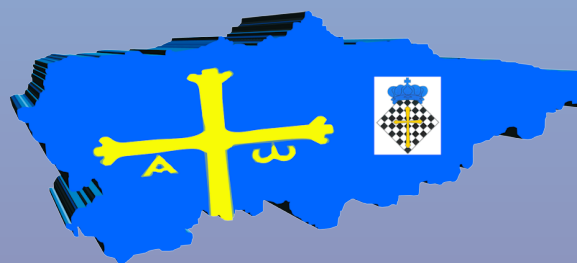


MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

$$\text{Sea } a \in \mathbb{R} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- a) (0.75 puntos) Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a .
- b) (1 punto) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.
- c) (0.75 puntos) Para $a = 1$, calcula $\det(M)$ sabiendo que $P \cdot M = M^2$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $|P| = 2a - 4 = 0 \implies a = 2$

▪ Si $a \neq 2$ $|P| \neq 0 \implies \text{ran}(P) = 3$

▪ Si $a = 2$ $|P| = 0 \implies \text{ran}(P) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(P) = 2$

b) Si $a = 1$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ & $|P| = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \neq 0 \implies \exists P^{-1}$

$$\text{Adj}P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot \text{Adj}P^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $|P \cdot M| = |M^2| \implies |P| \cdot |M| = |M|^2 \implies |M| \cdot (|M| - |P|) = 0 \implies \begin{cases} |M| = 0 \\ |M| = |P| = -2 \end{cases}$

o

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discute el sistema según los valores de a .
- b) (0.75 puntos) Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.
- c) (0.75 puntos) Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$.
Calcula la solución en ese caso.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = 6 + 2a = 0 \implies a = -3$$

- Si $a \neq -3$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

- b) Resolvemos el sistema para $a = -3$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \implies x = \lambda \\ \implies \lambda - (1 - 2\lambda) - 3z = -1 \\ \implies 2\lambda + y = 1 \end{array} \implies \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}$$

c) Si hay una solución con $x = 1$ ha de verificar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} 1 - y + az = -1 \xrightarrow{\substack{y=-1 \\ z=1}} a = -3 \\ 2 + y = 1 \implies y = -1 \\ y + 2z = 1 \xrightarrow{y=-1} z = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto para $a = -3$, la solución sería $x = 1$ & $y = -1$ & $z = 1$.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Sean $A, B \in \mathbb{R}$ & $f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.
- (1.25 puntos) Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.
- (0.5 puntos) Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1} \quad \& \quad f'(x) = \frac{2x \cdot (Bx - 1) - B \cdot (x^2 + A)}{(Bx - 1)^2} = \frac{Bx^2 - 2x - AB}{(Bx - 1)^2}$$

- Pasa por $(0, -3) \implies f(0) = -3 \implies \frac{A}{-1} = -3 \implies \boxed{A = 3}$
 - E. rel $x = -1 \implies f'(-1) = 0 \implies \frac{B + 2 - AB}{(-B - 1)^2} = 0 \xrightarrow{A=3} 2 - 2B = 0 \implies \boxed{B = 1}$

$$\text{b) Para } A = 3 \text{ y } B = 1 \implies f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} \quad \& \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

- Dominio: $x - 1 = 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- A. Vertical: \exists A.V. en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

- A. Horizontal: $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \implies \nexists$ A.H.
- A. Oblicua: $y = mx + n \implies \exists$ A.O. en $y = x + 1$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{x - 1}$$

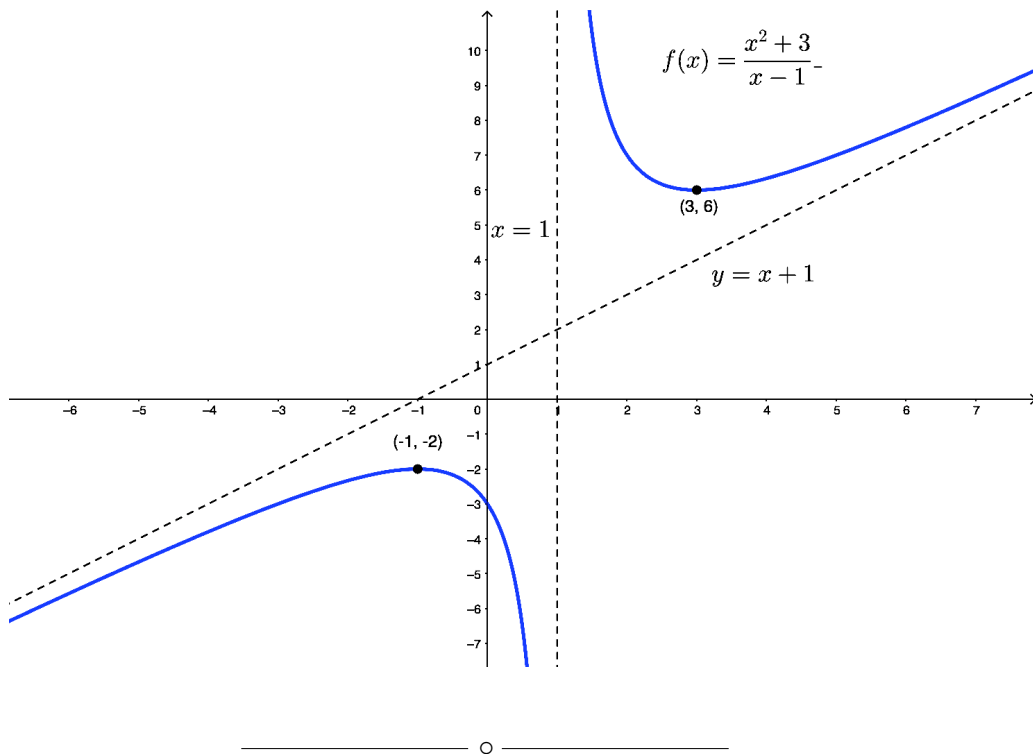
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3+x}{x-1} = 1$$

■ E. rel. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = \{-1, 3\}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1) \cup (1, 3)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(3, 6)$ y un *máximo relativo* en $(-1, -2)$.

c) Recopilamos los resultados obtenidos para esbozar la gráfica de la función:



Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Se considera la función $f(x) = x \cdot e^{2x^2}$. Se pide:

- a) (1.5 puntos) Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0, -1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$).
- b) (1 punto) Calcula el área encerrada por la gráfica de f , las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$\text{a) } F(x) = \int f(x) dx = \int x \cdot e^{2x^2} dx = \frac{1}{4} \int \underbrace{4x}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x^2}}_{e^u} dx = \frac{1}{4} \cdot e^{2x^2} + C$$

$$F(0) = -1 \implies \frac{1}{4} + C = -1 \implies C = -\frac{5}{4} \implies \boxed{F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{2x^2} - \frac{5}{4}}$$

- b) $f(x) = x \cdot e^{2x^2} = 0 \implies x = 0$. La función define entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$ un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 x \cdot e^{2x^2} dx = \left. \frac{1}{4} \cdot e^{2x^2} \right|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot e^2 - \frac{1}{4}$$
$$\text{Área} = |A_1| = \frac{1}{4} \cdot e^2 - \frac{1}{4} \simeq 1.597 \text{ u}^2$$

_____○_____

Ejercicio 5 (2.5 puntos)

Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \frac{y - 2}{-1} = z$, r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$.

- (1 punto) Indica la posición relativa de r y s .
- (0.75 puntos) Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s .
- (0.75 puntos) Calcula la distancia entre las rectas r y s .

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} A(1, 0, 1) \\ \vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(2, 2, 0) \\ \vec{d}_s = (1, -1, 1) \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{AS} = (1, 2, -1)$$

a) $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \implies \vec{d}_r \not\parallel \vec{d}_s \implies r$ y s se cortan o se cruzan

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{AS}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $\pi \equiv \begin{cases} \pi \parallel r \\ s \in \pi \end{cases} \equiv \begin{cases} S(2, 2, 0) \\ \vec{u} = \vec{d}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{v} = \vec{d}_s = (1, -1, 1) \end{cases} \implies \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2) \approx (1, 0, -1)$

$$x - z + D = 0 \implies S \in \pi \implies 2 + D = 0 \implies D = -2 \implies \boxed{\pi \equiv x - z - 2 = 0}$$

c) $d(r, s) = \frac{|[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{AS}]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{|4|}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2} u$

————— o —————

Ejercicio 6 (2.5 puntos)

Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$ & $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$.

- (0.75 puntos) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .
- (1 punto) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .
- (0.75 puntos) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$\text{a) } r \equiv \pi \cap \pi' \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} R(3, 0, 0) \\ \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } r \equiv \begin{cases} r \perp \pi \\ A \in r \end{cases} \equiv \begin{cases} A(2, 1, 6) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1, 1, 1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

$$P = r \cap \pi \implies 2 + \lambda + 1 + \lambda + 6 + \lambda = 3 \implies \lambda = -2 \implies \boxed{P(0, -1, 4)}$$

$$\text{c) } P = M_{AA'} = \frac{A + A'}{2} \implies A' = 2P - A = 2 \cdot (0, -1, 4) - (2, 1, 6) \implies \boxed{A'(-2, -3, 2)}$$

_____ o _____

Ejercicio 7 (2.5 puntos)

Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60% de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6% de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9% son defectuosas. Se toma una caja al azar:

- (1.25 puntos) Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.
- (1.25 puntos) Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

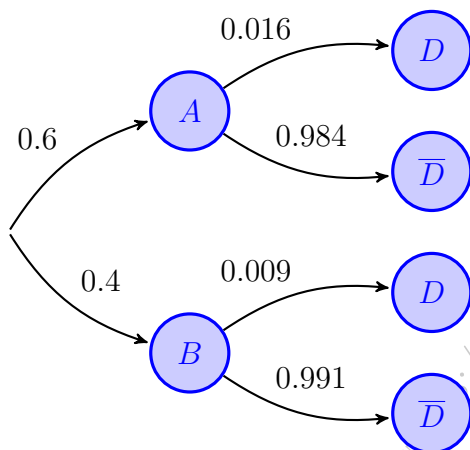
Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La tinta se compra en la empresa A"

$B \equiv$ "La tinta se compra en la empresa B"

$D \equiv$ "La caja de tinta es defectuosa"



$$\begin{aligned} \text{a) } P(D) &= P((A \cap D) \cup (B \cap D)) \\ &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= P(A) \cdot P(D | A) + P(B) \cdot P(D | B) \\ &= 0.6 \cdot 0.016 + 0.4 \cdot 0.009 = 0.0132 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A | \bar{D}) &= \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{D} | A)}{1 - P(D)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.984}{1 - 0.0132} = 0.5982 \end{aligned}$$

o

Ejercicio 8 (2.5 puntos)

Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $\mathcal{N}(5, 2)$.

- (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.
- (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.
- (1 punto) Se modifica el sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$X \equiv$ "Calificaciones de Análisis Matemático I" $\rightarrow X : \mathcal{N}(5, 2)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \geq 7.5) &= P\left(Z \geq \frac{7.5 - 5}{2}\right) = P(Z \geq 1.25) = 1 - P(Z < 1.25) = 1 - 0.8944 \\ &= 0.1056 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(3 \leq X \leq 5) &= P\left(\frac{3 - 5}{2} \leq Z \leq \frac{5 - 5}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0) \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z < 1)] = 0.5 - (1 - 0.8413) = 0.3413 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathcal{N}(\mu, 1.5) \quad \& \quad P(X \leq 6) = 0.52$$

$$P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6 - \mu}{1.5}\right) = 0.52 \xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{6 - \mu}{1.5} = 0.05 \implies \boxed{\mu = 5.925}$$

Por lo tanto el nuevo sistema de enseñanza ha conseguido aumentar la nota media en 0.925 puntos, luego ha funcionado.

_____ o _____