MATEMATICAS CCSS & II

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

https://aprendeconmigomelon.com

19 de febrero de 2024

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Distribución Binomial. Todos han sido propuestos en algún examen de EVAU de los últimos años. Aprenderás a calcular la probabilidad de una variable binomial y aproximarla a una variable normal. Casi 30 ejercicios resueltos que espero te resulten de utilidad.

Índice general

Matemáticas CCSS

Andalucia

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) (0.5 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) (0.5 puntos) Halle la probabilidad de que al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) (0.75 puntos) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque C)

Solución.

Sea el suceso: $C \equiv$ "Salir cara" & $X \equiv$ "Salir cruz"

a) $$\left.\begin{array}{l} P(C) = 2 \cdot P(X) \\ P(C) + P(X) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \cdot P(X) + P(X) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{P(C) = {}^2/_3} \\ P(X) = {}^1/_3 \end{cases}$$

b) $Y \equiv$ "Nº de caras en dos lanzamientos" $\longrightarrow Y : \mathcal{B}(2, {}^2/_3)$

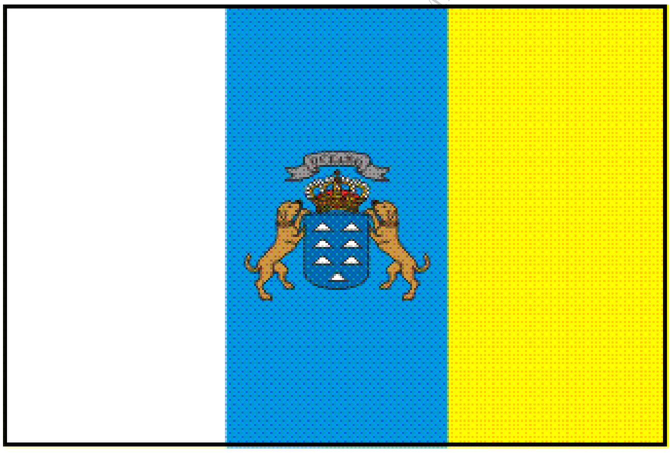
$$P(Y = 1) = \binom{2}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

c) $$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

d) $$P(Y = 2 \mid Y \geq 1) = \frac{P(Y = 2 \cap Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \frac{P(Y = 2)}{P(Y \geq 1)} = \frac{\binom{2}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0}{{}^8/_9}$$

$$= \frac{{}^4/_9}{{}^8/_9} = \frac{1}{2}$$

Islas Canarias



Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del 10 %. *En una muestra aleatoria de* 500 *clientes, calcular la probabilidad de que:*

a) *(0.75 puntos) Entre* 40 *y* 60 *clientes realicen una compra.*

b) *(0.75 puntos) Al menos,* 435 *clientes no hayan comprado.*

c) *(0.5 puntos) Al menos* 45 *clientes realicen una compra.*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de clientes que realizan una compra”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(500, 0.1)$$

$$X : \mathcal{B}(500, 0.1) \left\{ \begin{array}{l} n = 500 > 30 \checkmark \\ np = 50 > 5 \checkmark \\ nq = 450 > 5 \checkmark \end{array} \right\} Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(50, 6.71)$$

a) $P(40 \leq X \leq 60) = P(39.5 \leq Y \leq 60.5) = P\left(\dfrac{39.5 - 50}{6.71} \leq Z \leq \dfrac{60.5 - 50}{6.71}\right)$

$$= P(-1.56 \leq Y \leq 1.56) = P(Z \leq 1.56) - P(Z \leq -1.56)$$
$$= P(Z \leq 1.56) - P(Z \geq 1.56) = P(Z \leq 1.56) - \Big[1 - P(Z \leq 1.56)\Big]$$
$$= 2 \cdot P(Z \leq 1.56) - 1 = 2 \cdot 0.9406 - 1 = 0.8812$$

b) $P(\text{Al menos 435 no hayan comprado}) = P(\text{Menos de 65 hayan comprado})$

$$P(X < 65) = P(Y < 64.5) = P\left(Z < \frac{64.5 - 50}{6.71}\right) = P(Z < 2.16) = 0.9846$$

c) $P(X \geq 45) = P(Y \geq 44.5) = P\left(Z \geq \dfrac{44.5 - 50}{6.71}\right) = P(Z \geq -0.82) = P(Z \leq 0.82)$

$$= 0.7939$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

a) (0.5 puntos) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de pasajeros que viajan con descuento" $\longrightarrow X : \mathcal{B}\left(5, \dfrac{225}{300}\right) = \mathcal{B}(5, 0.75)$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0.75^0 \cdot 0.25^5 = 0.0009$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10 %.

a) *(0.5 puntos) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.*

b) *(1 punto) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de aves que sobrevive más de 5 años”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(n, 0.1)$$

a) $X : \mathcal{B}(10, 0.1)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1)\Big]$$
$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9\right] = 1 - 0.7361 = 0.2639$$

b) $X : \mathcal{B}(200, 0.1) \implies \left\{\begin{array}{l} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 200 \cdot 0.1 = 20 \checkmark \\ nq = 200 \cdot 0.9 = 180 \checkmark \end{array}\right\} \implies Y : \mathcal{B}(\underbrace{20}_{np}, \underbrace{4.24}_{\sqrt{npq}})$

$$P(10 < X < 15) = P(10.5 < X < 14.5) = P\left(\frac{10.5 - 20}{4.24} < Z < \frac{14.5 - 20}{4.24}\right)$$
$$= P(-2.24 < Z < -1.3) = P(Z < -1.3) - P(Z < -2.24)$$
$$= P(Z > 1.3) - P(Z > 2.24) = 1 - P(Z < 1.3) - [1 - P(Z < 2.24)]$$
$$= P(Z < 2.24) - P(Z < 1.3) = 0.9875 - 0.9032 = 0.0843$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos sean defectuosos?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2002A)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de lotes defectuosos”} \quad X : \mathcal{B}(3, 0.05)$$

a) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95 + \binom{3}{3} \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^0 = 0.00725$

b) $P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - \binom{3}{3} \cdot 0.05^3 \cdot 0.05^0 = 0.999875$

———————— ○ ————————

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

En las especificaciones de una máquina tragaperras se establece que la proporción P de veces que la máquina devuelve algo a quien la use es 1/4.

a) (1 punto) Utilice la aproximación por la distribución normal para calcular la probabilidad de obtener al menos 20 devoluciones de 100 veces que se juega.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{B}(100, 1/4) \left\{ \begin{array}{l} n > 10 \\ np = 100 \cdot 1/4 = 25 > 5 \\ nq = 100 \cdot 3/4 = 75 > 5 \end{array} \right\} \xrightarrow{Yates} Y : \mathcal{N}\Big(np = 25, \sqrt{npq} = 4.33\Big)$

$$P(X \geq 20) = P(Y > 19.5) = P\left(Z > \frac{19.5 - 25}{4.33}\right) = P(Z > -1.27)$$
$$= P(Z < 1.27) = 0.9880$$

———————— ○ ————————

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

El 64 % de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa caracterísitica de la muestra?

b) (1 punto) Halle la probabilidad de que más del 70 % de los indiviuos de la muestra posean dicha característica.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{B}(120, 0.64) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 120 > 10 \checkmark \\ np = 76.8 > 5 \checkmark \\ nq = 43.2 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(76.8, 5.26)$

b) El 70 % de los individuos de la muestra son $0.7 \cdot 120 = 84$

$$P(X > 84) = P(Y \geq 84.5) = P\left(Z \geq \frac{84.5 - 76.8}{5.26}\right) = P(Z \geq 1.46)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.46) = 1 - 0.9279 = 0.0721$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0.75$*. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño* $n = 140$ *hogares. Determine:*

a) (1 punto) El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.

b) (1 punto) La probabilidad de que, en la muestra de 140 *hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre* 98 *y* 112 *hogares.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

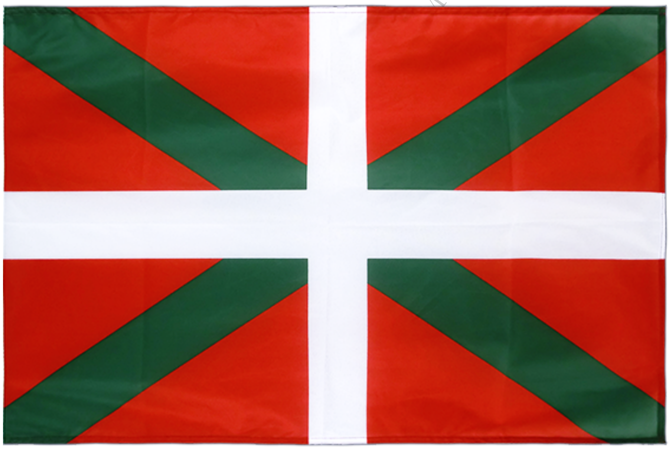
$$X \equiv \text{“Nº de hogares con dos o más ordenadores”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(140, 0.75)$$

a) $E[X] = n \cdot p = 140 \cdot 0.75 = 105$ es la media de hogares con dos o más ordenadores, por lo tanto la media de hogares que no tienen dos o más ordenadores vendrá dada por: $1 - E[X] = 140 - 105 = 35$.

b) $$X : \mathcal{B}(140, 0.75) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 140 > 20 \checkmark \\ np = 105 > 5 \checkmark \\ nq = 35 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(\underbrace{105}_{np}, \underbrace{5.1235}_{\sqrt{npq}})$$

$$\begin{aligned} P(98 < X < 112) &= P(98.5 < Y < 111.5) = P\Big(\frac{98.5 - 105}{5.1235} < Z < \frac{111.5 - 105}{5.1235}\Big) \\ &= P(-1.46 < Z < 1.27) = P(Z < 1.27) - P(Z < -1.46) \\ &= P(Z < 1.27) - P(Z > 1.46) = P(Z < 1.27) - \Big[1 - P(Z < 1.46)\Big] \\ &= 0.8980 - (1 - 0.9279) = 0.8259 \end{aligned}$$

País Vasco



Ejercicio 9 (2.5 *puntos*)

Un jugador A realiza lanzamientos con una moneda equilibrada, mientras que otro jugador B lo hace con una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara con la moneda trucada es 0.4. Asociadas a dichos lanzamientos se definen las variables que siguen las siguientes distribuciones binomiales:

$X \equiv$ *número de caras que obtiene el jugador A en n lanzamientos* $\longrightarrow X : \mathcal{B}(n, p)$

- $n \equiv$ *"número de lanzamientos con la moneda equilibrada".*
- $p \equiv$ *"probabilidad de obtener cara con la moneda equilibrada".*

$Y \equiv$ *número de cruces que obtiene el jugador B en n' lanzamientos* $\longrightarrow Y : \mathcal{B}(n', p')$

- $p' \equiv$ *"probabilidad de obtener cruz con la moneda trucada".*

a) (0.6 puntos) Calcula la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en 3 lanzamientos con su moneda equilibrada.

b) (0.6 puntos) Calcula la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con su moneda trucada.

c) (1.3 puntos) ¿Qué es más probable, que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada o que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada?

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque Inferencia Estadística)

Solución.

a) $X : \mathcal{B}(3, 0.5) \implies P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^0 = 0.125$

b) $Y : \mathcal{B}(2, 0.6) \implies P(Y = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^0 = 0.36$

c) $X : \mathcal{B}(400, 0.5) \implies \left\{ \begin{array}{c} n = 400 > 20 \checkmark \\ np = 200 > 5 \checkmark \\ nq = 200 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Yates}} W : \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right) = \mathcal{N}(200, 10)$

$$P(X < 190) = P(W \leq 189.5) = P\left(Z \leq \frac{189.5 - 200}{10}\right) = P(Z \leq -1.05)$$
$$= P(Z \geq 1.05) = 1 - P(Z \leq 1.05) = 1 - 0.8531 = 0.1469$$

$Y : \mathcal{B}(200, 0.6) \implies \left\{ \begin{array}{c} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 120 > 5 \checkmark \\ nq = 80 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Yates}} W : \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right) = \mathcal{N}(120, 6.93)$

$$P(Y < 110) = P(W \leq 109.5) = P\left(Z \leq \frac{109.5 - 120}{6.93}\right) = P(Z \leq -1.52)$$
$$= P(Z \geq 1.52) = 1 - P(Z \leq 1.52) = 1 - 0.9357 = 0.0643$$

Luego es más probable que el jugador A saque menos de 190 caras en 400 lanzamientos, que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos.

Matemáticas II

Aragón

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35 % visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) *(1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?*

b) *(1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.*

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

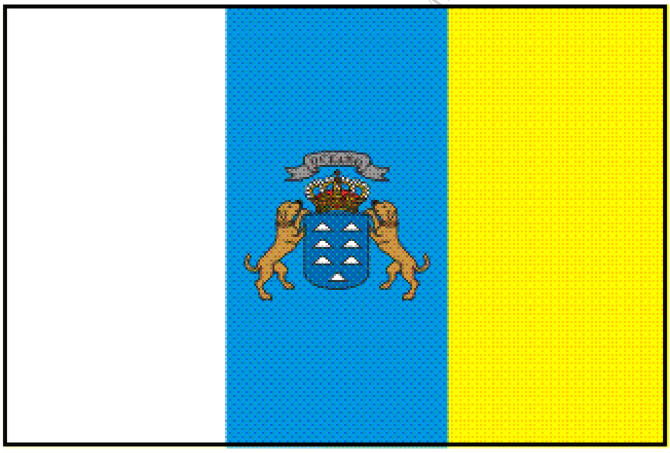
Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de turistas que visitaron Aragón”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(7, 0.35)$$

a) Como $E[X] = np = 7 \cdot 0.35 = 2.45$, es más probable que sean 2 los turistas que visitan Aragón, en lugar de 5.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^7 = 1 - 0.0490 = 0.951$

Islas Canarias



Ejercicio 11 (2.5 *puntos*)

La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones?

b) (1 punto) Se afirma que existe como mucho un 1 % de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos)?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de coches que sufren un reventón”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.04)$$

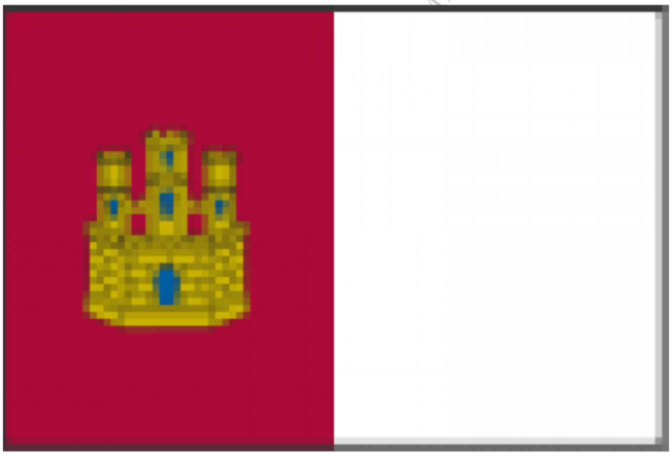
a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.04^2 \cdot 0.96^8 = 0.0519$

b) $$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.04^0 \cdot 0.96^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.04^1 \cdot 0.96^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.04^2 \cdot 0.96^8\right] \\ &= 1 - 0.9938 = 0.0062 = 0.62\,\% < 1\,\%, \text{ luego la afirmación es cierta.} \end{aligned}$$

c) $$X : \mathcal{B}(250, 0.04) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 250 > 30 \checkmark \\ np = 10 > 5 \checkmark \\ nq = 240 > 5 \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(10, 3.098)$$

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= P(Y \geq 12.5) = P\Big(Z \geq \frac{12.5 - 10}{3.098}\Big) = P(Z \geq 0.81) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.81) = 1 - 0.7910 = 0.209 \end{aligned}$$

Castilla-La Mancha



Ejercicio 12 (2.5 *puntos*)

b) *El peso de los paquetes de* 1 *kg arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de* 985 *g de media y* 25 *g de desviación típica.*

b.1) *(0.5 puntos) ¿Cuántos pesarán más de un kilo?*

b.2) *(0.75 puntos) ¿Cuánto pesará el más ligero del* 70 % *de los que más pesan?*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7257	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Junio 2022)

Solución.

b) $X \equiv$ "Peso de los paquetes de arroz (gr)" $\longrightarrow \mathcal{N}(985, 25)$

b.1) $P(X > 1000) = P\left(Z > \dfrac{1000 - 985}{25}\right) = P(Z > 0.6) = 1 - P(Z < 0.6)$

$$= 1 - 0.7257 = 0.2743$$

b.2) $P(X > a) = 0.7 \implies P\left(Z > \dfrac{a - 985}{25}\right) = 0.7$

$$\implies P\left(Z \leq -\frac{a - 985}{25}\right) = 0.7 \xrightarrow{Tabla} \frac{-a + 985}{25} = 0.525 \implies \boxed{a = 971.87 \; gr}$$

Ejercicio 13 (2.5 *puntos*)

b) (1 punto) Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Julio 2022)

Solución.

b) $X \equiv$ "Nº de carreras ganadas" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(4, 0.6)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X=0) + P(X=1)\Big]$$
$$= 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^3\right] = 0.8208$$

Nota: También podríamos haber mirado estos valores en la tabla adjunta

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X=0) + P(X=1)\Big]$$
$$= 1 - (0.0256 + 0.1536) = 0.08208$$

Ejercicio 14 (2.5 *puntos*)

b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

b.2) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

b) $X \equiv$ "Nº de repartos no entregados" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(6, 0.25)$

b.1) $P(X = 1) = \binom{6}{1} \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^5 = 0.3559$

b.2) $P(X \leq 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - P(X = 6) = 1 - \left[\binom{6}{6} \cdot 0.25^6 \cdot 0.75^0\right]$

$= 1 - 0.00024 = 0.99976$

Extremadura

Ejercicio 15 (2 *puntos*)

Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) (0.75 puntos) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos.

b) (0.75 puntos) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores.

c) (0.5 puntos) La media y la desviación típica de la distribución.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de mensajes con faltas de orgografía”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(15, 0.3)$$

a) $P(X = 5) = \binom{15}{5} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^{10} = 0.2061$

b) $$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] \\ &= 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^{13} \right. \\ &\left. + \binom{15}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^{12}\right] = 1 - 0.2969 = 0.7031 \end{aligned}$$

c) $E[X] = np = 15 \cdot 0.3 = 4.5 \quad \& \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{15 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 1.775$

Galicia

Ejercicio 16 (2 *puntos*)

> *b) (1 punto) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media* 100 *y desviación típica* 20*, y se toma la decisión de conceder la beca al* 5 % *mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

Solución.

b) $X \equiv$ "Puntuación del mérito académico" $\longrightarrow \mathcal{N}(100, 20)$

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-100}{20}\right) = 0.95 \xRightarrow{Tabla} \frac{a-100}{20} = 1.645 \implies \boxed{a = 132.9 \text{ ptos}}$$

Por lo tanto el candidato habrá de superar los 132.9 puntos.

Ejercicio 17 (2 *puntos*)

> *b) (1 punto) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)*

Solución.

b) $X \equiv$ "Nº de seises en las tiradas" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(7, 1/6)$

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.2344$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 18 (2.5 *puntos*)

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

b) (1.25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

b) Sea ahora $X \equiv$ Puntuaciones obtenidas por el aspirante. La variable X sigue una distribución:$X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) = \mathcal{N}(5.6, \sigma)$

$$P(X \leq 8.2) = 0.67 \implies P\left(Z \leq \frac{8.2 - 5.6}{\sigma}\right) = 0.67 \xrightarrow{Tabla} \frac{2.6}{\sigma} = 0.44 \implies \boxed{\sigma = 5.91}$$

Ejercicio 19 (2.5 *puntos*)

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

c) Sea X el número de arqueros que aciertan al globo $\longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.85)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \implies P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0.85^6 \cdot 0.15^4 = 0.04$$

Ejercicio 20 (2.5 *puntos*)

El delantero de un equipo de fútbol que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.

c) (1 punto) Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0.999.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{"N}^{\text{o}}\text{ de penaltis marcados"} \longrightarrow X : \mathcal{B}\left(4, \frac{3}{5} = 0.6\right)$$

a) $P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^4 = 0.0256$

b) $P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) = \binom{4}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4 + \binom{4}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^0 = 0.4752$

c) $X : \mathcal{B}(n, 0.6)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^n > 0.999 \implies 0.4^n < 0.001$$

$$n \ln 0.4 < \ln 0.001 \implies n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.4} = 7.538 \implies \boxed{n = 8}$$

Ejercicio 21 (2.5 *puntos*)

Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0.2 y 0.3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

d) (0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

d) Sea X : nº individuos con caracteríatica A & $X : \mathcal{B}(10, 0.2)$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^7 \simeq 0.2013$$

Ejercicio 22 (2.5 *puntos*)

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“N°de mujeres en el Consejo”} \Longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.277)$$

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0.277^5 \cdot 0.723^5 = 0.0812$

b) $P(X < 10) = 1 - P(X \geq 10) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0.277^{10} \cdot 0.723^0 = 0.9999$

c) $X : \mathcal{B}(200, 0.277) \sim \left\{ \begin{array}{l} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 55.4 > 5 \checkmark \\ nq = 144.6 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \sim Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = N(55.4, 6.33)$

$$\begin{aligned} 0.35 \cdot 200 = 70 \implies P(X \geq 70) = P(Y \geq 69.5) &= P\left(Z \geq \frac{69.5 - 55.4}{6.33}\right) \\ &= P(Z \geq 2.23) = 1 - P(Z < 2.23) = 1 - 0.9871 \\ &= 0.0129 \end{aligned}$$

Ejercicio 23 (2.5 *puntos*)

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un $62\,\%$ y la de que compre el producto B es de un $40\,\%$. Se observa, además, que el $12\,\%$ de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

c) $X \equiv$ "Nº de personas que compran el producto B" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(3000, 0.4)$

$$X : \mathcal{B}(3000, 0.4) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 3000 > 10 \checkmark \\ np = 1200 > 5 \checkmark \\ nq = 1800 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}\Big(np, \sqrt{npq}\Big) = \mathcal{N}(1200, 26.83)$$

$$\begin{aligned} P(X > 1250) &= P(Y \geq 1250.5) = P\left(Z \geq \frac{1250.5 - 1200}{26.83}\right) = P(Z \geq 1.88) \\ &= 1 - P(Z \leq 1.88) = 1 - 0.9699 = 0.0301 \end{aligned}$$

Ejercicio 24 (2.5 *puntos*)

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II*. Se eligen* 6 *alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:*

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II*.*

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemátcas II*.*

c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 *alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de* 60 *de estos alumnos estén matriculados en* Matemáticas II*.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

$X \equiv$ "Nº de alumnos matriculados en Matemáticas II" $\Longrightarrow X : \mathcal{B}(6, {}^3\!/_5) = \mathcal{B}(6, 0.6)$

a) $P(X=4) = \binom{6}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 = 0.311$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^6 = 0.9959$

c) $X : \mathcal{B}(120, 0.6) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 120 > 10 \checkmark \\ np = 72 > 5 \checkmark \\ nq = 48 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Longrightarrow Y : \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right) = \mathcal{N}(72, 5.37)$

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= P(Y \geq 60.5) = P\left(Z \geq \frac{60.5 - 72}{5.37}\right) = P(Z \geq -2.14) \\ &= P(Z \leq 2.14) = 0.9838 \end{aligned}$$

Ejercicio 25 (2.5 *puntos*)

El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trajar un móvil.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

d) $X \equiv$ "Nº de personas que trabajan con el móvil" $\Longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.6)$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0.6^8 \cdot 0.4^2 = 0.1209$$

Ejercicio 26 (2.5 *puntos*)

Tras reiteradas denuncias por venta de falsificaciones, la inspección aduanera decide examinar sistemáticamente las remesas de dos productos de una determinada marca de lujo. Se encuentra que por término medio el 5 % y el 2 % de las muestras respectivas resulta ser falso. Al abrir un contenedor se encuentra que el 30 % de las piezas son del producto A y el resto, del producto B.

c) (1.25 puntos) Se controla un lote de 1000 piezas del tipo A. Se toma la variable aleatoria "número de piezas falsas". Calcule la probabilidad $P(48 \leq X \leq 52)$ aproximando la distribución resultante mediante una normal.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

c) $X \equiv$ "Nº de piezas defectuosas del producto A" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(1000, 0.05)$

$$X : \mathcal{B}(1000, 0.05) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 1000 > 20 \\ np = 50 > 5 \\ nq = 950 > 5 \end{array} \right\} \xrightarrow[Moivre]{Th.} Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(50, 6.892)$$

$$\begin{aligned} P(48 \leq X \leq 52) &= P(47.5 \leq Y \leq 52.5) = P\Big(\frac{47.5 - 50}{6.892} \leq Z \leq \frac{52.5 - 50}{6.892}\Big) \\ &= P(-0.36 \leq Z \leq 0.36) = P(Z \leq 0.36) - P(Z \leq -0.36) \\ &= P(Z \leq 0.36) - P(Z \geq 0.36) = P(Z \leq 0.36) - \Big[1 - P(Z \leq 0.36)\Big] \\ &= 2P(Z \leq 0.36) - 1 = 2 \cdot 6406 - 1 = 0.2812 \end{aligned}$$

Ejercicio 27 (2.5 *puntos*)

En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

a) (1.25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 *caras numeradas del* 1 *al* 10*. Solo en caso de que también ese obtenga una puntuación mayor o igual a* 9 *en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre* 5 *ataques lanzados, se obtengan* 3 *o menos golpes críticos.*

b) (1.25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de qtaque crítico es del 20 %*. Aproximando mediante una distriución normal, calcule la probabilidad de que, de entre* 100 *ataques, se obtengan no menos de* 15 *y no más de* 25 *golpes críticos.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Sean los sucesos: $G \equiv$ "El golpe es crítico"

$C \equiv$ "Se obtiene cara en la moneda"

$D \equiv$ "Se obtiene al menos un 9 en el dado"

$$P(G) = P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = 0.1$$

$$X \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de ataques críticos”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(5, 0.1)$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - \Big[P(X = 4) + P(X = 5)\Big]$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{4} \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.1^5 \cdot 0.9^0\right] = 1 - 0.00046 = 0.99954$$

b) $$X : \mathcal{B}(100, 0.2) \implies \left\{\begin{array}{l} n = 100 > 20 \checkmark \\ np = 20 > 5 \checkmark \\ nq = 80 > 5 \checkmark \end{array}\right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(20, 4)$$

$$P(15 \leq X \leq 25) = P(14.5 \leq Y \leq 25.5) = P\left(\frac{14.5 - 20}{4} \leq Z \leq \frac{25.5 - 20}{4}\right)$$

$$= P(-1.375 \leq Z \leq 1.375) = P(Z \leq 1.375) - P(Z \leq -1.375)$$

$$= P(Z \leq 1.375) - P(Z \geq 1.375) = P(Z \leq 1.375) - [1 - P(Z \leq 1.375)]$$

$$= 2 \cdot P(Z \leq 1.375) - 1 = 2 \cdot 0.9154 - 1 = 0.8308$$

Ejercicio 28 (2.5 *puntos*)

El 65 % de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que , dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de alumnos que superan el práctico a la primera”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.65)$$

a) $P(\text{“Tres no aprueban a la primera”}) = P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0.65^7 \cdot 0.35^3 = 0.2522$

b) $P(\text{“Alguno no aprueba a la primera”}) = P(X < 10) = 1 - P(X \geq 10)$

$$= 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0.65^{10} \cdot 0.35^0 = 0.9865$$

c) $X : \mathcal{B}(60, 0.65) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 60 > 20 \checkmark \\ np = 39 > 5 \checkmark \\ nq = 21 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}\Big(np, \sqrt{npq}\Big) = \mathcal{N}(39, 3.69)$

$$P(X \geq 30) = P(Y \geq 29.5) = P\Big(Z \geq \frac{29.5 - 39}{3.69}\Big) = P(Z \geq -2.57)$$

$$= P(Z \leq 2.57) = 0.9949$$

Ejercicio 29 (2.5 *puntos*)

Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85 % en tiros libres y del 20 % en tiros desde el centro del campo.

a) (1.5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?

b) (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20 % de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de tiros libres encestados" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(4, 0.85)$

$Y \equiv$ "Nº de tiros desde el centro del campo encestados" $\longrightarrow Y : \mathcal{B}(4, 0.2)$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0.85^3 \cdot 0.15^1 = 0.3685$$

$$P(Y = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^1 = 0.0256$$

$$P(X = 3 \cap Y = 3) = P(X = 3) \cdot P(Y = 3) = 0.3685 \cdot 0.0256 = 0.0094$$

b) $X \equiv$ "Nº de tiros libres fallados" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(200, 0.15)$

$$X : \mathcal{B}(200, 0.15) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 30 \checkmark \\ nq = 170 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(30, 5.05)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.2 \cdot 200) &= P(X \geq 40) = P(Y \geq 39.5) = P\Big(Z \geq \frac{39.5 - 30}{5.05}\Big) \\ &= P(Z \geq 1.88) = 1 - P(Z \leq 1.88) = 1 - 0.9699 = 0.0301 \end{aligned}$$