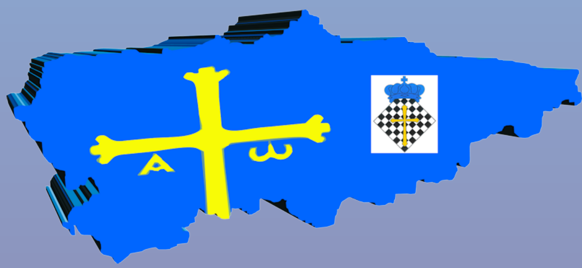
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

a) *(1.25 puntos) Calcula todas las matrices* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *tales que* $A \cdot X = 2X$.

b) *(1.25 puntos) Calcula todas las matrices* M *que cumplen* $M \cdot (B + I) = 2I$. *(I es la matriz identidad 2×2).*

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) $A \cdot X = 2X \implies A \cdot X - 2X = \mathcal{O} \implies (A - 2I) \cdot X = \mathcal{O}$

Resolvemos el sistema homogéneo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[F_3 + F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow -x + 0 + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

b) $M \cdot (B+I) = 2I \Rightarrow M \cdot \underbrace{(B + I) \cdot (B + I)^{-1}}_{I} = 2I \cdot (B+I)^{-1} \implies \boxed{M = 2 \cdot (B + I)^{-1}}$

$$B + I = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|B + I| = -2 \neq 0 \implies \exists (B + I)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M = 2 \cdot (B + I)^{-1} = \cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \implies \boxed{M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *(0.75 puntos) Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto $A \cdot D \cdot B$.*

b) *(0.5 puntos) Estudia si puede existir una matriz M tal que $M \cdot A = B$.*

c) *(1.25 puntos) Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.*

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) $\underbrace{A}_{3\times 2} \cdot \underbrace{D}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{2\times 3} \xrightarrow[n=2]{m=2} D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$

b) $\underbrace{\underbrace{M}_{m\times n} \cdot \underbrace{A}_{3\times 2}}_{m\times 2} = \underbrace{B}_{2\times 3}$. Para poder operar $M \cdot A \implies n = 3$, pero $M \cdot A \in \mathcal{M}_{m\times 2}$, mientras que $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}$, por lo que $\nexists M \mid M \cdot A = B$

c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |B \cdot A| = 9 \neq 0 \Rightarrow \exists (B \cdot A)^{-1}$

$$(B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{(B \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 \quad \& \quad g(x) = x^2 + x - 1$ *se pide:*

a) (1.25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones.

b) (1.25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

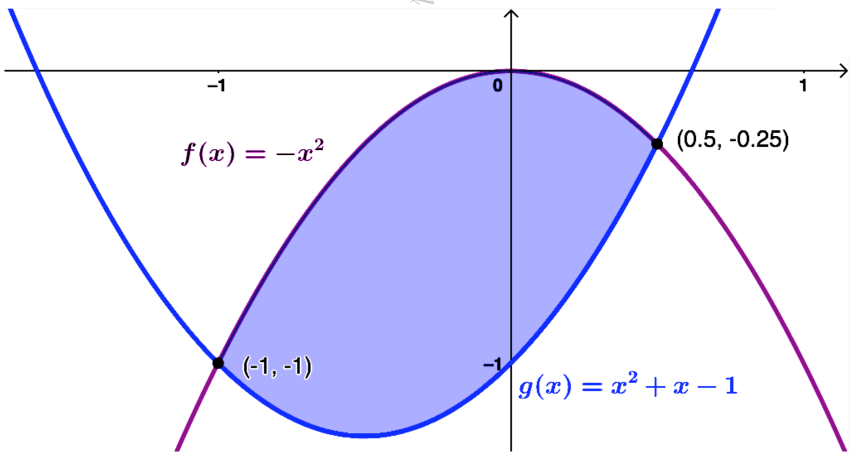
Solución.

a) Estudiamos ambas gráficas:

- $f(x) = -x^2$ es una parábola *cóncava* ($\cap$), que corta al eje OX en (0,0), donde tiene su vértice.
- $g(x) = x^2+x-1$ es una parábola *convexa* ($\cup$), que corta al eje OX en $(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, 0)$, con vértice en $(-1/2, -5/4)$.

Ambas funciones se cortan en:

$$f(x) = g(x) \implies -x^2 = x^2 + x - 1 \implies 2x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{x=\{-1,1/2\}} \begin{cases} (-1,-1) \\ (1/2, -1/4) \end{cases}$$



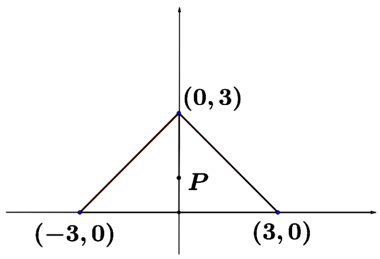
b) El área comprendida en el recinto será:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1/2} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-1}^{1/2} \left[-x^2 - (x^2 + x - 1)\right] dx = \int_{-1}^{1/2} \left(-2x^2 - x + 1\right) dx$$

$$= -\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \Big]_{-1}^{1/2} = \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{7}{24} + \frac{5}{6} = \frac{9}{8}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

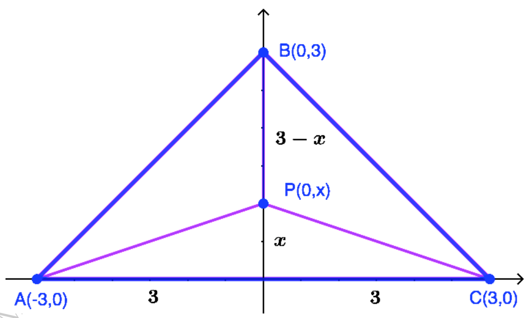
Solución.

$$d(x) = 2d(A,P) + d(B,P) = 2\sqrt{9+x^2} + 3 - x$$

$$d'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{9+x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}} = 0$$

$$\implies 2x = \sqrt{9+x^2} \implies 4x^2 = 9 + x^2$$

$$\implies x^2 = 3 \implies \begin{cases} \cancel{x = -\sqrt{3}} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$



	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, 3\right)$
Signo $d'(x)$	-	+
$d(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La distancia $d(x)$ tiene un *mínimo* para $x = \sqrt{3} \implies P(0, \sqrt{3})$ y vale $d(\sqrt{3}) = 3 + 3\sqrt{3}$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

> Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax + 2y + (a-3)z = 4$,
>
> a) (1.25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula la distancia de r a π.
>
> b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
>
> (Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 1 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} R(2,-1,1) \\ \vec{d_r} = (1,-1,0) \end{cases}$$

a) $$r \parallel \pi \iff \begin{cases} \vec{d_r} \perp \vec{n_\pi} \implies \vec{d_r}\cdot\vec{n_\pi} = 0 \\ R \notin \pi \implies 2a - 2 + a - 3 \neq 4 \implies a \neq 3 \end{cases}$$

$$\vec{d_r}\cdot\vec{n_\pi} = (1,-1,0)\cdot(a,2,a-3) = a - 2 = 0 \implies \boxed{a = 2}$$

$$\text{Si} \overset{a=2}{\Longrightarrow} \pi \equiv 2x + 2y - z = 4 \quad \& \quad d(r,\pi) = d(R,\pi) = \frac{|4-2-1-4|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-3|}{3} = 1\ u$$

b) Para $a = 1 \implies \pi \equiv x + 2y - 2z - 4 = 0$

$$\pi' \equiv \begin{cases} r \in \pi' \\ \pi' \perp \pi \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} R(2,-1,1) \\ \left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{d_r} = (1,-1,0) \\ \vec{v} = \vec{n_\pi} = (1,2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n_{\pi'}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (2,2,3) \end{cases}$$

$$\pi' \equiv 2x+2y+3z+D = 0 \overset{R\in\pi'}{\Longrightarrow} 4-2+3+D = 0 \overset{D=-5}{\Longrightarrow} \boxed{\pi' \equiv 2x + 2y + 3z - 5 = 0}$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Dados los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (-1,4,-4)$,

a) (1.5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos.

b) (0.5 puntos) Calcula la distancia de A a π.

c) (0.5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) El plano que hace que A y B sean simétricos es su plano mediador:

$$\pi \equiv \begin{cases} M_{AB} = \dfrac{A+B}{2} = (0,2,-2) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} = (-2,4,-4) \approx (-1,2,-2) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv -x + 2y - 2z + D = 0$$

$$\Longrightarrow M_{AB} \in \pi \Longrightarrow 0 + 4 + 4 + D = 0 \xrightarrow{D=-8} \boxed{\pi \equiv -x + 2y - 2z - 8 = 0}$$

b) $d(A,\pi) = d(A, M_{AB}) = \left|\overrightarrow{AM}_{AB}\right| = |(-1,2,-2)| = \sqrt{1+4+4} \Longrightarrow \boxed{d(A,\pi) = 3\ u}$

c) $$s \equiv \begin{cases} A(1,0,0) \\ \vec{d}_s = \overrightarrow{AB} = (-2,4,-4) \approx (-1,2,-2) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{s \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-2}}$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0.5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

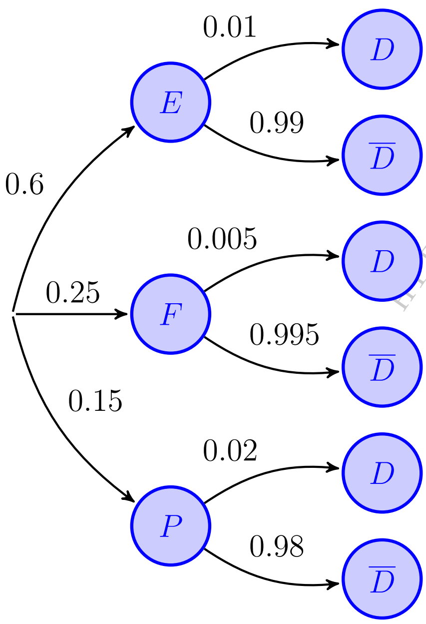
b) (1.25 puntos) Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
E &\equiv \text{“La unidad se produce en España”}\\
F &\equiv \text{“La unidad se produce en Francia”}\\
P &\equiv \text{“La unidad se produce en Portugal”}\\
D &\equiv \text{“La unidad elegida tiene un defecto”}
\end{aligned}
$$



a) $$
\begin{aligned}
P(D) &= P\Big((E\cap D)\cup(F\cap D)\cup(P\cap D)\Big)\\
&= P(E\cap D)+P(F\cap D)+P(P\cap D)\\
&= P(E)\cdot P(D\mid E)+P(F)\cdot P(D\mid F)\\
&+ P(P)\cdot P(D\mid P) = 0.6\cdot 0.01\\
&+ 0.25\cdot 0.005 + 0.15\cdot 0.02 = 0.0102
\end{aligned}
$$

b) $$
P(P\mid D) = \frac{P(P\cap D)}{P(D)} = \frac{P(P)\cdot P(D\mid P)}{P(D)} = \frac{0.15\cdot 0.02}{0.0102} = 0.2932
$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 *puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media* 70 *y desviación típica* 10, *calcule:*

a) (1.25 puntos) La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo $[75, 85]$.

b) (1.25 puntos) Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 *puntos es* 0.05. *Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.*

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Calificación del test (puntos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(70, 10)$$

a) $P(75 \leq X \leq 85) = P\left(\dfrac{75-70}{10} \leq Z \leq \dfrac{85-70}{10}\right) = P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$

$= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq 0.5) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad P(X > 90) = 0.05$

$P(X > 90) = P\left(Z > \dfrac{90-\mu}{10}\right) = 0.05 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{90-\mu}{10}\right) = 0.95$

$\xRightarrow{Tabla} \dfrac{90-\mu}{10} = 1.645 \Longrightarrow \boxed{\mu = 73.55}$

Por lo tanto la media ha aumentado.