MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = a \\ -x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

I) *(1.25 puntos) Determine para qué valores de a el sistema es compatible.*

II) *(1.25 puntos) Dado $a = 4$, resuelva el sistema anterior si es posible.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

I) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$|A| = 5 \neq 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

Por lo tanto no hay ningún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema sea incompatible.

II) Resolvemos el sistema para $a = 4$, por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 3 \cdot (-2) - 1 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 1 = 9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}$.

I) *(0.5 puntos) Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de* $f(x)$.

II) *(1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

III) *(1 punto) Determine si* $f(x)$ *tiene asíntotas. En caso afirmativo, calcúlelas.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

I) $x = 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, luego hay un punto de discontinuidad en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x + 2}{x} = \left[\frac{2}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Luego en $x = 0$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

II) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\cdot x - (x^2 - x + 2)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2}{x^2} = 0 \implies x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$

	$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $\left(\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}\right)$ y un *máximo relativo* en $\left(-\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2}\right)$.

III)
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = 0$ (visto en apdo. I))
- A. Horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \underset{x\to\pm\infty}{\nexists\, A.H.}$
- `A. Oblicua:` $y = mx + n \implies \underset{x\to\pm\infty}{\exists\, A.O.}$ en $y = x - 1$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - x + 2 - \cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x + 2}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-1}{1} = -1$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A(0,0,1)$, $B(4,1,2)$ y $C(3,4,3)$.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$r = \overline{AB} \implies r \equiv \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{AB} = (4,1,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s = \overline{AC} \implies s \equiv \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{d_s} = \overrightarrow{AC} = (3,4,2) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$t = \overline{BC} \implies t \equiv \begin{cases} B(4,1,2) \\ \vec{d_t} = \overrightarrow{BC} = (-1,3,1) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

—— ○ ——

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En cierta región, el 72 % de las mujeres vive al menos 71 años y el 52 % vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La mujer vive al menos 71 años”}$$
$$B \equiv \text{“La mujer vive al menos 80 años”}$$

Del enunciado tenemos

$$P(A) = 0.72 \qquad \& \qquad P(B) = 0.52$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.52}{0.72} = 0.7222$$

—— ○ ——

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

I) *(0.5 puntos) Calcule el determinante de A en función del parámetro a.*

II) *(0.75 puntos) Calcule el rango de A en función del parámetro a.*

III) *(0.5 puntos) Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.*

IV) *(0.75 puntos) Sea B el conjunto de los $a \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $a \in B$.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

I) $|A| = 2a - 11$

II) $|A| = 2a - 11 = 0 \implies a = {}^{11}\!/_{2}$

- Si $a \neq {}^{11}\!/_{2} \implies |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3$
- Si $a = {}^{11}\!/_{2} \Rightarrow |A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

III) $\exists\, A^{-1} \iff |A| \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \neq {}^{11}\!/_{2}$

IV) $\operatorname{Adj}A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 2 \\ -1+a & -1-2a & -3 \\ -3 & -3+2a & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 2a - 11$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj}A^{\top} = \frac{1}{2a-11} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1+a & -3 \\ 8 & -1-2a & -3+2a \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = x^3 + 1$.

I) *(0.5 puntos) Calcule una primitiva de $f(x)$.*

II) *(1 punto) Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.*

III) *(1 punto) Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

I) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^3+1)\,dx = \dfrac{x^4}{4} + x + C$

II) $f'(x) = 3x^2 \quad \& \quad f''(x) = 6x \quad \& \quad f'''(x) = 6$

$f''(x) = 6x = 0 \implies x = 0 \quad \& \quad f'''(0) = 6 \neq 0 \implies$ Punto de Inflexión en $(0, 1)$

III) $f(x) = x^3 + 1 = 0 \implies x = -1$, luego entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se define un único recinto de integración $A_1 : (1, 2)$

$A_1 = \int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = (4+2) - \left(\dfrac{1}{4} + 1\right) = \dfrac{19}{4}$

Área $= |A_1| = \dfrac{19}{4} = 4.75\ u^2$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Considere los planos

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + 5z = a \qquad \& \qquad \pi_2 \equiv bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros a, $b \in \mathbb{R}$. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π_1 y π_2:

I) (0.5 puntos) Sean coincidentes. En caso afirmativo dé un valor para a y b.

II) (1 punto) Sean paralelos. En caso afirmativo dé un valor para a y b.

III) (1 punto) Se corten en una recta. En caso afirmativo dé un valor para a y b.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

I) $$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{5}{-5} = \frac{a}{4} \Rightarrow \begin{cases} 6 = -3b \Rightarrow \boxed{b = -2} \\ 15 = 15 \checkmark \\ 20 = -5a \Rightarrow \boxed{a = -4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - 3y + 5z = -4 \\ \pi_2 \equiv -2x + 3y - 5z = 4 \end{cases}$$

II) $$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{5}{-5} \neq \frac{a}{4} \Rightarrow \begin{cases} 6 = -3b \Rightarrow \boxed{b = -2} \\ 15 = 15 \checkmark \\ 20 \neq -5a \xRightarrow{a \neq -4} \boxed{a = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - 3y + 5z = 1 \\ \pi_2 \equiv -2x + 3y - 5z = 4 \end{cases}$$

III) $$\frac{2}{b} \neq \frac{-3}{3} = \frac{5}{-5} \Rightarrow \begin{cases} 6 \neq -3b \Rightarrow b \neq -2 \Rightarrow \boxed{b = 1} \\ 15 = 15 \checkmark \\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - 3y + 5z = 1 \\ \pi_2 \equiv x + 3y - 5z = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.25$.

I) *(0.5 puntos) Calcule $P(A \cup B)$.*

II) *(0.5 puntos) Calcule $P(\overline{A})$ y $P(\overline{B})$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.*

III) *(1 punto) Razone si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.*

IV) *(0.5 puntos) Calcule $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(B) = 0.25 \quad \& \quad P(A \cap B) \overset{A \text{ y } B}{\underset{\text{Indep.}}{=}} P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$$

I) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.25 - 0.125 = 0.625$

II) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.25 = 0.75$

III) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.625 = 0.375$ $P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.5 \cdot 0.75 = 0.375 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) \implies$ los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

IV) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.125 = 0.875$