : \mathcal{N}(7.61, 3) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(7.61, \dfrac{3}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}(7.61, 0.5)$

$$P(X > 8) = P\left(X > \frac{8 - 7.61}{0.5}\right) = P(X > 0.78) = 1 - P(X < 0.78)$$
$$= 1 - 0.7823 = 0.2177$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

b) *(1.25 puntos) En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se selecionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes*

b.1) *(0.25 puntos) Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.*

b.2) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque D)

Solución.

b) $X \equiv$ "Calificación media de los estudiantes (puntos)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(6.4, 0.7)$

b.1) $X : \mathcal{N}(6.4, 0.7) \xrightarrow{n=49} \overline{X} : \mathcal{N}\Big(\underbrace{6.4}_{\mu}, \underbrace{\frac{0.7}{\sqrt{49}}}_{\sigma/\sqrt{n}}\Big) = \mathcal{N}(6.4, 0.1)$

b.2)
$$\begin{aligned} P(6.3 \leq \overline{X} \leq 6.8) &= P\Big(\frac{6.3-6.4}{0.1} \leq Z \leq \frac{6.8-6.4}{0.1}\Big) = P(-1 \leq Z \leq 4) \\ &= P(Z \leq 4) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 4) - P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \leq 4) - \Big[1 - P(Z \leq 1)\Big] = 0.99997 - (1 - 0.8413) \\ &= 0.84127 \end{aligned}$$

Aragón

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

a) (4 puntos) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

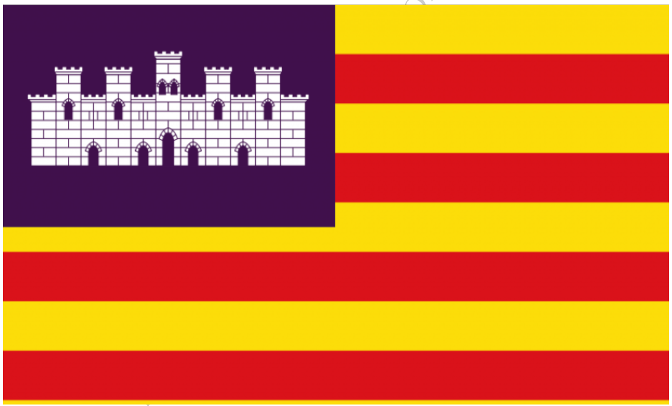
Solución.

$$X \equiv \text{“Calificación en la PAU”}$$

a) $X : \mathcal{N}(65, 8) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(65, \dfrac{8}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}(65, 1.6)$

$$P(\overline{X} > 63) = P\left(Z > \frac{63 - 65}{1.6}\right) = P(Z > -1.25) = P(Z < 1.25) = 0.8944$$

Islas Baleares



Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$.

a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos?

b) (4 puntos) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9?

c) (3 puntos) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Calificación de Física”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(5.1, 1.6)$$

a) $P(X < 4) = P\left(X < \dfrac{4 - 5.1}{1.6}\right) = P(X < -0.69) = P(X > 0.69) = 1 - P(X < 0.69)$
$= 1 - 0.7549 = 0.2451$

b) $X : \mathcal{N}(5.1, 1.6) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(5.1, \dfrac{1.6}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(5.1, 0.2)$

$P(\overline{X} > 5.9) = P\left(\overline{X} > \dfrac{5.9 - 5.1}{0.2}\right) = P(\overline{X} > 4) = 1 - P(\overline{X} < 4) \simeq 1 - 1 = 0$

c) $P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0.2451 = 0.7549$

En un grupo de 50 personas habrá $50 \cdot 0.7549 = 37.745 \simeq 38$ alumnos cuya nota será superior a 4 puntos.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Un estudio del Instituto oceanográfico de las Islas Baleares revela que el tiempo de vida de las tortugas marinas sigue una distribución normal, de media poblacional $\mu = 75.25$ años y desviación típica poblacional $\sigma = 20$ años.

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida?

c) (3 puntos) ¿Cual es la probabilidad de que una totrtuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Esperanza de vida de las tortugas (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(75.25, 20)$$

b) $$P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80 - 75.25}{20}\right) = P(Z \geq 0.24) = 1 - P(Z \leq 0.24) = 1 - 0.5948$$
$$= 0.4052$$

c) $$P(80 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{80 - 75.25}{20} \leq Z \leq \frac{100 - 75.25}{20}\right) = P(0.24 \leq Z \leq 1.24)$$
$$= P(Z \leq 1.24) - P(Z \leq 0.24) = 0.8925 - 0.5948 = 0.2977$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

En una población:

- *las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media* 1.76 *metros y desviación típica* 0.12 *metros; y*
- *las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media* 1.62 *metros y desviación típica* 0.11 *metros.*

Se pide:

a) (3 puntos) Escogemos un hombre al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 *metros?*

b) (4 puntos) Escogemos una mujer al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 *metros?*

c) (3 puntos) ¿Qué es más probable, que un hombre tenga una altura inferior a 1.76 *metros, o que una mujer tenga una altura inferior a* 1.76 *metros?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de los hombres (m)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(1.76, 0.12)$$
$$Y \equiv \text{“Altura de las mujeres (m)”} \longrightarrow Y : \mathcal{N}(1.62, 0.11)$$

a) $P(X \geq 1.76) = P\left(Z \geq \dfrac{1.76 - 1.76}{0.12}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$

b) $P(Y \geq 1.76) = P\left(Z \geq \dfrac{1.76 - 1.62}{0.11}\right) = P(Z \geq 1.27) = 1 - P(Z \leq 1.27)$

$= 1 - 0.8980 = 0.102$

c) $P(X < 1.76) = 1 - P(X \geq 1.76) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(Y < 1.76) = 1 - P(Y \geq 1.76) = 1 - 0.102 = 0.898$

Por lo tanto es más probable que una mujer tenga una altura inferior a 1.76 metros.

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Tiramos una moneda al aire 100 *veces, y ha salido* 46 *veces cara y* 54 *veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada, y propone aproximar el número de caras que salen en* 100 *tiradas como una variable aleatoria con distribución normal* $\mathcal{N}(\mu = 50, \sigma = 5)$.

a) (3 puntos) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 *caras o más?*

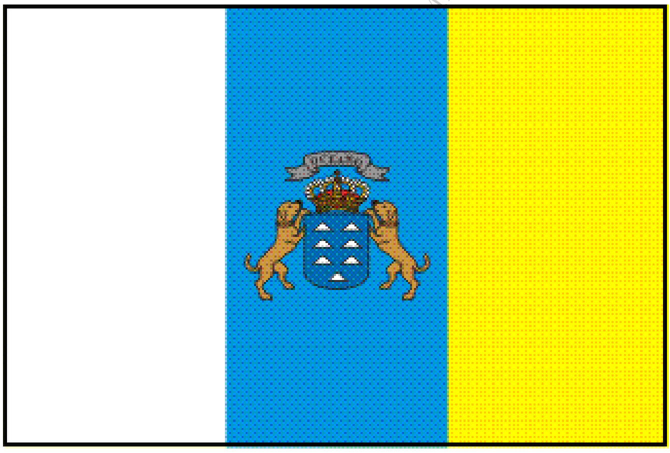
(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de caras en 100 lanzamientos" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(50, 5)$

$$P(X \geq 60) = P\left(Z \geq \frac{60-50}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Islas Canarias



Ejercicio 9 (2.5 *puntos*)

Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza $(128.76; 134.32)$ *para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es 729* $euros^2$.

c) (1.25 puntos) Suponiendo como valor de la media 131.54 €, y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130€?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

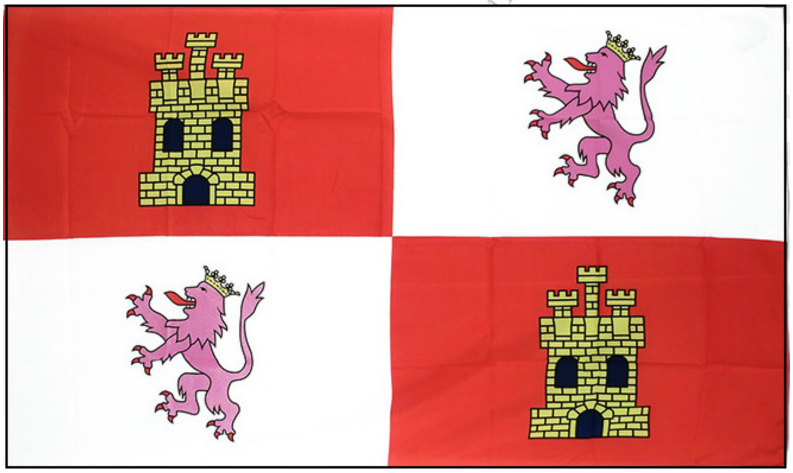
Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto en electricidad (€)”} \xrightarrow{\sigma^2=729} X : \mathcal{N}(\mu, 27)$$

c) $X : \mathcal{N}(131.54, 27) \xrightarrow{n=576} \overline{X} : \mathcal{N}\left(131.54, \dfrac{27}{\sqrt{576}}\right) = \mathcal{N}(131.54, 1.125)$

$$P(\overline{X} > 130) = P\left(Z > \frac{130 - 131.54}{1.125}\right) = P(Z > -1.37) = P(Z < 1.37) = 0.9147$$

Castilla y León



Ejercicio 10 (3 *puntos*)

El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta se ajusta a una distribución Normal con media de 24 minutos y desviación típica de 8 minutos. Si cada día el autobús realiza 40 veces su ruta:

a) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en un día el tiempo medio de las 40 rutas esté entre 22 y 27 minutos.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el autobús emplee más de 1080 minutos en total cada día para realizar su ruta esas 40 veces.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en realizar la ruta (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(24, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(24, 8) \xrightarrow{n=40} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(24, \dfrac{8}{\sqrt{40}}\right) = N(24, 1.26)$

$$P\left(22 < \overline{X} < 27\right) = P\left(\frac{22-24}{1.26} < Z < \frac{27-24}{1.26}\right) = P(-1.58 < Z < 2.37)$$
$$= P(Z < 2.37) - P(Z < -1.58) = P(Z < 2.37) - P(Z > 1.58)$$
$$= P(Z < 2.37) - \left[1 - P(Z < 1.58)\right] = 0.9911 - (1 - 0.9429) = 0.934$$

b) Que la suma de las 40 rutas sea mayor que 1080 es lo mismo que decir que el tiempo medio de cada ruta sea mayor que $^{1080}/_{40} = 27$

$$P\left(\overline{X} > 27\right) = P\left(Z > \frac{27-24}{1.26}\right) = P(Z > 2.37) = 1 - P(Z < 2.37)$$
$$= 1 - 0.9911 = 0.0089$$

Ejercicio 11 (2 *puntos*)

Una academia que prepara oposiciones está evaluando la calidad de sus resultados. Para ello toma una muestra de 50 opositores y comprueba que 20 han aprobado. Con esta información:

a) (2 puntos) Determinar los parámetros media y desviación típica de la proporción muestral que estima la proporción de opositores aprobados. Calcular, utilizando la dIstribución normal asociada, la probabilidad de que la proporción muestral de aprobados esté entre el 35 % y el 45 %

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

$$n = 50 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{20}{50} = 0.4 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.6$$

a) $\mu = \hat{p} = 0.4 \qquad \& \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{50}} = 0.0693$

$$\begin{aligned} P(35 < p < 45) &= P\left(\frac{0.35-0.4}{0.0693} < Z < \frac{0.45-0.4}{0.0693}\right) = P(-0.72 < Z < 0.72) \\ &= P(Z < 0.72) - P(Z < -0.72) = P(Z < 0.72) - P(Z > 0.72) \\ &= P(Z < 0.72) - \Big[1 - P(Z < 0.72)\Big] = 2P(Z < 0.72) - 1 \\ &= 2\cdot 0.7642 - 1 = 0.5284 \end{aligned}$$

Ejercicio 12 (3 *puntos*)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

a) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Estadística)

Solución.

$$X \equiv \text{Tiempo de revisión del expediente (minutos)} \longrightarrow X : \mathcal{N}(30, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(30,10) \xrightarrow{n=75} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(30, \dfrac{10}{\sqrt{75}}\right) = \mathcal{N}(30, 1.155)$

$$P\left(\overline{X} < \frac{2100}{75}\right) = P\left(\overline{X} < 28\right) = P\left(Z < \frac{28-30}{1.155}\right) = P(Z < -1.73)$$

$$= P(Z > 1.73) = 1 - P(Z < 1.73) = 1 - 0.9582 = 0.0418$$

b) $P\left(28 < \overline{X} < 33\right) = P\left(\dfrac{28-30}{1.155} < Z < \dfrac{33-30}{1.155}\right) = P(-1.73 < Z < 2.6)$

$$= P(Z < 2.6) - P(Z < -1.73) = 0.9953 - 0.0418 = 0.9535$$

Ejercicio 13 (3 *puntos*)

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribunión normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) (1.5 puntos) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) (1.5 puntos) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque Estadística)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los adultos con sobrepeso (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(120, 20)$$

a) $$P(X > 150) = P\left(Z > \frac{150 - 120}{20}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332$$
$$= 0.0668$$

El 6.68 % de los adultos con sobrepeso tiene riesgo de desarrollar la enfermedad A

b) $$X : \mathcal{N}(120, 20) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(120, \frac{20}{\sqrt{20}}\right) = \mathcal{N}(120, \sqrt{20})$$

$$P\left(110 < \overline{X} < 125\right) = P\left(\frac{110 - 120}{\sqrt{20}} < Z < \frac{125 - 120}{\sqrt{20}}\right) = P(-2.24 < Z < 1.12)$$
$$= P(Z < 1.12) - P(Z < -2.24) = P(Z < 1.12) - P(Z > 2.24)$$
$$= P(Z < 1.12) - \left[1 - P(Z < 2.24)\right] = 0.8686 - (1 - 0.9875)$$
$$= 0.8561$$

Galicia

Ejercicio 14 (3.33 *puntos*)

El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica $\sigma = 300$ €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552 € y 1748 €.

b) (1.5 puntos) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es $\mu = 1650$ €, ¿Cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Salario de los trabajadores (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 300)$$

b) $X : \mathcal{N}(1650, 300) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}(\underbrace{1650}_{\mu}, \underbrace{50}_{\sigma/\sqrt{n}})$

$$P(\overline{X} \geq 1590) = P\left(Z \geq \frac{1590 - 1650}{50}\right) = P(Z \geq -1.2) = P(Z \leq 1.2) = 0.8849$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 15 (2 *puntos*)

El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1.2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) (1 punto) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW, si $\mu = 6.3$ kW.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

$$X : \text{“Consumo familiar diario de electricidad (kW)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1.2)$$

a) $X : \mathcal{N}(6.3, 1.2) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6.3, \dfrac{1.2}{\sqrt{50}} = 0.17\right)$

$$\begin{aligned} P\left(6 \leq \overline{X} \leq 6.6\right) &= P\left(\frac{6-6.3}{0.17} \leq Z \leq \frac{6.6-6.3}{0.17}\right) = P(-1.77 \leq Z \leq 1.77) \\ &= P(Z \leq 1.77) - P(Z \leq -1.77) = P(Z \leq 1.77) - P(Z \geq 1.77) \\ &= P(Z \leq 1.77) - \left[1 - P(Z \leq 1.77)\right] = 2P(Z \leq 1.77) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9616 - 1 = 0.9232 \end{aligned}$$

Ejercicio 16 (2 *puntos*)

La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100$ h?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración componente (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

b) $X : \mathcal{N}(8100, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8100, \dfrac{1000}{\sqrt{100}} = 100\right)$

$$\begin{aligned} P(7904 \leq \overline{X} \leq 8296) &= P\left(\frac{7904-8100}{100} \leq \frac{8296-8100}{100}\right) = P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\ &= P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq -1.96) \\ &= P(Z \leq 1.96) - P(Z \geq 1.96) \\ &= P(Z \leq 1.96) - \Big[1 - P(Z \leq 1.96)\Big] \\ &= 2 \cdot P(Z \leq 1.96) - 1 = 2 \cdot 0.9750 - 1 = 0.95 \end{aligned}$$

Ejercicio 17 (2 *puntos*)

En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

b) (1 punto) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto familiar en gas (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 75)$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 75) \xrightarrow{n=81} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(250, \dfrac{75}{\sqrt{81}} = 8.33\right)$

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230 - 250}{8.33}\right) = P(Z \geq -2.4) = P(Z \leq 2.4) = 0.9918$$

Ejercicio 18 (2 *puntos*)

El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

b) (1 punto) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o iggual que 2625 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de patatas (gr)”} \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, 10)$$

b) $X : \mathcal{N}(10, 100) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(10, \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2\right) \quad \& \quad \overline{X} = \dfrac{2625}{25} = 105$

$$\left(\overline{X} \leq 105\right) = P\left(Z \leq \frac{105 - 100}{2}\right) = P(Z \leq 2.5) = 0.9938$$

Ejercicio 19 (2 *puntos*)

La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

b) (1 punto) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas $\overline{X}$ sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Producción diaria de leche } (\ell)\text{"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 30)$$

b) $X : \mathcal{N}(950, 50) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(950, \dfrac{50}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}(950, 10)$

$$P(\overline{X} \le 940) = P\left(Z \le \frac{940 - 950}{10}\right) = P(Z \le -1) = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1)$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Ejercicio 20 (2 *puntos*)

El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

b) (1 punto) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de la gamba Palamós (g)"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

b) $X : \mathcal{N}(70, 5) \xrightarrow{n=12} \overline{X} : \mathcal{N}\left(70, \dfrac{5}{\sqrt{12}}\right)$

$$P\left(\overline{X} \ge \frac{855}{12}\right) = P\left(\overline{X} \ge 71.25\right) = P\left(Z \ge \frac{71.25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P(Z \ge 0.87)$$
$$= 1 - P(Z < 0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922$$

Ejercicio 21 (2 *puntos*)

> *La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.*
>
> *b) (1 punto) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrido (km)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

b) $X : \mathcal{N}(160, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(160, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(160, 2)$

$$P(\overline{X} > 156) = P\left(Z > \frac{156 - 160}{2}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$$

Ejercicio 22 (2 *puntos*)

> *El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros ($l/100\,km$), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2\ l/100\,km$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.*
>
> *b) (1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 4.8\ l/100\,km$. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, esté comprendida entre 4.5 y 5.1 $l/100\,km$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

b) $\quad X :\ \mathcal{N}(4.8, 1.2) \quad \xrightarrow{n=49} \quad \overline{X} :\ \mathcal{N}(4.8, {}^{1.2}/_{\sqrt{49}} = 0.1714)$

$$\begin{aligned} P(4.5 \leq \overline{X} \leq 5.1) &= P\left(\frac{4.5 - 4.8}{0.1714} \leq Z \leq \frac{5.1 - 4.8}{0.1714}\right) = P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -1.75) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 1.75)] = -0.9599 - (1 - 0.9599) \\ &= 0.9198 \end{aligned}$$

Ejercicio 23 (2 *puntos*)

El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ h y desviación típica $\sigma = 0.25$ h.

b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 2$ h. calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1.85 y 2.15 horas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(2, 0.25) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2, \dfrac{0.25}{\sqrt{20}} = 0.056\right)$

$$\begin{aligned} P(1.85 \leq \overline{X} \leq 2.15) &= P\left(\frac{1.85-2}{0.056} \leq Z \leq \frac{2.15-2}{0.056}\right) = P(-2.68 \leq Z \leq 2.68) \\ &= P(Z \leq 2.68) - P(Z \leq -2.68) = P(Z \leq 2.68) - P(Z \geq 2.68) \\ &= P(Z \leq 2.68) - [1 - P(Z \leq 2.68)] = 2 \cdot P(Z \leq 2.68) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9963 - 1 = 0.9926 \end{aligned}$$

Ejercicio 24 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0.2$ kg.

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1.5$ kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(1.5, 0.2) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1.5, \dfrac{0.2}{\sqrt{20}} = 0.045\right)$

Si la suma de los pesos de 20 ejemplares es de 32 kg, quiere decir que la media será $\overline{x} = \dfrac{32}{20} = 1.6$ kg

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 1.6) &= P\left(Z > \frac{1.6-1.5}{0.045}\right) = P(Z > 2.22) = 1 - P(Z < 2.22) \\ &= 1 - 0.9868 = 0.0132 \end{aligned}$$

Ejercicio 25 (2 *puntos*)

El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0.1587$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(40, 5) \xrightarrow{n=?} \overline{X} : \mathcal{N}\left(40, \dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{10/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.1587 \implies P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.8413$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{\sqrt{n}}{5} = 1.00 \implies \sqrt{n} = 5 \implies \boxed{n = 25}$$

Ejercicio 26 (2 *puntos*)

En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) Suponiendo $\mu = 3000$ €, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 € sea 0.20.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(3000, \sigma) \xrightarrow{n=49} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} > 3125) = P\left(Z > \frac{3125-3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z > \frac{875}{\sigma}\right) = 1 - P(Z < \frac{875}{\sigma}) = 0.20$$

$$\implies P\left(Z < \frac{875}{\sigma}\right) = 0.80 \xRightarrow{Tabla} \frac{875}{\sigma} = 0.845 \implies \boxed{\sigma = 1035.5}$$

Ejercicio 27 (2 *puntos*)

Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

b) (1 punto) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

Sea $X \equiv$ Peso de los paquetes de harina, entonces $X : \mathcal{N}(\mu, 25)$

b) $X : \mathcal{N}(560, 25) \xrightarrow{n=50} \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(560, \dfrac{25}{\sqrt{50}}\right) = \mathcal{N}(560, 3.54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565 - 560}{3.54}\right) = P(Z \geq 1.41) = 1 - P(Z \leq 1.41)$$
$$= 1 - 0.9207 = 0.0793$$

Ejercicio 28 (2 *puntos*)

La factura, en euros, de una cena para una persona, reservando en pucherodelujo.com *se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5$.*

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el coste medio por comensal, de 9 personas escogidas al azar que reserven en la página, no sea mayor que 30 euros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(25, 5) \xrightarrow{n=9} \overline{X} : \mathcal{N}\left(25, \dfrac{5}{\sqrt{9}} = 1.67\right)$

$$P(\overline{X} < 30) = P\left(Z < \frac{30 - 25}{1.67}\right) = P(Z < 3) = 0.9987$$

Ejercicio 29 (2 *puntos*)

En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450$ g.

b) (1 punto) Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000$ g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pesen en media entre 3000 g y 3450 g.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(3000, 450) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{450}{\sqrt{4}}\right) = \mathcal{N}(3000, 225)$

$$P(3000 < X < 3450) = P\Big(\frac{3000-3000}{225} < Z < \frac{3450-3000}{225}\Big) = P(0 < Z < 2)$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

Ejercicio 30 (2 *puntos*)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0.5 km.

b) (1 punto) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(2, 0.5) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(2, \dfrac{0.5}{\sqrt{16}} = 0.125)$

$$P\Big(\overline{X} \geq \frac{30}{16}\Big) = P(\overline{X} \geq 1.875) = P\Big(Z \geq \frac{1.875-2}{0.125}\Big) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413$$

Ejercicio 31 (2 *puntos*)

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(28, 10) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = 3.16\right)$

$$\begin{aligned} P\left(28 \le \overline{X} \le 30\right) &= P\left(\frac{28-28}{3.16} \le Z \le \frac{30-28}{3.16}\right) = P(0 \le Z \le 0.63) \\ &= P(Z \le 0.63) - P(Z \le 0) = 0.7357 - 0.5 = 0.2357 \end{aligned}$$

Ejercicio 32 (2 *puntos*)

Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar un muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(3000, 300) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{300}{\sqrt{50}} = 42.43\right)$

$$P\left(\overline{X} \ge 2700\right) = P\left(Z \ge \frac{2700-3000}{42.43}\right) = P(Z \ge -7.07) = P(Z \le 7.07) \simeq 1$$

Ejercicio 33 (2 *puntos*)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

b) (1 punto) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso barra mantequilla (gr)"} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 4)$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 4) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = \mathcal{N}(250, 0.8)$

$$P(\overline{X} \geq 248) = P\Big(Z \geq \frac{248 - 250}{0.8}\Big) = P(Z \geq -2.5) = P(Z < 2.5) = 0.9938$$

Ejercicio 34 (2 *puntos*)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de los huevos (gr)"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

b) $X : \mathcal{N}(59, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(59, \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right)$

$$\begin{aligned} P(57 < \overline{X} < 61) &= P\left(\frac{57-59}{8/\sqrt{10}} < Z < \frac{61-59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - P(Z < -0.79) = P(Z < 0.79) - P(Z > 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - \Big[1 - P(Z < 0.79)\Big] = 2 \cdot P(Z < 0.79) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.7852 - 1 = 0.5704 \end{aligned}$$

Ejercicio 35 (2 *puntos*)

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30.5 minutos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{"Tiempo para hacer el test (minuotos)"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

b) $X : \mathcal{N}(32, 3) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}\left(32, \dfrac{3}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}(32, 0.75)$

$$P(\overline{X} < 30.5) = P\left(Z < \frac{30.5 - 32}{0.75}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Ejercicio 36 (2 *puntos*)

Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

b) (1 punto) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{20}{\sqrt{10}} = 6.32\right)$

$$P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) = P\left(\frac{-10}{6.32} < Z < \frac{10}{6.32}\right) = P(-1.58 < Z < 1.58)$$
$$= P(Z < 1.58) - P(Z < -1.58) = P(Z < 1.58) - P(Z > 1.58)$$
$$= P(Z < 1.58) - \Big[1 - P(Z < 1.58)\Big] = 2 \cdot P(Z < 1.58) - 1$$
$$= 2 \cdot 0.9429 - 1 = 0.8858$$

Ejercicio 37 (2 *puntos*)

Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?

b) (1 punto) Calcule $P(19 < \overline{X} < 22)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(20, 5) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(20, \dfrac{5}{\sqrt{25}} = 1\right)$

b)
$$\begin{aligned} P(19 < \overline{X} < 22) &= P\left(\frac{19-20}{1} < Z < \frac{22-20}{1}\right) = P(-1 < Z < 2) \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - P(Z > 1) \\ &= P(Z < 2) - \Big[1 - P(Z < 1)\Big] = 0.9772 - (1 - 0.8413) = 0.8185 \end{aligned}$$

Ejercicio 38 (2 *puntos*)

El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) (1 punto) Halle la probabilidad de que más de 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $\left.\begin{array}{l} p = 0.3 \\ n = 120 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 120 > 30 \checkmark \\ np = 36 > 5 \checkmark \\ nq = 84 > 5 \checkmark \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{p} : \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\dfrac{p \cdot q}{n}}\right) = \mathcal{N}(0.3, 0.0418)$

b)
$$\begin{aligned} P(\hat{p} > 0.35) &= P\left(Z > \frac{0.35 - 0.3}{0.0418}\right) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2) \\ &= 1 - 0.8849 = 0.1151 \end{aligned}$$

Ejercicio 39 (2 *puntos*)

El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción B - Coincidentes)

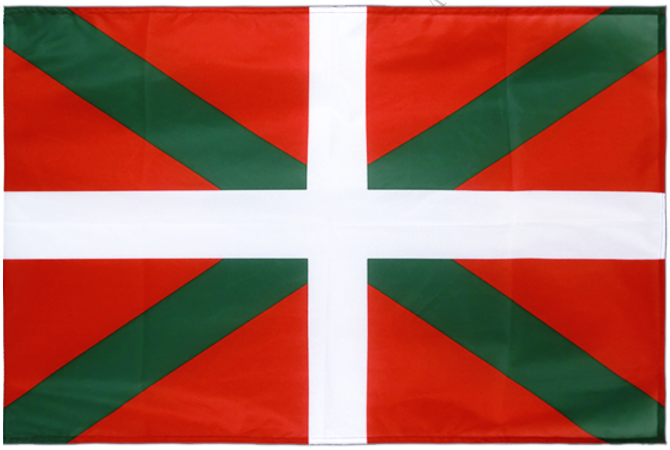
Solución.

$$X \equiv \text{“Porcentaje de agua en el cuerpo humano (puntos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

b) $X : \mathcal{N}(67, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(67, \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right) = \mathcal{N}(67, 2.53)$

$$\begin{aligned} P(65 < \overline{X} < 69) &= P\left(\frac{65-67}{2.53} < Z < \frac{69-67}{2.53}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - P(Z < -0.79) = P(Z < 0.79) - \big[1 - P(Z < 0.79)\big] \\ &= 2 \cdot P(Z < 0.79) - 1 = 2 \cdot 0.7852 - 1 = 0.5704 \end{aligned}$$

País Vasco



Ejercicio 40 (2.5 *puntos*)

En un examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7.6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6.8 puntos.

a) (0.75 puntos) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) (0.75 puntos) Si la desviación típica es 1.5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) (1 punto) Si la desviación típica es 1.5 puntos y el Aprobado *se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?*

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Inferencia Estadística)

Solución.

$$X \equiv \text{“Puntuación en el examen de Lengua”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(6.8, \sigma)$$

a) $P(X \geq 7.6) = 0.3 \implies P\Big(Z \geq \dfrac{7.6-6.8}{\sigma}\Big) = 0.3 \implies 1 - P\Big(Z \leq \dfrac{0.8}{\sigma}\Big) = 0.3$

$$\implies P\Big(Z \leq \frac{0.8}{\sigma}\Big) = 0.7 \xrightarrow{Tabla} \frac{0.8}{\sigma} = 0.525 \implies \boxed{\sigma = 1.5238}$$

b) $X : \mathcal{N}(6.8, 1.5)$

$$P(X \geq a) = 0.2 \implies P\Big(Z \geq \frac{a-6.8}{1.5}\Big) = 0.2 \implies 1 - P\Big(Z \leq \frac{a-6.8}{1.5}\Big) = 0.2$$

$$\implies P\Big(Z \leq \frac{a-6.8}{1.5}\Big) = 0.8 \xrightarrow{Tabla} \frac{a-6.8}{1.5} = 0.84 \implies \boxed{a = 8.06}$$

c) $X : \mathcal{N}(6.8, 1.5)$

$$P(X \geq 5) = P\Big(Z \geq \frac{5-6.8}{1.5}\Big) = P(Z \geq -1.2) = P(Z \leq 1.2) = 0.8849$$

$$\implies \boxed{88.49\,\% \text{ aprobaron el examen}}$$

Ejercicio 41 (2.5 *puntos*)

La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y de varianza 16 grados^2.

b) (0.3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11°?

c) (0.6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8° y 10°?

d) (0.3 puntos) ¿Cuál es la proporción de días con más de 9°?

e) (0.4 puntos) Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12°?

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque Inferencia Estadística)

Solución.

$$X \equiv \text{“Temperatura del mes (°C)”} \xrightarrow{\sigma^2=16} X : \mathcal{N}(10, 4)$$

b) $$P(X \geq 11) = P\Big(Z \geq \frac{11-10}{4}\Big) = P(Z \geq 0.25) = 1 - P(Z \leq 0.25)$$
$$= 1 - 0.5987 = 0.4013$$

c) $$P(8 \leq X \leq 10) = P\Big(\frac{8-10}{4} \leq Z \leq \frac{10-10}{4}\Big) = P(-0.5 \leq Z \leq 0)$$
$$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 0.5)$$
$$= P(Z \leq 0) - \Big[1 - P(Z \leq 0.5)\Big] = 0.5 - (1 - 0.6915) = 0.1965$$

d) $$P(X \geq 9) = P\Big(Z \geq \frac{9-10}{4}\Big) = P(Z \geq -0.25) = P(Z \leq 0.25) = 0.5987$$

e) $$P(X \leq 12) = P\Big(Z \leq \frac{12-10}{4}\Big) = P(Z \leq 0.5) = 0.6915$$

En 30 dias habrá $30 \cdot 0.6915 = 20.745 \simeq 21$ días con temperatura superior a $12°C$.

Ejercicio 42 (2.5 *puntos*)

El número de horas semanales que los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 *y varianza* 7.29.
Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

a) *(0.75 puntos) Indica cuál es la distribución de la media muestral,* $\overline{X}$.

b) *(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre* 7.82 *y* 8.36*?*

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque Inferencia Estadística)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo dedicadas al deporte (horas)”} \xrightarrow{\sigma^2=7.29} X : \mathcal{N}(8, 2.7)$$

a) $X : \mathcal{N}(8, 2.7) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}(8, 0.45)$

b)
$$\begin{aligned} P(7.82 \leq \overline{X} \leq 8.36) &= P\left(\frac{7.82-8}{0.45} \leq Z \leq \frac{8.36-8}{0.45}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.8) \\ &= P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -0.4) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq 0.4) \\ &= P(Z \leq 0.8) - \Big[1 - P(Z \leq 0.4)\Big] = 0.7881 - (1 - 0.6554) \\ &= 0.4435 \end{aligned}$$

La Rioja

Ejercicio 43 (2.5 *puntos*)

Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

i) *(1 punto) Calcula las probabilidades $P(X > 30)$ y $P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor?*

ii) *(1 punto) Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\overline{X}$. Calcula $P(\overline{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$?*

iii) *(0.5 puntos) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de (ii) con el de (i), sin recurrir a fórmulas?*

(La Rioja - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Probabilidad)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(25,5) \qquad \& \qquad Y : \mathcal{N}(28,1)$$

i) $$P(X > 30) = P\Big(Z > \frac{30-5}{5}\Big) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0.84134$$
$$= 0.15866$$
$$P(Y > 30) = P\Big(Z > \frac{30-28}{1}\Big) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.97725$$
$$= 0.02275$$

Por lo tanto es mayor $P(X > 30)$.

ii) $$X : \mathcal{N}(25,5) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N} = \left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}(25, 2.5)$$
$$P(\overline{X} > 30) = P\Big(Z > \frac{30-25}{2.5}\Big) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.97725$$
$$= 0.02275$$
$$X : \mathcal{N}(25,5) \xrightarrow{n=9} \overline{X} : \mathcal{N} = \left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}(25, 5/3)$$
$$P(\overline{X} > 30) = P\Big(Z > \frac{30-25}{5/3}\Big) = P(Z > 3) = 1 - P(Z \le 3) = 1 - 0.99865$$
$$= 0.00135$$

iii) La distribución de las medias $\overline{X}$ se comporta como una normal de media la misma que la de X y desviación típica $\sigma = \sigma/\sqrt{n}$, que es menor cuanto mayor es el tamaño de la muestra, por tanto:

$$P(X > 30) > P(\overline{X}_4 > 30) > P(\overline{X}_9 > 30)$$

Ejercicio 44 (2.5 *puntos*)

Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

I) *(1.5 puntos) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95 % de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99 %?*

II) *(1 punto) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2.3263) = 0.99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99 %?*

(La Rioja - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Probabilidad)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duracióno de la ofrenda (horas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(8, \sqrt{2}/5)$$

a) $P(X < 8.5) = P\left(Z < \dfrac{8.5 - 8}{\sqrt{2}/5}\right) = P(Z < 1.77) = 0.96164$

- Como $P(X < 8.5) > 0.95$, podemos afirmar que la duración de la ofrenda será inferior a 8.5 horas con una probabilidad de acierto de al menos el 95 %.
- Como $P(X < 8.5) < 0.99$, NO podemos afirmar que la duración de la ofrenda será inferior a 8.5 horas con una probabilidad de acierto mayor del 99 %.

b) $P(X < 8.5) = P\left(Z < \dfrac{8.5 - 8}{\sigma}\right) = 0.99 \implies \dfrac{8.5 - 8}{\sigma} = 2.3263 \implies \boxed{\sigma = 0.2149}$

Ejercicio 45 (2.5 *puntos*)

La variable X mide la estatura de los policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

I) *(1.75 puntos) Calcula la media de la variable X.*

II) *(0.75 puntos) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia.*

(La Rioja - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque Probabilidad)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estatura de los policías (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 6.5)$$

I) $P(X \geq 183) = 0.11507 \implies P\left(Z \geq \dfrac{183-\mu}{6.5}\right) = 0.11502$

$\implies 1 - P\left(Z \leq \dfrac{183-\mu}{6.5}\right) = 0.11502 \implies P\left(Z \leq \dfrac{183-\mu}{6.5}\right) = 0.88493$

$\overset{Tabla}{\implies} \dfrac{183-\mu}{6.5} = 1.2 \implies \boxed{\mu = 175.2}$

II) $P(X \geq a) = 0.88493 \implies P\left(Z \geq \dfrac{a-175.2}{6.5}\right) = 0.8849$

$\implies P\left(Z \leq -\dfrac{a-175.2}{6.5}\right) = 0.8849 \overset{Tabla}{\implies} -\dfrac{a-175.2}{6.5} = 1.2 \implies \boxed{a = 167.4}$

Ejercicio 46 (2.5 *puntos*)

Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X y llamaremos $\overline{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que

$$P(X < 15) = P(\overline{X} < 11)$$

I) *(1 punto) ¿Cuánto vale dicha probabilidad?*

II) *(1.25 puntos) ¿Qué número es n?*

III) *(0.25 puntos) ¿Hay algún valor a para el que $P(\overline{X} < a)$ no dependa de n?*

(La Rioja - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque Probabilidad)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(10, 4) \xrightarrow{n} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(10, \frac{4}{\sqrt{n}}\right)$$

I) $P(X < 15) = P\left(Z < \dfrac{15 - 10}{4}\right) = P(Z < 1.25) = 0.89435$

II) $P(\overline{X} < 11) = P\left(Z < \dfrac{11 - 10}{4/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \dfrac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.89435$

$\xRightarrow{Tabla} \dfrac{\sqrt{n}}{4} = 1.25 \implies \boxed{n = 25}$

III) $P(\overline{X} < a) = P\left(Z < \dfrac{a - 10}{\sqrt{4}\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \dfrac{(a - 10) \cdot \sqrt{n}}{4}\right)$

Para que este valor no dependa de $n \implies \boxed{a = 10}$, en ese caso:

$P(\overline{X} < 10) = P(Z < 0) = 0.5$

EVAU - Matemáticas II

Aragón

Ejercicio 47 (2 *puntos*)

El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sultitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

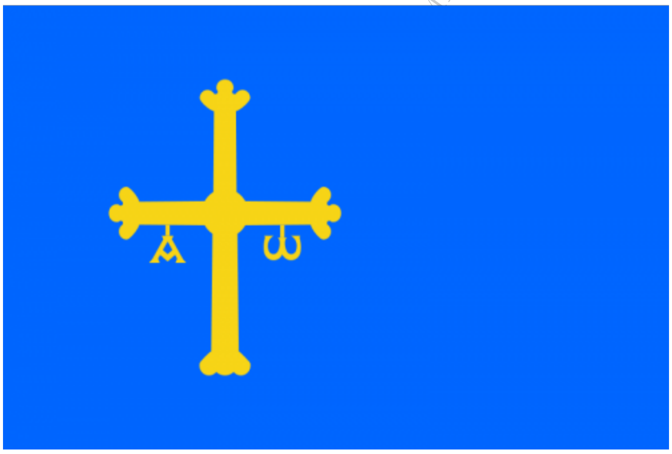
Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido total en sulfitos (mg/l)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(150, 30)$$

a) $$\begin{aligned} P(X \geq 200) &= P\Big(Z \geq \frac{200-150}{30}\Big) = P(Z \geq 1.67) = 1 - P(Z \leq 1.67) \\ &= 1 - 0.9525 = 0.0475 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(110 \leq X \leq 150) &= P\Big(\frac{110-150}{30} \leq Z \leq \frac{150-150}{30}\Big) = P(-1.33 \leq Z \leq 0) \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1.33) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1.33) \\ &= P(Z \leq 0) - \Big[1 - P(Z \leq 1.33)\Big] = 0.5 - (1 - 0.9082) \\ &= 0.4082 \Longrightarrow 40.82\,\% \end{aligned}$$

Asturias



Ejercicio 48 (2.5 *puntos*)

En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 *puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media* 70 *y desviación típica* 10*, calcule:*

a) (1.25 puntos) La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo $[75, 85]$.

b) (1.25 puntos) Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 *puntos es* 0.05*. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.*

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Calificación del test (puntos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(70, 10)$$

a) $$P(75 \leq X \leq 85) = P\left(\frac{75-70}{10} \leq Z \leq \frac{85-70}{10}\right) = P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$$
$$= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq 0.5) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad P(X > 90) = 0.05$

$$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90-\mu}{10}\right) = 0.05 \Longrightarrow P\left(Z < \frac{90-\mu}{10}\right) = 0.95$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{90-\mu}{10} = 1.645 \Longrightarrow \boxed{\mu = 73.55}$$

Por lo tanto la media ha aumentado.

Ejercicio 49 (2.5 *puntos*)

Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I *de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución* $\mathcal{N}(5,2)$.

a) *(0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que* 7.5.

b) *(0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre* 3 *y* 5.

c) *(1 punto) Se modifica el sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es* 1.5 *y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que* 6, *sea* 0.52. *¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?*

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Calificaciones de } \textit{Análisis Matemático I}\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(5,2)$$

a) $P(X \geq 7.5) = P\left(Z \geq \dfrac{7.5-5}{2}\right) = P(Z \geq 1.25) = 1 - P(Z < 1.25) = 1 - 0.8944$
$= 0.1056$

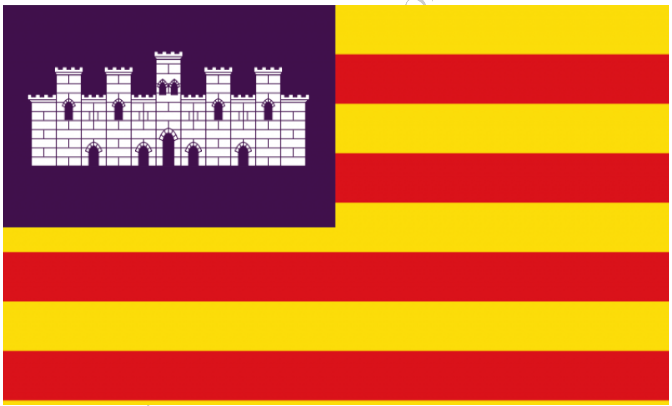
b) $P(3 \leq X \leq 5) = P\left(\dfrac{3-5}{2} \leq Z \leq \dfrac{5-5}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0)$
$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1)$
$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z < 1)] = 0.5 - (1 - 0.8413) = 0.3413$

c) $\mathcal{N}(\mu, 1.5) \quad \& \quad P(X \leq 6) = 0.52$

$P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \dfrac{6-\mu}{1.5}\right) = 0.52 \xrightarrow{\textit{Tabla}} \dfrac{6-\mu}{1.5} = 0.05 \implies \boxed{\mu = 5.925}$

Por lo tanto el nuevo sistema de enseñanza ha conseguido aumentar la nota media en 0.925 puntos, luego ha funcionado.

Islas Baleares



Ejercicio 50 (2.5 *puntos*)

El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu = 3.1$ kg y desviación típica σ desconocida. Se sabe que solo el $30.5\,\%$ de los recién nacidos pesa más de 3.8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,

a) (4 puntos) ¿Cuál es la desviación típica?

b) (3 puntos) Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.7 kg?

c) (3 puntos) Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2.7 y 3.5 kg?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Estadística)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los recién nacidos (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(3.1, \sigma)$$

a) $$P(X > 3.8) = P\left(Z > \frac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{0.7}{\sigma}\right) = 0.305$$

$$\Longrightarrow\ P\left(Z < \frac{0.7}{\sigma}\right) = 0.695 \xrightarrow{Tabla} \frac{0.7}{\sigma} = 0.51 \Longrightarrow \boxed{\sigma = 1.3725}$$

b) $$P(X < 2.7) = P\left(Z < \frac{2.7 - 3.1}{1.3725}\right) = P(Z < -0.29) = P(Z > 0.29)$$

$$= 1 - P(Z < 0.29) = 1 - 0.6141 \Longrightarrow \boxed{P(X < 2.7) = 0.3859}$$

c) $$P(2.7 < X < 3.5) = P\left(\frac{2.7 - 3.1}{1.3725} < Z < \frac{3.5 - 3.1}{1.3725}\right) = P(-2.9 < Z < 2.9)$$

$$= P(Z < 2.9) - P(Z < -2.9) = P(Z < 2.9) - \Big[1 - P(Z < 2.9)\Big]$$

$$= 2P(Z < 2.9) - 1 = 2 \cdot 0.6141 - 1 \Rightarrow \boxed{P(2.7 < X < 3.5) = 0.2282}$$

Ejercicio 51 (2.5 *puntos*)

a) *(5 puntos) En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre* 5 *y* 7 *si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media* 6 *y desviación típica* 2*?*

b) *(5 puntos) En un examen de filosofía, el* 35 % *de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que* 6 *mientras que el* 51 % *la obtuvo menor que* 4*. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media* μ *y su desviación típica* σ*.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Estadística)

Solución.

a) $X \equiv$ "Puntuación del examen de tecnología" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(6, 2)$

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 7) &= P\left(\frac{5-6}{2} \leq Z \leq \frac{7-6}{2}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 0.5) - P(Z \geq 0.5) \\ &= P(Z \leq 0.5) - \Big[1 - P(Z \leq 0.5)\Big] \\ &= 2P(Z \leq 0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 \implies \boxed{P(5 \leq X \leq 7) = 0.383} \end{aligned}$$

b) $Y \equiv$ "Puntuación del examen de filosofía" $\longrightarrow Y : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$P(Y \geq 6) = P\left(Z \geq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \implies P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.35 = 0.65$$

$$\xrightarrow{Tabla} \frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385 \implies \odot\ \mu + 0.385\sigma = 6$$

$$P(Y \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0.51 \xrightarrow{Tabla} \frac{4-\mu}{\sigma} = 0.025 \implies \circledast\ \mu + 0.025\sigma = 4$$

$$\begin{cases} \odot\ \mu + 0.385\sigma = 6 \\ \circledast\ \mu + 0.025\sigma = 4 \end{cases} \Rightarrow 0.36\sigma = 2 \Rightarrow \boxed{\sigma = 5.5555} \xrightarrow{\mu + 0.385 \cdot 5.5555 = 6} \boxed{\mu = 3.8613}$$

Cantabria

Ejercicio 52 (2.5 *puntos*)

En una población determinada la altura de los niños de 17 años sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 7.41.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que en dicha población la altura de un niño de 17 años esté entre 170 cm y 180 cm.

b) (1.5 puntos) A partir de qué altura un niño de 17 años de dicha población se encontraría dentro del 5 % de niños de 17 años más altos de dicha población?

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

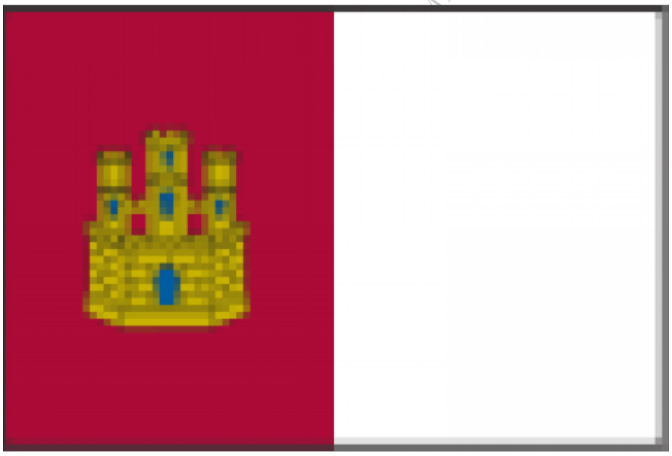
$$X \equiv \text{“Altura de los niños de 17 años (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(175, 7.41)$$

a) $$\begin{aligned} P(170 \le X \le 180) &= P\left(\frac{170-175}{7.41} \le Z \le \frac{180-175}{7.41}\right) = P(-0.67 \le Z \le 0.67) \\ &= P(Z \le 0.67) - P(Z \le -0.67) = P(Z \le 0.67) - P(Z \ge 0.67) \\ &= P(Z \le 0.67) - \Big[1 - P(Z \le 0.67)\Big] = 2P(Z \le 0.67) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.7486 - 1 = 0.4972 \end{aligned}$$

b) $$P(X \ge a) = 0.05 \implies P(X \le a) = 1 - 0.05 = 0.95 \implies P\left(Z \le \frac{a-175}{7.41}\right) = 0.95$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{a-175}{7.41} = 1.645 \implies \boxed{a = 187.19\ cm}$$

Castilla-La Mancha



Ejercicio 53 (2.5 *puntos*)

b) *Una empresa embotelladora de agua produce botellas de* 150 *ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media* 150 *ml y desviación típica* 5 *ml.*

b.1) *(0.5 puntos) ¿Qué proporción de las botellas contiene más de* 152 *ml?*

b.2) *(0.75 puntos) ¿Qué proporción de botellas tiene entre* 149 *y* 152 *ml?*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7257	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Julio 2022)

Solución.

b) $X \equiv$ Contenido real de la botella (ml) $\longrightarrow X : \mathcal{N}(150, 5)$

b.1) $$P(X > 152) = P\left(Z > \frac{152-150}{5}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z < 0.4)$$
$$= 1 - 0.6554 = 0.3446 \implies 34.46\,\% \text{ de las botellas}$$

b.2) $$P(149 < X < 152) = P\left(\frac{149-150}{5} < Z < \frac{152-150}{5}\right) = P(-0.2 < Z < 0.4)$$
$$= P(Z < 0.4) - P(Z < -0.2) = P(Z < 0.4) - P(Z > 0.2)$$
$$= P(Z < 0.4) - \Big[1 - P(Z < 0.2)\Big] = 0.6554 - (1 - 0.5793)$$
$$= 0.2347 \implies 23.47\,\% \text{ de las botellas}$$

Ejercicio 54 (2.5 *puntos*)

b) *El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media* 1.5 *minutos y desviación típica* 0.15 *minutos.*

b.1) *(0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de* 1.35 *minutos?*

b.2) *(0.75 puntos) ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el* 85.08 % *de los tiempo realizados al completar una vuelta al circuito?*

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

b) $X \equiv$ "Tiempo de vuelta (min)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(1.5, 0.15)$

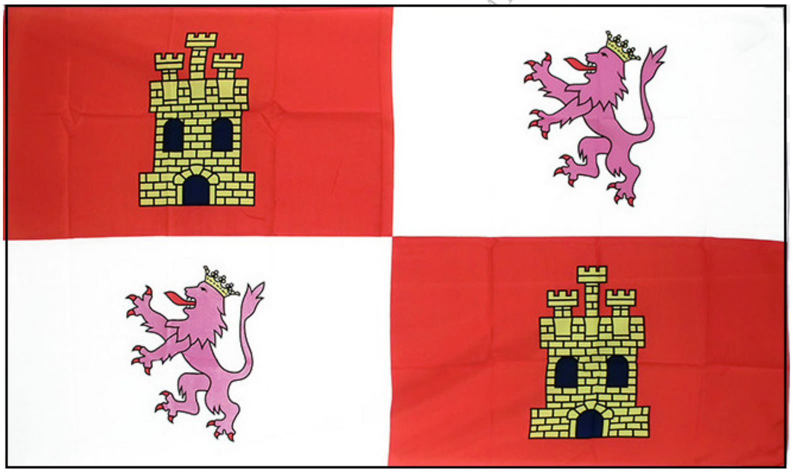
b.1) $P(X \leq 1.35) = P\Big(Z \leq \dfrac{1.35 - 1.5}{0.15}\Big) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1)$

$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

b.2) $P(X \leq a) = 0.8508 \implies P\Big(Z \leq \dfrac{a - 1.5}{0.15}\Big) = 0.8508$

$\xRightarrow{Tabla} \dfrac{a - 1.5}{0.15} = 1.04 \implies \boxed{a = 1.656 \text{ minutos}}$

Castilla y León



Ejercicio 55 (2 *puntos*)

> *La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media* 26 *y desviación típica de* 6*. Si tener un IMC determinado superior a* 35 *significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.*
>
> *(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Estadística)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Indice de Masa Corporarl”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(26, 6)$$

$$P(X > 35) = P\Big(Z > \frac{35-26}{6}\Big) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

Luego el 6.68 % de las personas adultas son obesas.

Ejercicio 56 (2 *puntos*)

> *El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de* 1500 *horas y una desviación típica de* 200 *horas.*
>
> *a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de* 1000 *horas de funcionamiento?*
>
> *b) (1 punto) Si compramos* 500 *impresoras ¿Cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las* 1000 *y* 2000 *horas de uso?*
>
> *(Castilla y León - Matemáticas II - Junio 2022 - Bloque Estadística)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo transcurrido hasta la primera avería (horas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(1500, 200)$$

a) $$P(X < 1000) = P\Big(Z < \frac{1000-1500}{200}\Big) = P(Z < -2.5) = P(Z > 2.5)$$
$$= 1 - P(Z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Luego un 0.62 % de las impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento.

b) $$P(1000 < X < 2000) = P\Big(\frac{1000-1500}{200} < Z < \frac{2000-1500}{200}\Big)$$
$$= P(-2.5 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(Z < -2.5)$$
$$= 0.9938 - 0.0062 = 0.9876$$

Si el 98.76 % de las impresoras falla entre las 1000 y 2000 horas de funcionamiento, quiere decir que de las 500 impresoras de la muestra fallarán: $500 \cdot 0.9876 = 493.8$, es decir, aproximadamente 494 impresoras.

Extremadura

Ejercicio 57 (2 *puntos*)

Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años.

b) (1 punto) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90 % de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro?

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

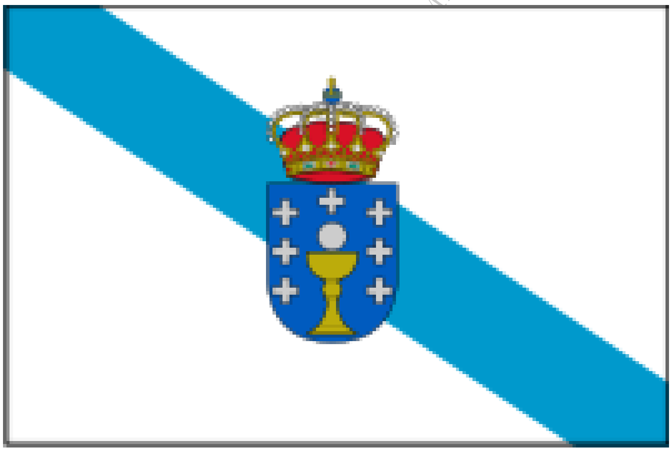
Solución.

$$X \equiv \text{“Vida útil de los relojes (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(10, 2)$$

a) $$\begin{aligned} P(9 \leq X \leq 12) &= P\left(\frac{9-10}{2} \leq Z \leq \frac{12-10}{2}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 0.5) \\ &= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = 0.8413 - (1 - 0.6915) = 0.5328 \end{aligned}$$

b) $$P(X \leq a) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-10}{2}\right) = 0.9 \Rightarrow \frac{a-10}{2} = 1.28 \xRightarrow{Tabla} \boxed{a = 12.56 \text{ años}}$$

Galicia



Ejercicio 58 (2 *puntos*)

> b) *(1 punto) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media* 100 *y desviación típica* 20*, y se toma la decisión de conceder la beca al* 5 % *mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

Solución.

b) $X \equiv$ "Puntuación del mérito académico" $\longrightarrow \mathcal{N}(100, 20)$

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-100}{20}\right) = 0.95 \xRightarrow{Tabla} \frac{a-100}{20} = 1.645 \Longrightarrow \boxed{a = 132.9 \text{ ptos}}$$

Por lo tanto el candidato habrá de superar los 132.9 puntos.

Ejercicio 59 (2 *puntos*)

> *Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media* 123.6 *y desviación típica* 17.8*. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre* 100 *y* 120 *mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superada por el* 67 % *de los pacientes.*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Tensión arterial sistólica (mmHg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(123.6, 17.8)$$

- $$\begin{aligned} P(100 \leq X \leq 120) &= P\left(\frac{100-123.6}{17.8} \leq Z \leq \frac{120-123.6}{17.8}\right) \\ &= P(-1.33 \leq Z \leq -0.2) = P(0.2 \leq Z \leq 1.33) \\ &= P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.2) = 0.9082 - 0.5793 = 0.3289 \end{aligned}$$

- $$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-123.6}{17.8}\right) = P\left(Z \leq \frac{-a+123.6}{17.8}\right) = 0.67$$
  $$\xRightarrow{Tabla} \frac{-a+123.6}{17.8} = 0.44 \Longrightarrow \boxed{a = 115.768\ mmHg}$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 60 (2.5 *puntos*)

Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide :

a) (1 punto) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.

b) (0.5 puntos) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.

c) (1 punto) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de los varones de 2º Bachillerato"} \sim \mathcal{N}(74, 6)$$

a)
$$\begin{aligned} P(68 \leq X \leq 80) &= P\left(\frac{68-74}{6} \leq Z \leq \frac{80-74}{6}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq -1) \\ &= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \geq 1)] = 2P(Z \leq 1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= 1 - P(X \leq 80) = 1 - P\left(Z \leq \frac{80-74}{6}\right) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 \\ &= 0.1587 \implies 0.1587 \cdot 1500 = 238 \text{ estudiantes pesan menos de } 80\ kg. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(X \geq 86 \mid X \geq 76) &= \frac{P(X \geq 86 \cap X \geq 76)}{P(X \geq 76)} = \frac{P(X \geq 86)}{P(X \geq 76)} \\ &= \frac{P\left(Z \geq \frac{86-74}{6}\right)}{P\left(X \geq \frac{76-74}{6}\right)} = \frac{P(Z \geq 2)}{P(Z \geq 0.33)} = \frac{1 - P(Z \leq 2)}{1 - P(Z \leq 0.33)} \\ &= \frac{1 - 9772}{1 - 6293} = 0.0615 \end{aligned}$$

Ejercicio 61 (2.5 *puntos*)

> *La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:*
>
> *a) (1.25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0,05$.*
>
> *b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y $9,3$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)*

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(8,5; 2,5)$

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-8,5}{2,5}\right) = P\left(Z \geq -\frac{a-8,5}{2,5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{-a+8,5}{2,5}\right) = 0,05$$
$$\Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{-a+8,5}{2,5}\right) = 0,95 \Longrightarrow \frac{-a+8,5}{2,5} = 1,645 \Longrightarrow a = 4,38$$

b) $X : \mathcal{N}(8,5; 2,5)$

$$\begin{aligned} P(8 \leq X \leq 9,3) &= P\left(\frac{8-8,5}{2,5} \leq Z \leq \frac{9,3-8,5}{2,5}\right) = P(-0,2 \leq Z \leq 0,32) \\ &= P(Z \leq 0,32) - P(Z \leq -0,2) = P(Z \leq 0,32) - [1 - P(Z \leq 0.2)] \\ &= 0,6255 - (1 - 0,5793) = 0,2048 \end{aligned}$$

Ejercicio 62 (2.5 *puntos*)

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30°C y varianza 25. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28°C y 32°C.

b) (1 puntos) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36°C.

c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(30, \sigma^2 = 25) \implies X : \mathcal{N}(30, 5)$$

$$\text{a)} \quad P(28 \leq X \leq 32) = P\left(\frac{28-30}{5} \leq Z \leq \frac{32-30}{5}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.4)$$
$$= P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.4) = P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.4)]$$
$$= 2 \cdot P(Z \leq 0.4) - 1 = 2 \cdot 0.6554 - 1 = 0.3108$$

$$\text{b)} \quad P(X \geq 36) = P\left(Z \geq \frac{36-30}{5}\right) = P(Z \geq 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2)$$
$$= 1 - 0.8849 = 0.1151$$

Como un mes tiene 30 días, se superará la temperatura en $0.1151 \cdot 30 \simeq 3.45$, es decir, entre 3 y 4 días.

$$\text{c)} \quad P(X \geq t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - P\left(Z \leq \frac{t-30}{5}\right) = 0.5$$
$$\xRightarrow{Tabla} \frac{t-30}{5} = 0 \implies t = 30°C$$

Ejercicio 63 (2.5 *puntos*)

El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0.2$, se pidee:

a) (1.5 puntos) Calcular la desviación típica, σ, de la distribución de pesos.

b) (1 punto) Calcular el valor x_0 tal que $P(X < x_0) = 0.2$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(3353, \sigma)$

$$P(X > 3693) = P\left(Z > \frac{3693 - 3353}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{340}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{340}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$P\left(Z < \frac{340}{\sigma}\right) = 0.8 \xrightarrow{Tabla} \frac{340}{\sigma} = 0.84 \Longrightarrow \boxed{404.76 \text{ gramos}}$$

b) $$P(X < x_0) = P\left(Z < \frac{x_0 - 3353}{404.76}\right) = P\left(Z > \frac{3353 - x_0}{404.76}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z > \frac{3353 - x_0}{404.76}\right) = 0.2 \Longrightarrow P\left(Z < \frac{3353 - x_0}{404.76}\right) = 0.84$$

$$\xrightarrow{Tabla} \frac{3353 - x_0}{404.76} = 0.84 \Longrightarrow \boxed{x_0 = 3013 \text{ gramos}}$$

Ejercicio 64 (2.5 *puntos*)

> *El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.*
>
> *a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?*
>
> *c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8-c, 8.8+c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de os individuos de esta especie?*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)*

Solución.

$X \equiv$ "Tiempo de vida de especie animal (meses)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(8.8, 3)$

a) $$P(X>10)=P\Big(Z>\frac{10-8.8}{3}\Big)=P(Z>0.4)=1-P(Z<0.4)$$
$$=1-0.6554=0.3446=34.46\,\%$$
$$P(7<X<10)=P\Big(\frac{7-8.8}{3}<Z<\frac{10-8.8}{3}\Big)=P(-0.6<Z<0.4)$$
$$=P(Z<0.4)-P(Z<-0.6)=P(Z<0.4)-P(Z>0.6)$$
$$=P(Z<0.4)-\Big[P(Z-0.6)\Big]=0.6554-(1-0.7257)$$
$$=0.3811=38.11\,\%$$

c) $P(8.8-c<X<8.8+c)=0.98$

$$P(8.8-c<X<8.8+c)=P\Big(\frac{8.8-c-8.8}{3}<Z<\frac{8.8+c-8.8}{3}\Big)$$
$$=P\Big(\frac{-c}{3}<Z<\frac{c}{3}\Big)=P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big)-P\Big(Z<-\frac{c}{3}\Big)$$
$$=P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big)-P\Big(Z>\frac{c}{3}\Big)=P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big)-\Big[1-P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big)\Big]$$
$$=2\cdot P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big)-1=0.98\implies P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big)=0.99$$
$$\xRightarrow{Tabla}\frac{c}{3}=2.325\implies \boxed{c=6.975}$$

———— ∘ ————

Ejercicio 65 (2.5 *puntos*)

Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $\mathcal{N}(100, 35)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Puntuación de los empleados”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(100, 35)$$

a) $$P(100 \leq X \leq 140) = P\left(\frac{100-100}{35} \leq Z \leq \frac{140-100}{35}\right) = P(0 \leq Z \leq 1.14)$$
$$= P(Z \leq 1.14) - P(Z \leq 0) = 0.8729 - 0.5 = 0.3729 \Rightarrow 37.29\,\%$$

b) $$P(X < 95) = P\left(Z < \frac{95-100}{35}\right) = P(Z < -0.14) = P(Z > 0.14)$$
$$= 1 - P(Z < 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$$

c) Sea a la puntuación superada por el 75.17 % de los trabajadores

$$P(X > a) = 0.7517 \implies P\left(Z > \frac{a-100}{35}\right) = 0.7517$$
$$\implies P\left(Z < \frac{-a+100}{35}\right) = 0.7517 \implies \frac{-a+100}{35} = 0.68 \implies \boxed{a = 76.2}$$

Ejercicio 66 (2.5 *puntos*)

La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 *mm y desviación típica* 25.75 *mm.*

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 *cm ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?*

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $\ell < 175$ *mm tal que entre* ℓ *y* 175 *estén el* 18 % *de las sardinas capturadas.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2023 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud de la sardina (mm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(175, 25.75)$$

a) $$P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-175}{25.75}\right) = P(Z > -0.58) = P(Z < 0.58)$$
$$= 0.7190 \implies \boxed{71.9\,\%\text{ sardinas de calidad}}$$

b) $$P(\ell < 175) = P\left(\frac{\ell-175}{25.75} < Z < \frac{175-175}{25.75}\right) = P(Z<0) - P\left(Z < \frac{\ell-175}{25.75}\right)$$
$$= 0.5 - P\left(Z > \frac{-\ell+175}{25.75}\right) = 0.5 - \left[1 - P\left(Z < \frac{-\ell+175}{25.75}\right)\right]$$
$$= -0.5 + P\left(Z < \frac{-\ell+175}{25.75}\right) = 0.18 \implies P\left(Z < \frac{-\ell+175}{25.75}\right) = 0.68$$
$$\xrightarrow{Tabla} \frac{-\ell+175}{25.75} = 0.47 \implies \boxed{\ell = 162.9\ mm}$$