MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (0.5 puntos) Calcule $A^\top$, donde $A^\top$ denota la traspuesta de la matriz A.

b) (2 puntos) Calcule $(3B - 2C) \cdot (A^\top - I)$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$3B - 2C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^\top - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3B - 2C) \cdot (A^\top - I) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -9 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 19 \\ -8 & -29 & -8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

a) *(0.5 puntos) Calcule el dominio de definición de* $f(x)$.

b) *(0.75 puntos) Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de* $f(x)$. *En caso afirmativo, calcúlelos.*

c) *(0.5 puntos) Calcule los cortes de* $f(x)$ *con los ejes.*

d) *(0.75 puntos) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de* $f(x)$.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $x-2=0 \implies x=2 \implies \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

b) $f'(x)=\dfrac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=\dfrac{-3}{(x-2)^2}=0 \implies \nexists$ Sol. $\implies \nexists$ Puntos críticos

Como $f'(x)<0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \implies$ la función es *decreciente* en su dominio.

c) $\texttt{OX}$: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}=0 \implies x+1=0 \implies x=-1 \implies (-1,0)$

$\texttt{OY}$: $x=0 \implies y=\dfrac{1}{-2} \implies (0,-1/2)$

d) $f''(x)=\dfrac{6}{(x-2)^3}\neq 0 \implies \nexists$ Puntos de inflexión.

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* ($\cap$) en $(-\infty,2)$ y *convexa* ($\cup$) en $(2,+\infty)$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

a) *(1.5 puntos) Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto* $(2,-1,0)$. *Es decir, de aquellas que tienen vector director* (v_1, v_2, v_3), *donde* v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}$ *son parámetros.*

b) *(1 punto) De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director* $(-1,4,1)$.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $$r \equiv \begin{cases} R(2,-1,0) \\ \vec{d}_r = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda v_1 \\ y = -1 + \lambda v_2 \\ z = \lambda v_3 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $$s \equiv \begin{cases} S(2,-1,0) \\ \vec{d}_s = (-1,4,1) \end{cases} \Longrightarrow \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Cierto test determina si una persona consume cierto tipo de droga. En el 99 % de los casos, el test clasifica como usuario de la droga a aquellos que la han consumido y también en el 99 % de los casos, el test clasifica como no usuarios de la droga a aquellos que no la han consumido. Además, el 0.5 % de las personas a las que se les va a pasar el test consumen la droga.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga?

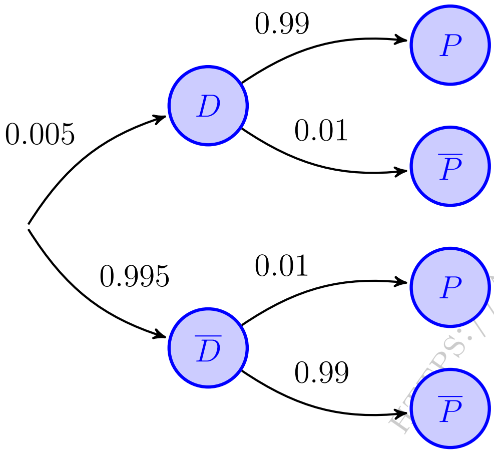
b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona consuma la droga si ha dado positivo en el test?

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$D \equiv \text{“La persona consume droga”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en consumo de drogas”}$$



a) $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.005 = 0.995$

b)
$$\begin{aligned} P(P) &= P\Big((D \cap P) \cup (\overline{D} \cap P)\Big) \\ &= P(D \cap P) + P(\overline{D} \cap P) \\ &= P(D) \cdot P(P \mid D) + P(\overline{D}) \cdot P(P \mid \overline{D}) \\ &= 0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.01 = 0.0149 \end{aligned}$$

$$P(D \mid P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{P(D) \cdot P(P \mid D)}{P(P)} = \frac{0.005 \cdot 0.99}{0.0149} = 0.3322$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

a) (0.75 puntos) Calcule el rango de A *para los distintos valores del parámetro* $b \in \mathbb{R}$.

b) (0.75 puntos) Determine para qué valores de $b \in \mathbb{R}$ *la matriz* A *tiene inversa.*

c) (1 punto) Sea B *el conjunto formado por los* $b \in \mathbb{R}$ *tales que* A *tiene inversa. Calcule la inversa de* A *para los diferentes valores del parámetro* $b \in B$.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $|A| = b - 4 = 0 \implies b = 4$

- Si $b \neq 4 \implies |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$
- Si $b = 4 \implies |A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 2 \implies \operatorname{ran}(A) = 1$

b) $\exists A^{-1} \iff |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1} \iff b \neq 4$

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{b-4} \cdot \begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) (0.75 puntos) Calcule una primitiva de $f(x)$.

b) (1.75 puntos) Calcule el área del recinto del plano limitado por $f(x)$ *y el eje* OX *de abscisas para* $x \in [0, 2\pi]$.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x = 0 \implies x = \{0, \pi\}$, luego entre $[0, 2\pi]$ se definen dos recintos de integración $A_1 : (0, \pi)$ y $A_2 : (\pi, 2\pi)$

$$A_1 = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi) - F(\pi) = -\cos 2\pi + \cos\pi = -1 - 1 = -2$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = 2 + 2 = 4\ u^2$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Considere el par de rectas

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcule la posición relativa de las dos rectas.

b) (0.5 puntos) Dé la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) (1 punto) Dé la ecuación de un plano ortogonal a la recta r.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,-5,0) \\ \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-3,0) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} S(0,-1/2,0) \\ \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-6,0) \approx (1,3,0) \end{cases}$$

a) $\dfrac{-1}{1} = \dfrac{-3}{3} = \dfrac{0}{0} \implies \vec{d}_r \parallel \vec{d}_s \implies r \equiv s$ o $r \parallel s$

$¿R \in s? \implies \begin{cases} 0 - 2\cdot(-5) \neq 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies R \notin s \implies r$ y s son paralelas

b) $\pi \equiv \begin{cases} R(0,-5,0) \\ \vec{u} = \vec{d}_r = (-1,-3,0) \approx (1,3,0) \\ \overrightarrow{RS} = (0, 9/2, 0) \approx (0,1,0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+5 & z \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv z = 0}$

c) Hay infinitos planos que cumplen el enunciado. Hallamos el que pasa por $O(0,0,0)$

$$\pi' \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{n}_{\pi'} = \vec{d}_r = (1,3,0) \end{cases} \implies \pi \equiv x + 3y + D = 0 \xrightarrow{O\in\pi'} D = 0$$

$$\implies \boxed{x + 3y = 0}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

En una población determinada la altura de los niños de 17 años sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 7.41.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que en dicha población la altura de un niño de 17 años esté entre 170 cm y 180 cm.

b) (1.5 puntos) A partir de qué altura un niño de 17 años de dicha población se encontraría dentro del 5 % de niños de 17 años más altos de dicha población?

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de los niños de 17 años (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(175, 7.41)$$

a)
$$\begin{aligned} P(170 \leq X \leq 180) &= P\left(\frac{170-175}{7.41} \leq Z \leq \frac{180-175}{7.41}\right) = P(-0.67 \leq Z \leq 0.67) \\ &= P(Z \leq 0.67) - P(Z \leq -0.67) = P(Z \leq 0.67) - P(Z \geq 0.67) \\ &= P(Z \leq 0.67) - \left[1 - P(Z \leq 0.67)\right] = 2P(Z \leq 0.67) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.7486 - 1 = 0.4972 \end{aligned}$$

b)
$$P(X \geq a) = 0.05 \implies P(X \leq a) = 1 - 0.05 = 0.95 \implies P\left(Z \leq \frac{a-175}{7.41}\right) = 0.95$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{a-175}{7.41} = 1.645 \implies \boxed{a = 187.19\ cm}$$