MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Considera la matriz M y el vector b.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) (3 puntos) Indica para qué valores de a la matriz M es invertible.

b) (3 puntos) Calcula, para todos los valores de a que sea posible, la inversa de M.

c) (4 puntos) Calcula, para el caso $a = 0$, el vector x tal que $MX = b$.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Algebra)

Solución.

a) $|M| = a^2 - 2 = 0 \implies a = \pm\sqrt{2} \implies \exists\, M^{-1}\ \forall a \neq \pm\sqrt{2}$

b) $\operatorname{Adj} M = \begin{pmatrix} -1 & -a & a+1 \\ a-1 & 2-a & -1 \\ 1 & a^2+a-2 & -a-1 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \operatorname{Adj} M^{\top} = \frac{1}{a^2-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -a & 2-a & a^2+a-2 \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

c) Para $a = 0 \implies \exists\, M^{-1} = \dfrac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$M \cdot X = b \implies \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} X = M^{-1} \cdot b \implies \boxed{X = M^{-1} \cdot b}$$

$$X = M^{-1} \cdot b = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *y sea* $\mathcal{O}$ *la matriz nula de orden* 2×2.

a) *(4 puntos) Calcula todas las matrices* X *tales que* $AX - X = B$.

b) *(3 puntos) Encuentra una matriz* Y *diferente de* $\mathcal{O}$ *tal que* $(A - B) \cdot Y = \mathcal{O}$.

c) *(3 puntos) Indica todas las matrices que cumplen la igualdad* $AZ = \mathcal{O}$.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Algebra)

Solución.

a) $AX - X = B \implies (A - I) \cdot X = B \implies \underbrace{(A-I)^{-1} \cdot (A - I)}_{I} \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B$

$$\implies \boxed{X = (A - I)^{-1} \cdot B}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad (A - I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b) $\underbrace{(A - B)}_{2\times 2} \cdot \underbrace{Y}_{m \times n} = \underbrace{\mathcal{O}}_{2 \times 2} \xRightarrow[n=2]{m=2} Y \in \mathcal{M}_{2\times 2} \implies Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$(A - B) \cdot Y = \mathcal{O} \implies \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x - 2z & y - 2t \\ -x + 2z & -y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} x - 2z = 0 \implies x = 2z \\ y - 2t = 0 \implies y = 2t \\ -x + 2z = 0 \implies x = 2z \\ -y + 2t = 0 \implies y = 2t \end{cases} \implies Y = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \xRightarrow[\lambda=1]{\mu=1} \boxed{Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) $\underbrace{A}_{2\times 2} \cdot \underbrace{Z}_{m\times n} = \underbrace{\mathcal{O}}_{2\times 2} \xRightarrow[n=2]{m=2} Z \in \mathcal{M}_{2\times 2} \implies Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot Z = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 3a - c = 0 \xRightarrow{c=0} a = 0 \\ 3b - d = 0 \xRightarrow{d=0} b = 0 \\ 3c = 0 \implies c = 0 \\ 3d = 0 \implies d = 0 \end{cases} \implies \boxed{Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Considera el plano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0$.

a) (3 puntos) Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.

b) (3 puntos) Calcula el área del triángulo anterior.

c) (4 puntos) Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano π que pasa por A.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Geometría)

Solución.

a) $A = \pi \cap OX \xrightarrow[z=0]{y=0} 2x - 6 = 0 \implies x = 3 \implies A(3,0,0)$

$B = \pi \cap OY \xrightarrow[z=0]{x=0} 3y - 6 = 0 \implies y = 2 \implies B(0,2,0)$

$C = \pi \cap OZ \xrightarrow[y=0]{x=0} z - 6 = 0 \implies z = 6 \implies C(0,0,6)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3,2,0) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (-3,0,6)$

$$\text{Área}_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot|(12,18,6)| = \frac{1}{2}\sqrt{504} = 3\sqrt{14}\, u^2$$

c) $$r \equiv \begin{cases} A(3,0,0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (2,3,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sean a y b dos constantes reales no nulas.. Consideremos el plano π y la recta r.

$$\pi \equiv x + ay - 2z = 3 \qquad \& \qquad r \equiv \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

a) *(4 puntos) ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π, y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.*

b) *(3 puntos) ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π?*

c) *(3 puntos) ¿Existe algunos valores de a y b para los cuales la recta r está contenida en el plano π?*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Geometría)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} R(1,0,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-b, 0, 1) \end{cases}$$

a) $r \perp \pi \iff \vec{d_r} \parallel \vec{n}_\pi \implies \dfrac{-b}{1} = \dfrac{0}{a} = \dfrac{1}{-2} \implies \begin{cases} -ab = 0 \ \checkmark \\ \boxed{a = 0} \\ 2b = 1 \implies \boxed{b = 1/2} \end{cases}$

Para $a = 0$ y $b = 1/2$ tenemos:

$$\pi \equiv x - 2z = 3 \quad \& \quad r \equiv \begin{cases} R(1,0,0) \\ \vec{d_r} = (-1/2, 0, 1) \approx (-1, 0, 2) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$P = r \cap \pi \implies 1 - \lambda - 2 \cdot 2\lambda = 3 \implies \lambda = -2/5 \implies \boxed{P(7/5, 0, -4/5)}$

Como $P = r \cap \pi \implies d(r, \pi) = 0$

b) $r \parallel \pi \iff \begin{cases} \vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (-b, 0, 1) \cdot (1, a, -2) = 0 \xrightarrow{-b-2=0} \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = -2 \end{cases} \\ r \notin \pi \xrightarrow{¿R \in \pi?} 1 + 0 + 0 \neq 3 \implies R \notin \pi \implies r \parallel \pi \end{cases}$

Luego $r \parallel \pi$ si $b = -2$, pudiendo tomar el parámetro a cualquier valor.

c) $¿R \in \pi? \implies 1 + 0 + 0 \neq 3 \implies R \notin \pi \implies \nexists\ a,\ b \in \mathbb{R} \mid r \in \pi$ (si un punto de la recta no pertenece al plano entonces toda la recta no puede estar contenida en dicho plano)

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

a) *(4 puntos) ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.*

b) *(4 puntos) ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?*

c) *(2 puntos) ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Análisis)

Solución.

$$f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1 \quad \& \quad f'(x) = -e^{-x} + 0.15 \quad \& \quad f''(x) = e^{-x}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

a) $f(0) = 1 + 0 + 1 = 2$ toneladas de agua infectada en el inicio.

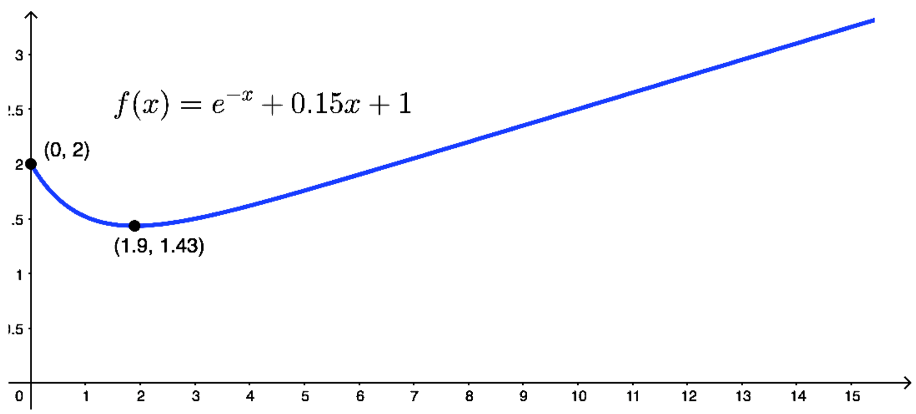
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x} + 0.15x + 1) = 0 + \infty + 1 = +\infty$, lo que indica que, a partir de determinado momento que hallaremos en el apartado b), la cantidad de agua infectada tiende a ser cada vez mayor con el tiempo, acabando por estar toda infectada.

b) $f'(x) = -e^{-x} + 0.15 = 0 \implies e^{-x} = 0.15 \implies x = -\ln 0.15 \simeq 1.897$

$f''(x) = e^{-x} \implies f''(-\ln 0.15) = 0.15 > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mínimo relativo en $x = -\ln 0.15$, que es también absoluto al ser menor que el valor inicial de $f(0) = 2$.

Por lo tanto el valor mínimo de agua contaminada se produce tras 1.897 días de infección y valdrá $f(1.897) \simeq 1.435$ Tm de agua.

c) Como hemos visto, el mínimo absoluto de agua contaminada es mayor que cero por lo que no hay ningún momento en el que el agua no esté infectada.
Otra forma de ver lo mismo es pensar que $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1 > 0 \; \forall x \geq 0$, luego no hay ningún punto en donde se anule.



Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Representa la región comprendida entre la curva $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$*, el eje de abscisas (eje* OX*) y las rectas* $x = 0$ *y* $x = 7$*. Calcula su área.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Análisis)

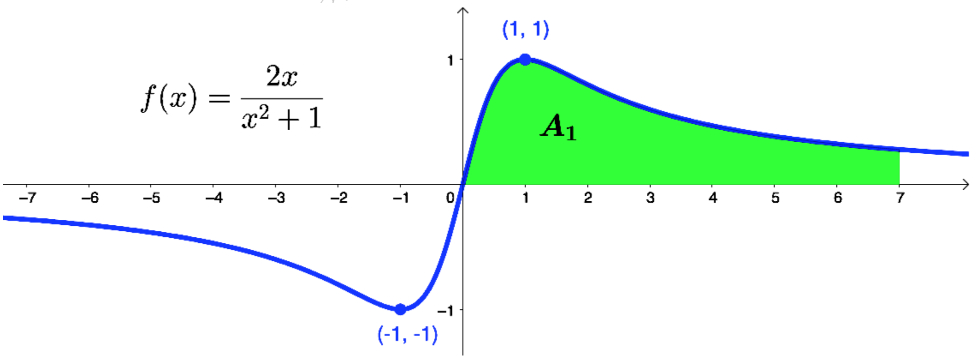
Solución.

- `Dominio:` $x^2 + 1 = 0 \implies \nexists$ Sol. $\implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `Corte` OX`:` $y = 0 \implies \dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \implies x = 0 \implies (0,0)$
- `A. Vertical:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies \nexists A.V.$
- `A. Horizontal:` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow \underset{x\to\pm\infty}{\exists\, A.H.}$ en $y = 0$
- `Monotonía de` $f(x)$`:`

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \implies -2x^2 + 2 = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-1,1)$ y *decreciente* en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(-1,-1)$ y un *máximo relativo* en $(1,1)$.



Entre $x = 0$ y $x = 7$ la gráfica de $f(x)$ define un único recinto de integración $A_1 : (0,7)$

$$A_1 = \int_0^7 f(x)\,dx = \int_0^7 \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{u'/u}\,dx = \ln\left|x^2+1\right|\Big]_0^7 = \ln 50 - \cancelto{0}{\ln 1} = \ln 50$$

$\text{Área} = |A_1| = \ln 50 \simeq 3.912\ u^2$

https://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B. Sabiendo que

$$P(A\cap B)=0.3 \qquad \& \qquad P(A\mid B)=P(B\mid A) \qquad \& \qquad P(\overline{A})=0.4$$

Siendo $\overline{A}$ el suceso complementario, calcula:

a) *(2 puntos)* $P(B\mid A)$.

b) *(3 puntos)* $P(B)$.

c) *(3 puntos)* $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

d) *(2 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes?*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Probabilidad)

Solución.

a) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.4=0.6$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.6}\Longrightarrow \boxed{P(B\mid A)=0.5}$$

b) $P(A\mid B)=P(B\mid A)\Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(B)=P(A)\Longrightarrow$ $\boxed{P(B)=0.6}$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$

$$=1-(0.6+0.6-0.3)\Longrightarrow \boxed{P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.1}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ P(A)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.6=0.36\end{array}\right\}\Longrightarrow \left|\begin{array}{c} P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B) \\ \text{los sucesos } A \text{ y } B \text{ no son independientes}\end{array}\right.$$

HTTPS://APRUEBECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu = 3.1$ kg y desviación típica σ desconocida. Se sabe que solo el 30.5 % de los recién nacidos pesa más de 3.8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,

a) (4 puntos) ¿Cuál es la desviación típica?

b) (3 puntos) Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.7 kg?

c) (3 puntos) Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2.7 y 3.5 kg?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2023 - Bloque Estadística)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los recién nacidos (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(3.1, \sigma)$$

a) $P(X > 3.8) = P\left(Z > \dfrac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = P\left(Z > \dfrac{0.7}{\sigma}\right) = 0.305$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{0.7}{\sigma}\right) = 0.695 \xRightarrow{Tabla} \frac{0.7}{\sigma} = 0.51 \Longrightarrow \boxed{\sigma = 1.3725}$$

b) $P(X < 2.7) = P\left(Z < \dfrac{2.7 - 3.1}{1.3725}\right) = P(Z < -0.29) = P(Z > 0.29)$

$$= 1 - P(Z < 0.29) = 1 - 0.6141 \Longrightarrow \boxed{P(X < 2.7) = 0.3859}$$

c) $P(2.7 < X < 3.5) = P\left(\dfrac{2.7 - 3.1}{1.3725} < Z < \dfrac{3.5 - 3.1}{1.3725}\right) = P(-2.9 < Z < 2.9)$

$$= P(Z < 2.9) - P(Z < -2.9) = P(Z < 2.9) - \left[1 - P(Z < 2.9)\right]$$

$$= 2P(Z < 2.9) - 1 = 2 \cdot 0.6141 - 1 \Rightarrow \boxed{P(2.7 < X < 3.5) = 0.2282}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM