MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)
Bloque Análisis

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \quad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) *(0.75 puntos) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados.*

b) *(0.75 puntos) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta.*

c) *(0.5 puntos) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades?*

d) *(0.5 puntos) Si el producto se vende a 2 € la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienen los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta.*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) $TVM(0,6) = \dfrac{V(6)-V(0)}{6-0} = \dfrac{4.0909-0}{6} = 0.6818$

$TVM(6,12) = \dfrac{V(12)-V(6)}{12-6} = \dfrac{4.7368-4.0909}{6} = 0.1077$

En el primer semestre ha habido una venta media de 681.8 unidades por mes, mientras que en el segundo semestre la venta media ha decrecido hasta las 107.7 unidades.

b) $8+t^2 = 0 \implies \nexists$ Sol. $\implies \text{Dom}(f) = [0,+\infty)$

$V'(t) = \dfrac{10t\cdot(8+t^2) - 5t^2\cdot 2t}{(8+t^2)^2} = \dfrac{80t}{(8+t^2)^2} \geq 0 \ \forall t \in [0,+\infty) \implies$ Por lo tanto las ventas son crecientes en todo su dominio.

c) $V(t) = \dfrac{5t^2}{8+t^2} = 4 \implies t^2 = 32 \implies \begin{cases} \cancel{t = -4\sqrt{2}} \\ t = 4\sqrt{2} \simeq 5,66 \end{cases}$

Por lo tanto se producen unas ventas de 4000 unidades entre los meses 5 y 6.

d) $\mathcal{I}(t) = 2\cdot V(t) = \dfrac{10t^2}{8+t^2}$ (ingresos en miles €)

$\lim\limits_{x\to+\infty} I(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10t^2}{8+t^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{10}{1} = 10$

Luego con el paso del tiempo los ingresos tienden a estabilizarse en 10000€ al mes.

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Resolver los siguientes apartados:

a) (1 punto) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \frac{3}{2}$$

b) (1.5 puntos) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x \cdot \sqrt{2x-1}\, dx$

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

a) $$\lim_{x \to -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to -2} \frac{2kx}{2x+6} = \frac{-4k}{2} = \frac{3}{2} \xRightarrow{-4k=3} \boxed{k = -3/4}$$

b) $$\int x \cdot \sqrt{2x-1}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{1+u^2}{2} \\ dx = u\, du \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{1+u^2}{2} \cdot u \cdot u\, du = \frac{1}{2} \int u^2 + u^4\, du = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + C$$

$$= \frac{u}{30} \cdot (5u^2 + 3u^4) + C = \frac{\sqrt{2x-1}}{30} \cdot \left[5 \cdot (2x-1) + 3 \cdot (2x-1)^2\right] + C$$

$$= \frac{\sqrt{2x-1}}{30} \cdot \left[12x^2 - 2x - 2\right] + C = \frac{\sqrt{2x-1}}{15} \cdot \left(6x^2 - x - 1\right) + C$$

Bloque Algebra

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x+ky+2z=k \\ 2x+ky-z=2 \\ kx-y+2z=k \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Discutir la compatibilidad del sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $k=2$.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 2 & k \\ 2 & k & -1 & 2 \\ k & -1 & 2 & k \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3k^2-6k-3 = -3\cdot(k+1)^2 = 0 \implies k=-1$$

- Si $k \neq -1 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k=-1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

$\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k=2$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2+2F_1 \\ F_3+2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3-F_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -x+2\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{3}=2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6y+3\cdot\frac{2}{3}=6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 9z=6 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x={}^2/_3 \\ y={}^2/_3 \\ z={}^2/_3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Resolver la ecuación matricial: $AX + B^\top = A^2$, *siendo:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

a) $AX + B^\top = A^2 \implies AX = A^2 - B^\top \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot \left(A^2 - B^\top\right)$

$$\implies \boxed{X = A^{-1} \cdot \left(A^2 - B^\top\right)}$$

$$|A| = -1 \qquad \& \qquad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (A^2 - B^\top) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Bloque Geometría

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional tenemos el punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \qquad \& \qquad r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

a) *(1.75 puntos) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P.*
Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) *(0.75 puntos) Hallar el punto de intersección de las rectas r y s, siendo:*
$s \equiv x-5 = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-9}{3}$

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,0,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2,2,2) \approx (1,1,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} S(5,-1,9) \\ \vec{d_s} = (1,-2,3) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = 5+\mu \\ y = -1-2\mu \\ z = 9+3\mu \end{cases}$$

a) Sea t, la recta del enunciado, que pasa por $O(0,0,0)$ y $P(1,-2,0)$

$$t \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ P(1,-2,0) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d_t} = \overrightarrow{OP} = (1,-2,0) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,-2,0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_t} = (1,-2,0) \end{cases} \implies x-2y+D=0 \xrightarrow{P\in\pi} 1+4+D=0 \implies D=-5$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv x-2y-5=0}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\vec{d_r}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d_r}\right|\cdot|\vec{n}\pi|} = \frac{|(1,1,1)\cdot(1,-2,0)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} = \frac{|1-2|}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \implies \boxed{\alpha = 14.96°}$$

b) $$Q = r\cap s \implies \begin{cases} \left.\begin{array}{c} \lambda = 5+\mu \\ \lambda = -1-2\mu \end{array}\right\} \implies \begin{cases} \mu = -2 \\ \lambda = 3 \end{cases} \\ \lambda = 9+3\mu \implies 3 = 9+3\cdot(-2)\ \checkmark \end{cases} \implies \boxed{Q(3,3,3)}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} \qquad \& \quad s \equiv x = y + 10 = \frac{z-2}{2}$$

a) (1.25 puntos) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano.

b) (1.25 puntos) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,-3,2) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 2 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3,-3,6) \approx (1,-1,2) \end{cases} \qquad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(0,-10,2) \\ \vec{d_s} = (1,1,2) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{RS} = (0,-7,0) \quad \& \quad \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{2}{2} \implies \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan

$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies r$ y s se cortan en un punto, luego están en el mismo plano

$$\pi \equiv \begin{cases} R(0,-3,2) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (1,-1,2) \\ \vec{v} = \vec{d_s} = (1,1,2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies -4x + 2\cdot(z-2) = 0$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv 2x - z + 2 = 0}$$

b) $\pi' \equiv \begin{cases} P(0,-1,2) \\ \pi' \perp r \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} P(0,-1,2) \\ \vec{n_\pi} = \vec{d_r} = (1,-1,2) \end{cases} \implies x - y + 2z + D = 0$

$$\xRightarrow{P\in\pi'} 0 + 1 + 4 + D = 0 \xRightarrow{D=-5} \pi' \equiv x - y + 2z - 5 = 0$$

$$Q = r \cap \pi' \implies \lambda - (-3-\lambda) + 2\cdot(2+2\lambda) - 5 = 0 \xRightarrow{\lambda=-1/3} Q(-1/3, -8/3, 4/3)$$

$$t \equiv \begin{cases} P(0,-1,2) \\ Q\left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{cases} \equiv \begin{cases} P(0,-1,2) \\ \vec{d_t} = \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right) \approx (1,5,2) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Bloque Probabilidad

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir. El sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) (0.5 puntos) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami.

b) (1 punto) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre?

c) (1 punto) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ de sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) $\Omega = \{(5,5),(5,10),(5,50),(10,5),(10,10),(10,50),(50,5),(50,10),(50,50)\}$

b) $P(X \geq 57) = P(X \geq 60) = P(10,50) + P(50,10) + P(50,50)$

$$= \frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11} = \frac{13}{66} \simeq 0.197$$

c) $$P\Big((10,-) \mid X=60\Big) = \frac{P\Big((10,-)\cap X=60\Big)}{P(X=60)} = \frac{P(10,50)}{P(10,50)+P(50,10)}$$

$$= \frac{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones?

b) (1 punto) Se afirma que existe como mucho un 1 % de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos)?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de coches que sufren un reventón”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.04)$$

a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.04^2 \cdot 0.96^8 = 0.0519$

b) $$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.04^0 \cdot 0.96^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.04^1 \cdot 0.96^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.04^2 \cdot 0.96^8\right] \\ &= 1 - 0.9938 = 0.0062 = 0.62\,\% < 1\,\%, \text{ luego la afirmación es cierta.} \end{aligned}$$

c) $$X : \mathcal{B}(250, 0.04) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 250 > 30 \checkmark \\ np = 10 > 5 \checkmark \\ nq = 240 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(10, 3.098)$$

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= P(Y \geq 12.5) = P\left(Z \geq \frac{12.5 - 10}{3.098}\right) = P(Z \geq 0.81) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.81) = 1 - 0.7910 = 0.209 \end{aligned}$$