MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JULIO 2023
## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2023 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Sea el sistema*

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}$$

*a) (7 puntos) Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el valor del parámetro $m$.*

*b) (3 puntos) Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.*

*(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Algebra)*

**Solución.**

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes $A$.

$$|A| = m^3 - m = m \cdot (m^2 - 1) = 0 \implies m = \{-1, 0, 1\}$$

- Si $m \neq \{-1, 0, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} 1 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m=1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda + 1 - 2\lambda - z = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\lambda + y = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{array}}$$

---

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Sea $A$ una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,*

*a) (3 puntos) ¿Satisface la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple $M$ la igualdad del enunciado y, además, es invertible? Volviendo a considerar que $A$ es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,*

*b) (3 puntos) Calcula la inversa de $A$.*

*c) (4 puntos) Comprueba que se cumple la igualdad $A \cdot (B + A) - I = A \cdot (B - I)$, siendo $B$ una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ coeficientes reales.*

*(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Algebra)*

**Solución.**

a) $M^2 + M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Luego la matriz $M$ cumple la igualdad y como $|M| = -1 \neq 0 \implies \exists\, M^{-1}$

b) $A^2 + A = I \implies A \cdot (A + I) = I \implies \boxed{A^{-1} = A + I}$

c) $A \cdot (B + A) - I = A \cdot B + A^2 - I \overset{A^2+A=I}{=} A \cdot B + \cancel{A^2} - (\cancel{A^2} + A) = A \cdot B - A = A \cdot (B - I)$

---

**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*Sean los puntos $A(1,2,0)$, $B(-1,0,1)$, $C(0,0,1)$ y $D(3,1,2)$.*

a) *(4 puntos) Determina la recta $r$ que pasa por $D$ y es perpendicular al plano que contiene los puntos $A$, $B$ y $C$.*

b) *(4 puntos) Determina si los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ son coplanarios.*

c) *(2 puntos) ¿Es $D$ el punto de corte de la recta con el plano del apartado a)? Justifica la respuesta.*

*(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Geometría)*

**Solución.**

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-2,1) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (-1,-2,1) \quad \& \quad \overrightarrow{AD} = (2,-1,2)$$

a) $$r \equiv \begin{cases} D(3,1,2) \\ \vec{d}_r = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0,1,2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases} \quad , \; \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) $$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow A,\ B,\ C \text{ y } D \text{ no son coplanarios.}$$

c) Como $A$, $B$, $C$ y $D$ no son coplanarios, el punto $D$ no está en el plano que forman $A$, $B$ y $C$, por lo que no puede ser el punto de corte de $r \cap \pi$.

**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Sea el plano $\pi \equiv 3x + y + z = 2$ los puntos $P(0,1,1)$ y $Q(2,-1,-3)$.*

a) *(2 puntos) ¿Son $P$ y $Q$ puntos del plano $\pi$? Justifica la respuesta.*

b) *(4 puntos) Calcula el punto $S$ situado sobre la recta $PQ$ que se encuentra a $3/4$ partes de $P$ y a $1/4$ parte de $Q$.*

c) *(4 puntos) Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por $P$ y es perpendicular al plano $\pi$.*

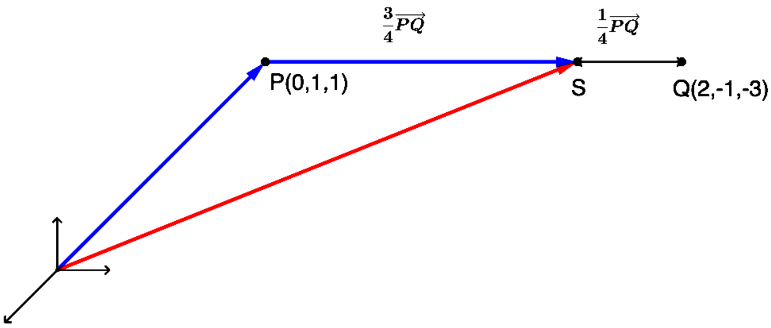
*(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Geometría)*

**Solución.**

a) $¿P \in \pi? \implies 0 + 1 + 1 = 2 \implies P \in \pi$

$¿Q \in \pi? \implies 3 \cdot 2 - 1 - 3 = 2 \implies Q \in \pi$

b) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{PQ} = (0,1,1) + \dfrac{3}{4} \cdot (2,-2,-4) \implies \boxed{S(3/2, -1/2, -2)}$




c) $r \equiv \begin{cases} P(0,1,1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (3,1,1) \end{cases} \implies r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

$$\implies r \equiv \begin{cases} x = 3y - 3 \\ x = 3z - 3 \end{cases} \implies \boxed{r \equiv \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x - 3z + 3 = 0 \end{cases}}$$

**Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)**

*La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x} \cdot (2x+1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.*

a) *(4 puntos) ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.*

b) *(4 puntos) ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En qué instante de tiempo se consigue este valor?*

c) *(2 puntos) ¿Hay algún momento en el que la población supere los 2 millones de insectos?*

*(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Análisis)*

**Solución.**

a) $f(0) = 1$, al principio había 1 millón de insectos

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \cdot (2x+1) = [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

Luego el número de insectos tiende a desaparecer con el paso del tiempo.

b) $f'(x) = -e^{-x} \cdot (2x+1) + 2e^{-x} = e^{-x} \cdot (-2x+1) = 0 \implies x = 1/2$

$f''(x) = -e^{-x} \cdot (-2x+1) - 2e^{-x} = e^{-x} \cdot (2x-3) \implies f''(1/2) = -2e^{-1/2} < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máx.

El número de insectos tiene un *máximo relativo* después de $x = 1/2$ mes y vale $f(1/2) = 2e^{-1/2} = \dfrac{2}{\sqrt{e}} \simeq 1.21$ millones de insectos, por lo que también es el máximo absoluto de la función (al ser mayor que el número de insectos al inicio).

c) La población de insectos nunca alcanzará los 2 millones de individuos pues parte de 1 millón y llega a un máximo de 1.21 para volver a decaer hasta desaparecer con el paso del tiempo.

**Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)**

> *Calcula la integral de la función* $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.
>
> *(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Análisis)*

**Solución.**

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx = \int \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}\,dx &\overset{\odot}{=} \int \left(x^2 - x + 3\right) dx + \int \frac{-3x}{x^2+x-2}\,dx \\
&\overset{\circledast}{=} \int \left(x^2 - x + 3\right) dx + \int \frac{-2}{x+2}\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x+2| - \ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

$\odot$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & +2x & -6 & x^2+x-2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & +2x^2 & & & x^2-x+3 \\ \cline{1-3}
 & -x^3 & +2x^2 & +2x & & \\
 & x^3 & +x^2 & -2x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^2 & & -6 & \\
 & & -3x^2 & -3x & +6 & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x & & 
\end{array}$$

$\circledast$ $x^2 + x - 2 = (x+2)\cdot(x-1)$

$$\frac{-3x}{\cancel{x^2+x-2}} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{\cancel{x^2+x-2}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \langle\, x = -2 \,\rangle & 6 = -3A \quad \Rightarrow A = -2 \\ \langle\, x = 1 \,\rangle & -3 = 3B \quad \Rightarrow B = -1 \end{cases}$$

**Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)**

*En una clase donde todos los alumnos practica algún deporte, el 60 % de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10 % practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60 % de alumnos juega a fútbol o básquet y el 10 % practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60 % de alumnos que no juega al fútbol.*

*a) (3 puntos) Sea $F \equiv$ "juega a fútbol" y sea $B \equiv$ "juega al básquet", escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.*

*b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,*

*b.1) (1 puntos) Juegue a fútbol.*

*b.2) (2 puntos) Juegue a básquet.*

*b.3) (2 puntos) Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet)*

*b.4) (2 puntos) No juegue ni a fútbol ni a básquet.*

*(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Probabilidad)*

**Solución.**

a) $P(F \cup B) = 0.6 \quad \& \quad P(F \cap B) = 0.1 \quad \& \quad P(\overline{F}) = 0.6$

b) b.1) $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - 0.6 \implies \boxed{P(F) = 0.4}$

b.2) $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(B) = P(F \cup B) + P(F \cap B) - P(F) = 0.6 + 0.1 - 0.4 \implies \boxed{P(B) = 0.3}$$

b.3) $P(B \cap \overline{F}) = P(B) - P(B \cap F) = 0.3 - 0.1 \implies \boxed{P(B \cap \overline{F}) = 0.2}$

b.4) $P(\overline{F} \cap \overline{B}) = P(\overline{F \cup B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0.6 \implies \boxed{P(\overline{F} \cap \overline{B}) = 0.4}$

**Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)**

*a) (5 puntos) En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre* 5 *y* 7 *si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media* 6 *y desviación típica* 2*?*

*b) (5 puntos) En un examen de filosofía, el* 35 % *de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que* 6 *mientras que el* 51 % *la obtuvo menor que* 4*. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media* $\mu$ *y su desviación típica* $\sigma$*.*

*(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2023 - Bloque Estadística)*

**Solución.**

a) $X \equiv$ "Puntuación del examen de tecnología" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(6, 2)$

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 7) &= P\left(\frac{5-6}{2} \leq Z \leq \frac{7-6}{2}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 0.5) - P(Z \geq 0.5) \\ &= P(Z \leq 0.5) - \Big[1 - P(Z \leq 0.5)\Big] \\ &= 2P(Z \leq 0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 \implies \boxed{P(5 \leq X \leq 7) = 0.383} \end{aligned}$$

b) $Y \equiv$ "Puntuación del examen de filosofía" $\longrightarrow Y : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$P(Y \geq 6) = P\left(Z \geq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \implies P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.35 = 0.65$$

$$\xrightarrow{Tabla} \frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385 \implies \odot\ \mu + 0.385\sigma = 6$$

$$P(Y \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0.51 \xrightarrow{Tabla} \frac{4-\mu}{\sigma} = 0.025 \implies \circledast\ \mu + 0.025\sigma = 4$$

$$\begin{cases} \odot\ \mu + 0.385\sigma = 6 \\ \circledast\ \mu + 0.025\sigma = 4 \end{cases} \Rightarrow 0.36\sigma = 2 \Rightarrow \boxed{\sigma = 5.5555} \xrightarrow{\mu + 0.385 \cdot 5.5555 = 6} \boxed{\mu = 3.8613}$$