MATEMATICAS CCSS PROGRAMACIÓN LINEAL

https://aprendeconmigomelon.com

4 de noviembre de 2023

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Programación Lineal que han sido propuestos en la EVAU. Prácticamente 170 problemas resueltos de todas las Comunidades que espero te resulten de utilidad. Este tipo de ejercicios se han convertido en un clásico de la EVAU así que ponles un poco de cariño, y no se te olvide utilizar una regla que a veces los errores vienen por dibujar la región factible a ojo.

Índice general

Ejercicios de Programación Lineal

Ejercicio 1

En el último salón internacional del automóvil celebrado en España, un pequeño fabricante presentó sus modelos Caaper (precio por unidad 16000 €) y Ena (precio por unidad 15000 €).
El coste de producción por unidad es, respectivamente, 10400 € y 9750 €. Para la fabricación de una unidad del primer modelo se necesitan 3 m de un determinado producto textil y 7,5 kg de pintura especial, mientras que para la fabricación de una unidad del segundo modelo se necesitan 4 m de producto textil y 7 kg de pintura. Mensualmente existen en el almacén 96 m de producto textil y 195 kg de pintura.

a) Representar la región factible

b) Hallar cuántas unidades de cada modelo interesa fabricar mensualmetne para que las ventas de las mismas produzcan el máximo beneficio y calcula dicho beneficio.

Solución.

	Modelo Caaper	Modelo Ena	Almacén
Producto textil (m^2/ud)	3	4	≤ 96
Pintura especial (kg/ud)	7,5	7	≤ 195
Coste producción (€/ud)	10400	9750	
Precio venta (€/ud)	16000	15000	

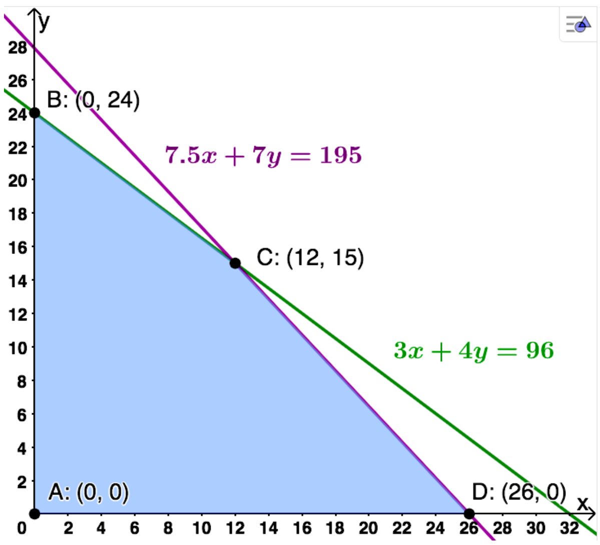
- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº vehículos modelo Caaper"
  $y \equiv$ "Nº vehículos modelo Ena"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; 3x + 4y \leq 96 & \to (0,24) \quad \& \quad (32,0) \\ ② \; 7{,}5x + 7y \leq 195 & \to (0,27{,}8) \quad \& \quad (26,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = (16000 - 10400)x + (15000 - 9750)y = 5600x + 5250y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	24	126000
C	12	15	145950
D	26	0	145600

Por tanto el *beneficio máximo* es de 145950€ vendiendo 12 unidades del modelo Caaper y 15 del modelo Ena.

Ejercicio 2

Una empresa constructora dispone de 10800000 € para edificar en una urbanización casas de dos tipos: las de tipo A, cada una de las cuales tendría un coste (para la empresa) de 180000 €, y dejaría al venderla, un beneficioo de 24000 €; y las de tipo B cuyos costes y beneficios individuales serían de 120000 € y 18000 € respectivamente. Si las normas municipales no permiten construir más de 80 casas, hallar cuántas de cada tipo debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio.

Solución.

- `Incógnitas`

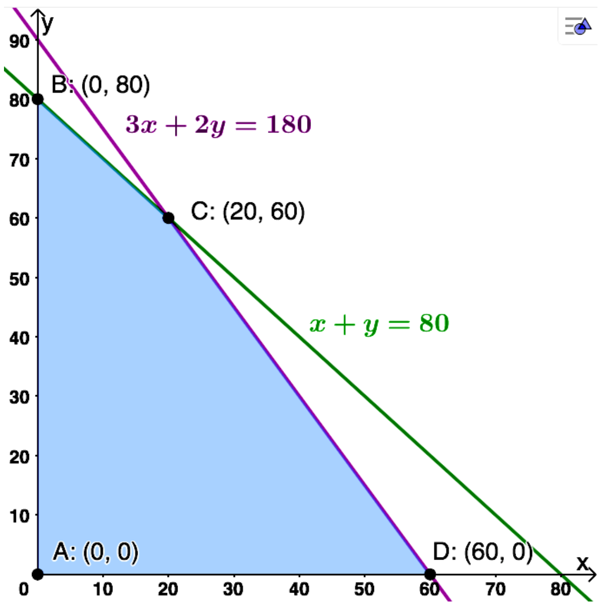
$$x \equiv \text{“Nº de casas del tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de casas del tipo } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 180000x + 120000y \leq 10800000 \\ ② \ x + y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \ 3x + 2y \leq 180 & \rightarrow (0,90) \quad \& \quad (60,0) \\ ② \ x + y \leq 80 & \rightarrow (0,80) \quad \& \quad (80,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 24000x + 18000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	80	1440000
C	20	60	1560000
D	60	0	1440000

Por tanto el *máximo beneficio* es de 1560000 y se obtiene vendiendo 20 casas del tipo A y 60 del tipo B.

Ejercicio 3

Una peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1200 *socios a ver la final de su equipo. La empresa dispone de autobuses de* 50 *plazas y de microbuses de* 30 *plazas. El precio de cada autobús es de* 252 *euros y el de cada microbús de* 180*. Sabiendo que la empresa sólo dispone de* 28 *conductores, se pide:*

a) ¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible?

b) ¿Cuál será el valor de dicho coste mínimo?

Solución.

	Autobuses	Microbuses	Restricción
Capacidad (nº de plazas)	50	30	≥ 1200
Precio del alquiler	252	180	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de autobuses a contratar”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de microbuses a contratar”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ 50x + 30y \geq 1200 \\ (2)\ x + y \leq 28 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ 5x + 3y \geq 120 & \to (0,40) \quad \& \quad (24,0) \\ (2)\ x + y \leq 28 & \to (0,28) \quad \& \quad (28,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

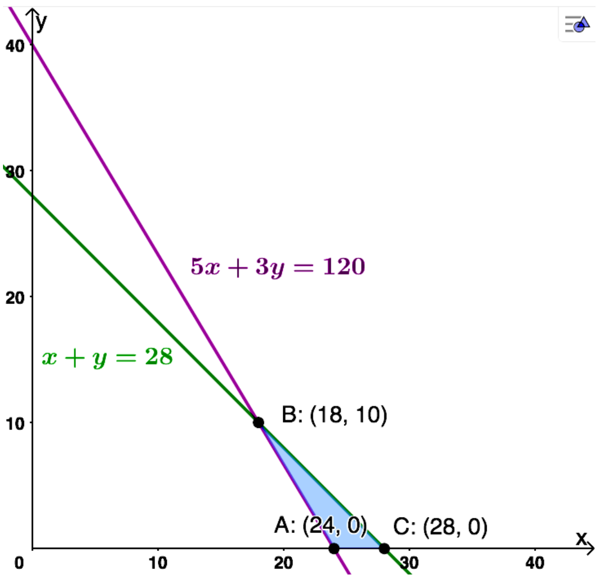
- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 252x + 180y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	24	0	6048
B	18	10	6336
C	28	0	7056

Por tanto el *coste mínimo* es de 6048 € y se consigue contratando 24 autobuses y ningún microbús.



Ejercicio 4

Una fábrica produce confitura de albaricoque y confitura de ciruela. El doble de la producción de confitura de ciruela es menor o igual que la producción de confitura de albaricoque más 800 unidades. También el triple de la producción de confitura de albaricoque más el doble de la producción de confitura de ciruela es menor o igual que 2400 unidades.
Cada unidad de confitura de albaricoque produce un beneficio de 60 euros y cada unidad de confitura de ciruela 80 euros. ¿Cuántas unidades de cada tipo de confitura se tienen que producir para obtener un beneficio máximo?

Solución.

- `Incógnitas`

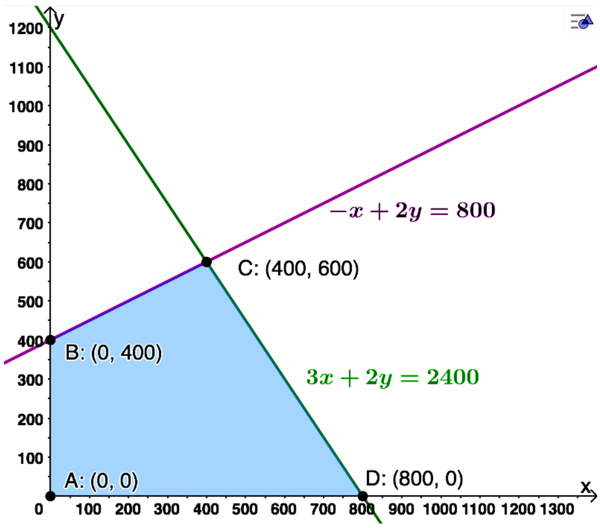
$$x \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de unidades de confitura de albaricoque”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de unidades de confitura de ciruela”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 2y \leq x + 800 \\ ② \ 3x + 2y \leq 2400 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ① \ -x + 2y \leq 800 & \to (0,400) \quad \& \quad (-800,0) \\ ② \ 3x + 2y \leq 2400 & \to (0,1200) \quad \& \quad (800,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 60x + 80y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	400	32000
C	400	600	72000
D	800	0	48000

Por lo tanto el *beneficio máximo* es de 72000 € y se obtiene vendiendo 400 unidades de confitura de albaricoque y 600 de ciruela.

Ejercicio 5

> *Un agricultor puede sembrar trigo (5 hectáreas como máximo) y centeno (7 hectáreas como máximo) en sus tierras. La producción de trigo, por cada hectárea sembrada, es de 5 toneladas, mientras que la producción de centeno, también por hectárea sembrada, es de 2 toneladas, pudiendo producir un máximo de 29 toneladas de los dos cultivos. Si el beneficio que obtendrá el agricultor por cada tonelada de trigo es de 290 euros y el beneficio por cada tonelada de centeno es de 240 euros ¿qué número de hectáreas ha de sembrar de cada cultivo para maximizar los beneficios?*

Solución.

	Trigo	Centeno	Restricción
Producción (Tm/Ha)	5	2	≤ 29
Beneficio (€/Tm)	290	240	
	≤ 5	≤ 7	

- `Incógnitas`

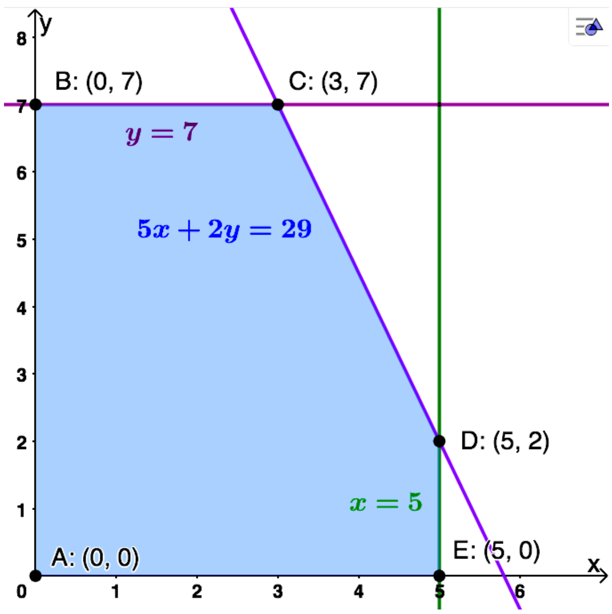
$$x \equiv \text{“Superficie sembrada de trigo (Ha)”}$$
$$y \equiv \text{“Superficie sembrada de centeno (Ha)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 5x + 2y \leq 29 & \to (0, 14{,}5) \quad \& \quad (5{,}8, 0) \\ ② \ x \leq 5 & \to (5, 0) \\ ③ \ y \leq 7 & \to (0, 7) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 290x + 240y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	7	1680
C	3	7	2550
D	5	2	1930
E	5	0	1450

Por lo tanto el *máximo beneficio* es de 2550 € y se obtiene cultivando 3 hectáreas de trigo y 7 de cebada.

Ejercicio 6

Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos: los de tipo A contienen tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína; y los de tipo B contienen dos con cafeían y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 € por cada paquete que venda de tipo A y 5 € por cada paquete que venda de tipo B. Calcula de forma razonada cuántos paquetes han de vender de cada tipo para obtener el máximo beneficio, y halla dicho beneficio.

Solución.

	Paquete tipo A	Paquete tipo B	Existencias
Cola con cafeína (ud.)	3	2	120
Cola sin cafeína (ud.)	3	4	180
Beneficio (€)	6	5	

- `Incógnitas`

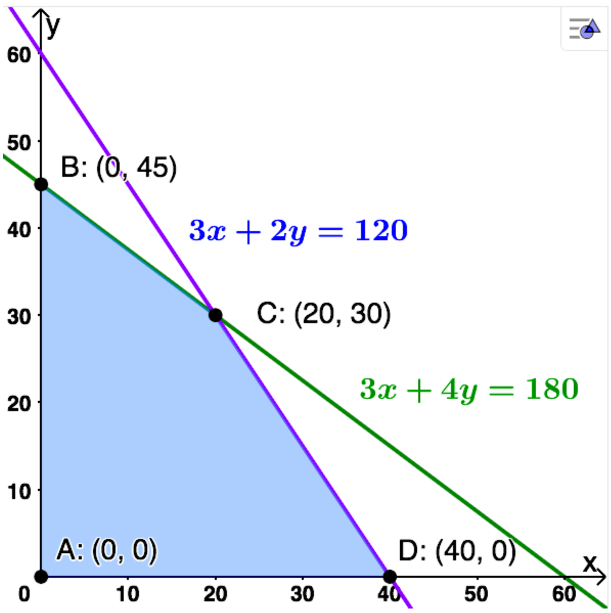
$$x \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de paquetes de tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de paquetes de tipo } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; 3x + 2y \leq 120 & \rightarrow (0, 60) \quad \& \quad (40, 0) \\ ② \; 3x + 4y \leq 180 & \rightarrow (0, 45) \quad \& \quad (60, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 6x + 5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	45	225
C	20	30	270
D	40	0	240

Por lo tanto el *beneficio máximo* es de 270 € y se obtiene vendiendo 20 paquetes tipo A y 30 tipo B.

Ejercicio 7

> *Una empresa fabrica dos modelos de fundas de sofá, A y B, que dejan unos beneficios de 40 € y 20 €, respectivamente. Para cada funda del modelo A se precisan 4 horas de trabajo y 3 unidades de tela. Para fabricar una del modelo B se requieren 3 horas de trabajo y 5 unidades de tela. La empresa dispone de 48 horas de trabajo y 60 unidades de tela. Si a lo sumo pueden hacerse 9 fundas del modelo A, ¿cuántas fundas han de fabricarse para que el beneficio sea máximo?*

Solución.

	Modelo A	Modelo B	Disponibilidad
Horas de trabajo	4	3	48
Unidades de tela	3	5	60
Beneficio (€/ud)	40	20	
	$y \leq 9$		

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de fundas del modelo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de fundas del modelo } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

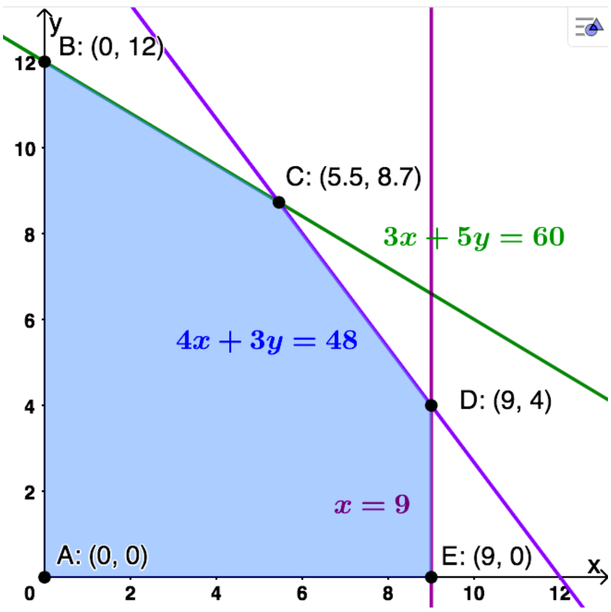
$$\begin{cases} ① \ 4x + 3y = 48 & \to (0,16) \quad \& \quad (12,0) \\ ② \ 3x + 5y \leq 60 & \to (0,12) \quad \& \quad (20,0) \\ ③ \ x \leq 9 & \to (9,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 40x + 20y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	12	240
C	5,5	8,7	394
D	9	4	440
E	9	0	360



Por lo tanto el *beneficio máximo* es de 440 € y se obtiene vendiendo 9 fundas del modelo A y 4 del B.

Ejercicio 8

Dibuja la región del plano (región factible) determinada por el sistema de inecuaciones siguiente:

$$x + y \leq 5 \quad \& \quad -x + y \leq 1 \quad \& \quad x + 2y \geq 2 \quad \& \quad y \geq 0$$

y calcula el máximo de la función $f(x, y) = 2x + 2y$ en esta región.

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

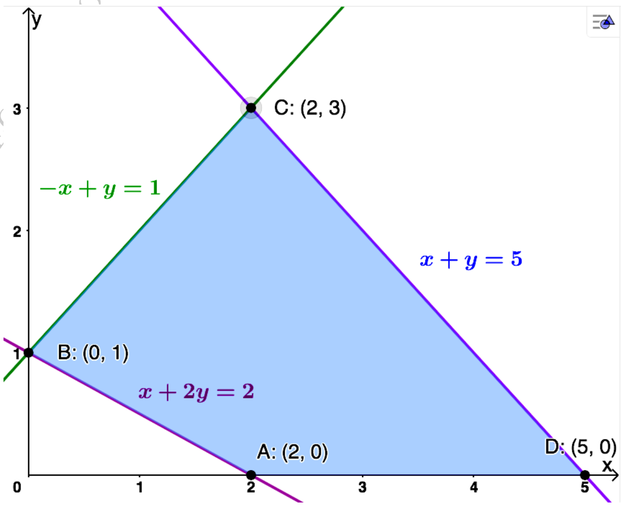
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; -x + y \leq 1 & \rightarrow (0,1) \quad \& \quad (-1,0) \\ ③ \; x + 2y \geq 2 & \rightarrow (0,1) \quad \& \quad (2,0) \\ ④ \; y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	0	4
B	0	1	2
C	2	3	10
D	5	0	10



Por lo tanto el *máximo* de la función $f(x, y)$ es de 10 y se encuentra en cualquier punto del segmento que une los puntos $C : (2, 3)$ y $D : (5, 0)$.

Ejercicio 9

Un estudiante dedica parte de su tiempo a repartir publicidad. La empresa A le paga 30 euros por cada 100 impresos repartidos y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 40 euros por cada 100 impresos. El estudiante tiene 2 bolsas: una para los impresos A, donde caben 120, y otra para los impresos B, donde caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. ¿Cuántos impresos de cada clase tendrá que repartir para que su beneficio diario sea máximo?.

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de impresos de la empresa } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de impresos de la empresa } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

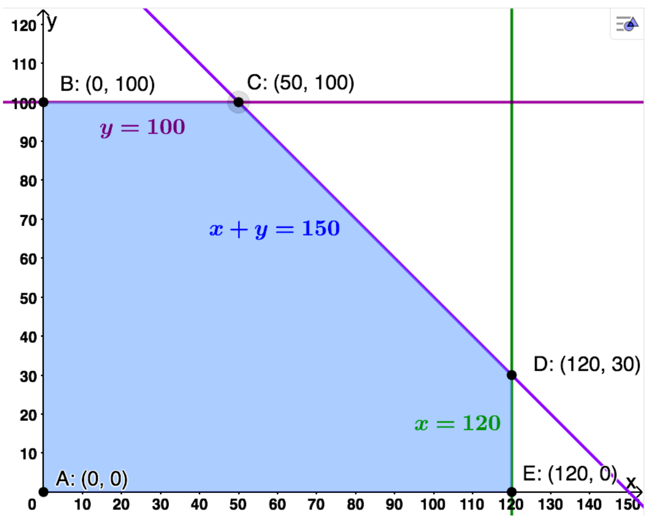
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 150 & \to (0,150) \quad \& \quad (150,0) \\ ② \ x \leq 120 & \to (100,0) \\ ③ \ y \leq 100 & \to (0,120) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 0{,}3x + 0{,}4y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	100	40
C	50	100	55
D	120	30	48
E	120	0	36



Por lo tanto el *beneficio máximo* es de 55 € y se obtiene repartiendo 50 impresos de la empresa A y 100 de la empresa B.

Ejercicios de EVAU

Andalucia

Ejercicio 10 (2,5 *puntos*)

a) *(1.5 puntos) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones y determine sus vértices:*

$$2x + y \leq 6 \quad \& \quad 4x + y \leq 10 \quad \& \quad -x + y \leq 3 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

b) *(1 punto) Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque A)

Solución.

a) `Restricciones:` Escribimos los puntos necesarios para su representación

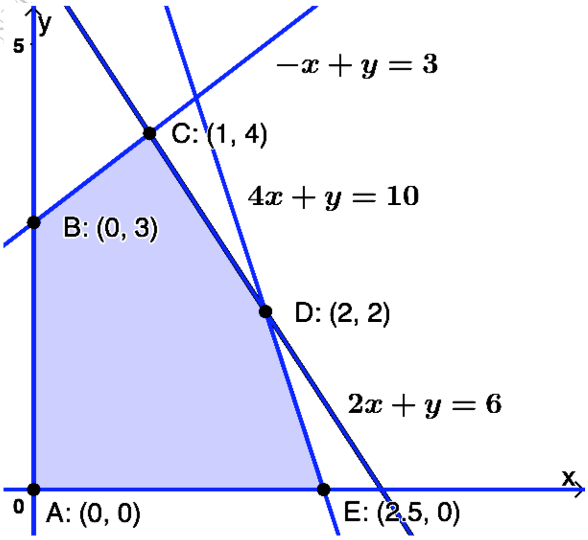
$$\begin{cases} ① \; 2x + y \leq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (3,0) \\ ② \; 4x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (2,2) \\ ③ \; -x + y \leq 3 & \rightarrow (0,3) \quad \& \quad (-3,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

b) `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 4x + 2y - 3$

`Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

`Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	-3
B	0	3	3
C	1	4	9
D	2	2	9
E	2,5	0	7



El *máximo* de $f(x, y)$ es de 9 y se produce en cualquier punto del segmento $\overline{CD}$.

Ejercicio 11 (2,5 *puntos*)

Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.
Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de baterías de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de baterías de tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

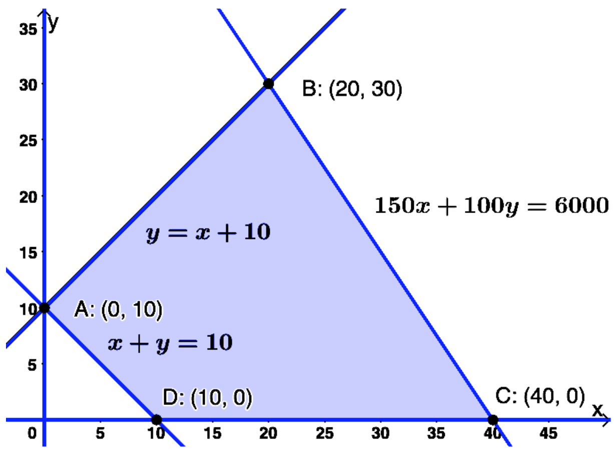
$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; y \leq x + 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (5,15) \\ ③ \; 150x + 100y \leq 6000 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (40,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 130x + 140y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	10	1400
B	20	30	6800
C	40	0	5200
D	10	0	1300



El *máximo beneficio* asciende a 6800 euros produciendo 20 baterías del tipo A y 30 del tipo B.

Ejercicio 12 (2,5 *puntos*)

a) *(1 punto) Una frutería vende dos tipos de surtidos de frutos rojos, A y B El surtido de tipo A contiene 75 g de arándanos, 100 g de frambuesas y se vende a 2,40 euros, mientras que el de tipo B contiene 75 g de arándanos, 50 g de frambuesas y se vende a 1,80 euros. La frutería dispone de un total de 3,75 kg de arándanos y 4 kg de frambuesas y el número de surtidos que vende del tipo A, siempre es menor o igual al doble de los del tipo B.*
Formule, sin resolver, el problema que permite obtener el número de surtidos de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea máximo.

b) *(1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:*

$$x + 4y \geq 5 \qquad \& \qquad x + 2y \geq 4 \qquad \& \qquad 7x + 5y \leq 35 \qquad \& \qquad x \geq 0$$

¿En qué punto de la región anterior la función $F(x, y) = 2x+y$ alcanza el mínimo y cuál es dicho valor?.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Reserva)

Solución.

	Surtido tipo A	Surtido tipo B	Existencias
Contenido de arándanos (g)	75	75	3750
Contenido de frambuesas (g)	100	50	4000
Precio venta (euros)	2,4	1,8	
Stock mínimo	$\leq 2y$		

a)
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de surtidos de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de surtidos de tipo B"
- `Restricciones:`

$$\begin{cases} ① \ 75x + 75y \leq 3750 \\ ② \ 100x + 50y \leq 4000 \\ ③ \ x \leq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 50 \\ ② \ 2x + y \leq 80 \\ ③ \ x \leq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2{,}4x + 1{,}8y \Longrightarrow \text{máx}(f(x, y))$

b)
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

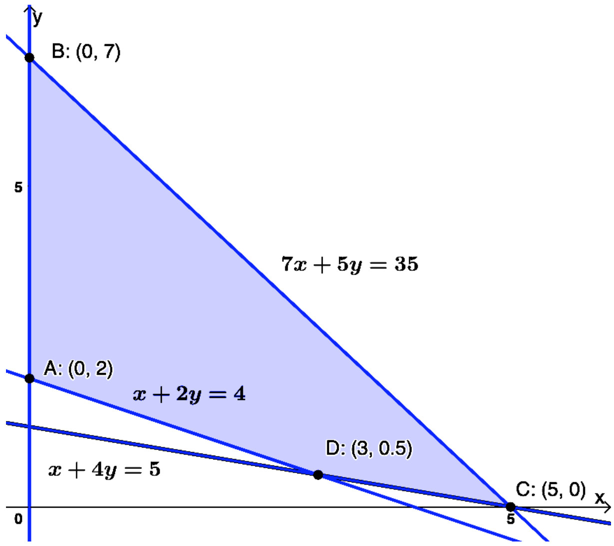
$$\begin{cases} ① \ x + 4y \geq 5 & \rightarrow (0, 1{,}25) \quad \& \quad (5, 0) \\ ② \ x + 2y \geq 4 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (4, 0) \\ ③ \ 7x + 5y \leq 35 & \rightarrow (0, 7) \quad \& \quad (5, 0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

`Función objetivo` $\quad F(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$F(x,y)$
A	0	2	2
B	0	7	7
C	5	0	10
D	3	0,5	6,5



El *mínimo* de $F(x,y)$ es de 2 y se produce en el punto $A:(0,2)$.

Ejercicio 13 (2,5 *puntos*)

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 3y \geq -9 \quad \& \quad x + y \leq 11 \quad \& \quad 6x + y \leq 36 \quad \& \quad x + 2y \geq 6$$

a) (1.5 puntos) Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) (0.25 puntos) ¿Pertenece el punto $(5,7)$ *a la región factible anterior?*

c) (0.75 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y) = 10x - 6y$ *en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) ▪ `Restricciones:`
$$\begin{cases} ① \ 5x - 3y \geq -9 & \to (0,3) \quad \& \quad (3,8) \\ ② \ x + y \leq 11 & \to (0,11) \quad \& \quad (11,0) \\ ③ \ 6x + y \leq 36 & \to (0,36) \quad \& \quad (6,0) \\ ④ \ x + 2y \geq 6 & \to (0,3) \quad \& \quad (6,0) \end{cases}$$

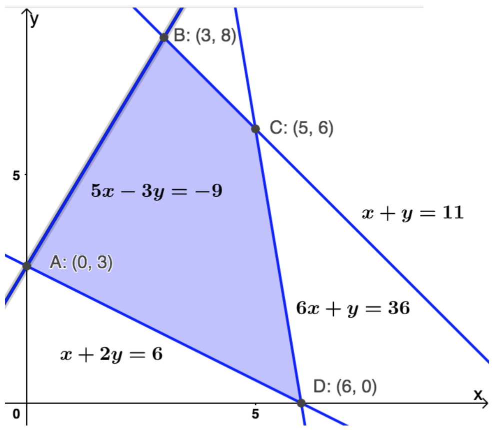
b) Veamos si el punto $P(5,7)$ pertenece a la región factible:

$$\begin{cases} ① \ 5x - 3y \geq -9 & \to 5 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 4 \geq -9 \ \checkmark \\ ② \ x + y \leq 11 & \to 5 + 7 = 12 \not\leq 11 \implies P \notin \text{Región Factible} \end{cases}$$

c) ▪ `Función objetivo` $\qquad F(x,y) = 10x - 6y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $F(x,y)$

Punto	x	y	$F(x,y)$
A	0	3	-18
B	3	8	-18
C	5	6	14
D	6	0	60



El *mínimo* de $F(x,y)$ se encuentra en cualquier punto del segmento $\overline{AB}$ y vale -18.
El *máximo* de $F(x,y)$ es de 60 y se produce en el punto $D : (6,0)$.

Ejercicio 14 (2,5 *puntos*)

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19 \quad \& \quad 3x - 4y \leq -13 \quad \& \quad x \geq -7 \quad \& \quad -x - y \geq 2$$

a) *(1.5 puntos) Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.*

b) *(0.5 puntos) ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función* $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ *en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?*

c) *(0.5 puntos) Responda de forma razonada si la función* $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ *puede alcanzar el valor* $\frac{47}{3}$ *en la región factible hallada.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque A - Extraordinario)

Solución.

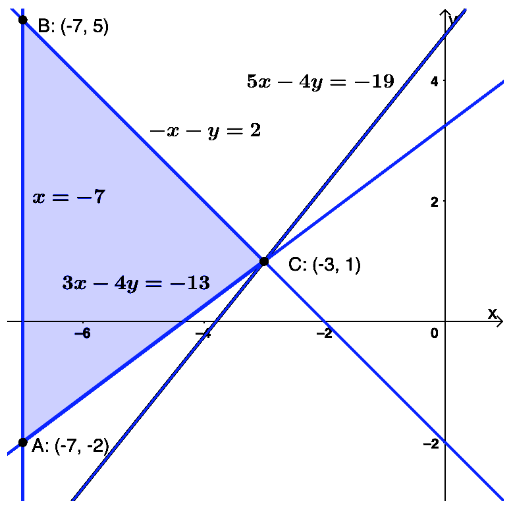
a) `Restricciones:` Hallamos los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; 5x - 4y \leq -19 & \rightarrow (3, -1) \quad \& \quad (1, 6) \\ ② \; 3x - 4y \leq -13 & \rightarrow (-3, 1) \quad \& \quad (3, -1) \\ ③ \; x \geq -7 & \rightarrow (-7, 0) \\ ④ \; -x - y \geq 2 & \rightarrow (0, -2) \quad \& \quad (-2, 0) \end{cases}$$

b) `Función objetivo` $\quad G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $fG(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	-7	-2	$-3{,}6$
B	-7	5	$13{,}9$
C	-3	1	$3{,}1$



El *mínimo* de $G(x, y)$ es de $-3{,}6$ y se produce en el punto $A : (-7, -2)$.
El *máximo* de $G(x, y)$ es de $13{,}9$ y se produce en el punto $B : (-7, 5)$.

c) El valor de $G(x, y) = \frac{47}{3} \simeq 15{,}67$ es mayor que el máximo, por lo que podemos afirmar que no existe ningún punto en la región factible en donde la función $G(x)$ alcanza ese valor.

Ejercicio 15 (2,5 *puntos*)

La Agencia Espacial Europea contará con un presupuesto de 2,4 *millones de euros para financiar misiones sobre Observación de la Tierra y para financiar programas de Transporte Espacial. Cada misión supone una inversión de* 200000 *euros y cada programa,* 100000 *euros. Teniendo en cuenta que en la decisión final deben superarse los* 2 *millones de euros de inversión y el número de misiones debe ser al menos* 4*, pero no más de la mitad del número de programas, ¿cuántas misiones y cuántos programas deben llevar a cabo para obtener el máximo de la función* $F(x, y) = 0{,}6x + 0{,}4y$*, con* x *misiones e* y *programas?*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque A - Reserva)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de misiones sobre Observación de la Tierra”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de programas de Transporte Espacial”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

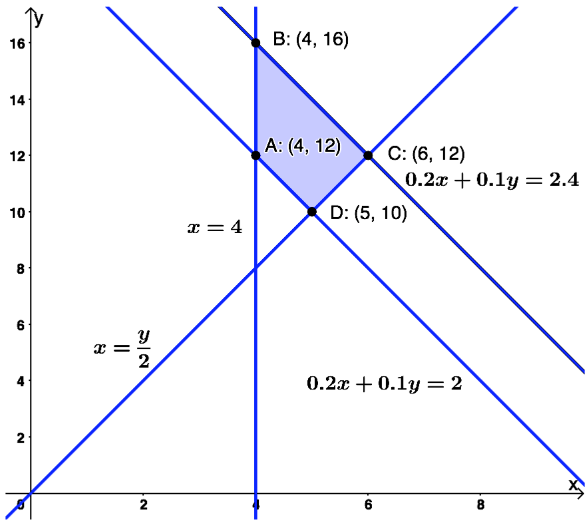
$$\begin{cases} ① \; 0{,}2x + 0{,}1y \leq 2{,}4 & \rightarrow (0, 24) \quad \& \quad (12, 0) \\ ② \; 0{,}2x + 0{,}1y \geq 2 & \rightarrow (0, 20) \quad \& \quad (10, 0) \\ ③ \; x \geq 4 & \rightarrow (4, 0) \\ ④ \; x \leq \dfrac{y}{2} & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (10, 20) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad F(x, y) = 0{,}6x + 0{,}4y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$F(x,y)$
A	4	12	7,2
B	4	16	8,8
C	6	12	8,4
D	5	10	7



El *máximo* de $F(x, y)$ es de 8,8 millones de euros y se produce financiando 4 misiones y 16 programas.

Ejercicio 16 (2,5 *puntos*)

> *Un laboratorio farmacéutico tiene una línea de producción con dos medicamentos A y B, con marca comercial y genérico respectivamente, de los cuales, entre los dos como máximo puede fabricar 10 unidades a la hora. Desde el punto de vista del rendimiento, se han de producir al menos 4 unidades por hora entre los dos y por motivos de política sanitaria, la producción de A ha de ser como mucho 2 unidades más que la de B. Cada unidad de tipo A que vende le produce un beneficio de 60 euros, mientras que cada unidad de tipo B le produce un beneficio de 25 euros. Si se vende todo lo que se produce, determine las unidades de cada medicamento que deberá fabricar por hora para maximizar su beneficio y obtenga el valor de dicho beneficio.*
>
> *(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque A - Suplente)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Producción del medicamento A (ud/h)"
  $y \equiv$ "Producción del medicamento B (ud/h)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

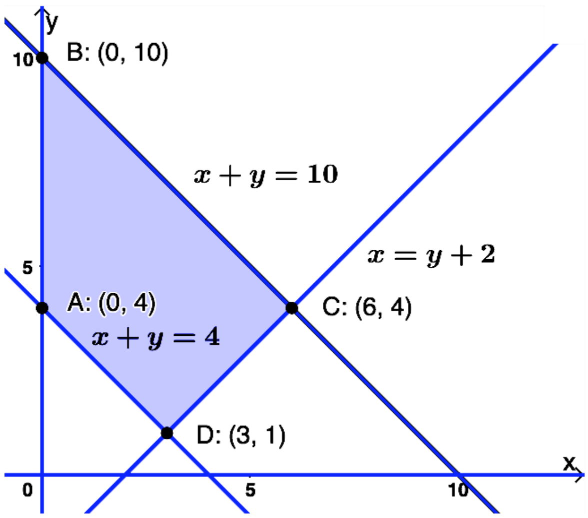
$$\begin{cases} ① \; x+y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; x+y \geq 4 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (4,0) \\ ③ \; x \leq y+2 & \rightarrow (0,-2) \quad \& \quad (2,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\qquad f(x,y) = 60x + 25y$ (€/h)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	4	100
B	0	10	250
C	6	4	460
D	3	1	205



El *máximo beneficio* es de 460 €/h, fabricando 6 unidades por hora del medicamento A y 4 de medicamento B.

Ejercicio 17 (2,5 *puntos*)

Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo. Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

	Caja tipo 1	Caja tipo 2	Stock
Piononos	3	4	120
Pestiños	2	6	150
		≥ 9	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de cajas del tipo 1"
  $y \equiv$ "Nº de cajas del tipo 2"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

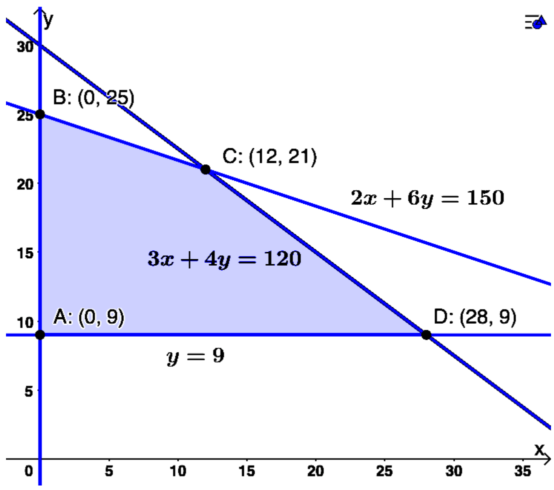
$$\begin{cases} ① \ 3x + 4y \leq 120 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (40,0) \\ ② \ 2x + 6y \leq 150 & \rightarrow (0,25) \quad \& \quad (75,0) \\ ③ \ y \geq 9 & \rightarrow (0,9) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` (Nº de regalos) $\qquad f(x,y) = x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	9	9
B	0	25	25
C	12	21	33
D	28	9	37



El *máximo* número de regalos es de 37, vendiendo 28 cajas del primer tipo y 9 del segundo, con un número de piononos igual a $3 \cdot 28 + 4 \cdot 9 = 120$ y un número de pestiños de $2 \cdot 28 + 6 \cdot 9 = 110$.

Ejercicio 18 (2,5 *puntos*)

Una papelería quiere vender 400 cuadernos de vacaciones y 300 estuches de lápices de colores. Para ello ha preparado dos lotes de esos productos a precios especiales. Los lotes de tipo A contienen 2 cuadernos y 2 estuches; los lotes de tipo B contienen 3 cuadernos y 1 estuche. No es posible vender más de 100 lotes de tipo B. Cada lote de tipo A se vende a 35€ y cada lote de tipo B a 45€. Calcule cuántos lotes de cada tipo debe vender la papelería para conseguir el máximo valor de ventas. ¿A cuánto asciende dicho valor?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Reserva)

Solución.

	Lote tipo A	Lote tipo B	Existencias
Nº Cuadernos	2	3	≤ 400
Nº Estuches	2	1	≤ 300
		≤ 100	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de lotes tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

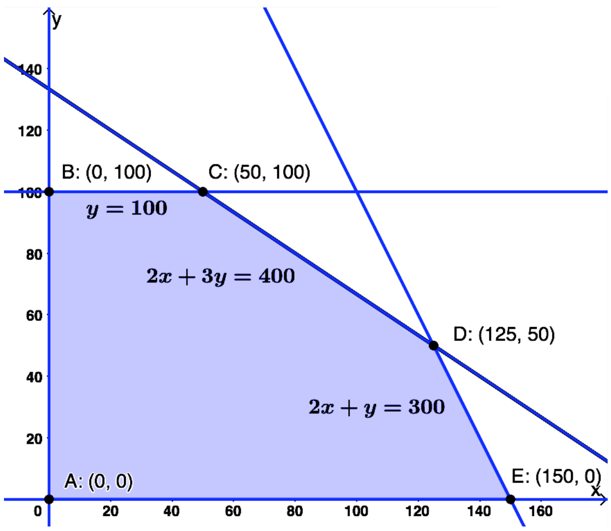
$$\begin{cases} ① \; 2x + 3y \leq 400 & \rightarrow (0, 133) \quad \& \quad (200, 0) \\ ② \; 2x + y \leq 300 & \rightarrow (0, 300) \quad \& \quad (150, 0) \\ ③ \; y \leq 100 & \rightarrow (0, 100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 35x + 45y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	100	4500
C	50	100	6250
D	125	50	6625
E	150	0	5250



El *máximo* valor de ventas es de 6625€, vendiendo 125 lotes del tipo A y 50 del tipo B.

Ejercicio 19 (2,5 *puntos*)

Una fábrica de juguetes educativos produce juegos de ajedrez y dominó. Para fabricar un ajedrez se necesitan 2 kg de madera y 4 horas de trabajo, mientras que para fabricar un dominó se necesita 1 kg de madera y 1 hora de trabajo. Para que la producción sea rentable hay que hacer al día al menos 3 juegos y emplear como máximo 7 kg de madera y 9 horas de trabajo. Cada ajedrez se vende por 40€ y cada dominó por 15€. ¿Cuántos juegos de ajedrez y dominó deben fabricarse diariamente para que la ganancia obtenida sea máxima? ¿Cuál será esa ganancia?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Suplente)

Solución.

	Ajedrez	Dominó	Restricciones
Madera (kg)	2	1	≤ 7
Mano de obra (h)	4	1	≤ 9

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de ajedreces fabricados"
  $y \equiv$ "Nº de dominós fabricados"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ①\ 2x + y \leq 7 & \to (0,7) \quad \& \quad (3{,}5, 0) \\ ②\ 4x + y \leq 9 & \to (0,9) \quad \& \quad (2{,}25, 0) \\ ③\ x + y \geq 3 & \to (0,3) \quad \& \quad (3,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

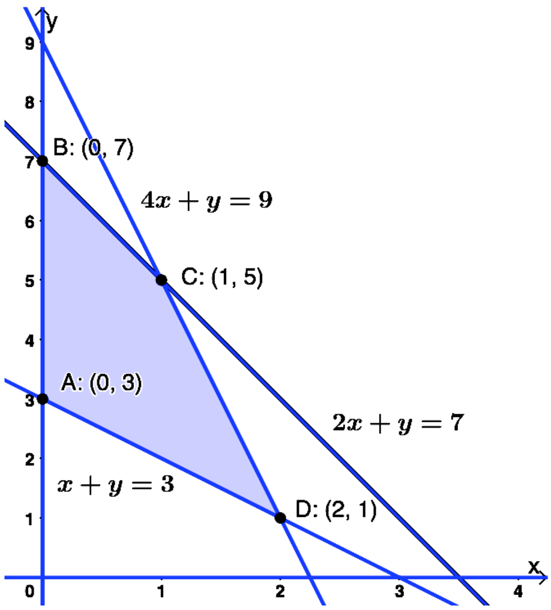
- `Función objetivo` $f(x,y) = 40x + 15y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	3	45
B	0	7	105
C	1	5	115
D	2	1	95

La *ganancia máxima* es de 115€ fabricando 1 ajedrez y 5 dominó cada día.



Ejercicio 20 (2,5 *puntos*)

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7 \quad \& \quad -x + 3y \leq 21 \quad \& \quad x + 2y \leq 19 \quad \& \quad x + y \leq 14$$

a) (1.4 puntos) Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) (0.6 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior así como los puntos donde se alcanzan.

c) (0.5 puntos) ¿Podría tomar la función objetivo $f(x)$ el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A - Extraordinario)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

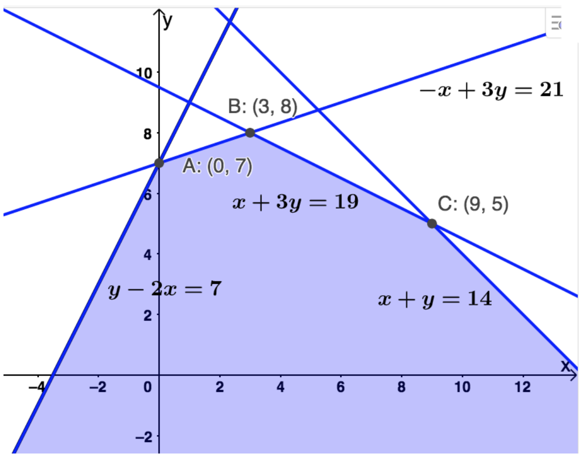
$$\begin{cases} ① \; y - 2x \leq 7 & \rightarrow (0, 7) \quad \& \quad (-3{,}5, 0) \\ ② \; -x + 3y \leq 21 & \rightarrow (0, 7) \quad \& \quad (-21, 0) \\ ③ \; x + 2y \leq 19 & \rightarrow (0, 9{,}5) \quad \& \quad (19, 0) \\ ④ \; x + y \leq 14 & \rightarrow (0, 14) \quad \& \quad (14, 0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = x + 4y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	7	28
B	3	8	35
C	9	5	29



b) El *máximo* de la función $f(x)$ es de 35 y se produce en el punto $B : (3, 8)$, mientras que no tiene *mínimo* porque la región factible no está acotada por abajo.

c) La función $f(x)$ no puede alcanzar el valor 40 pues es superior al *máximo*, pero sí que podría alcanzar el valor 20 pues no tiene *mínimo* al no estar acotada por abajo.

Ejercicio 21 (2,5 *puntos*)

Una sastrería dispone de 70 m^2 de tela de lino y de 150 m^2 de tela de algodón. En la confección de un traje se emplea 1 m^2 de tela de lino y 3 m^2 de tela de algodón, y en un vestido se necesitan 2 m^2 de tela de cada tipo. Se obtienen 60 euros de beneficio por cada traje y 70 euros por cada vestido. Determine el número de trajes y vestidos que se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio, así como dicho beneficio máximo.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A - Reserva)

Solución.

	Traje	Vestido	Existencias
Tela de lino (m^2)	1	2	70
Tela de algodón (m^2)	3	2	150

- `Incógnitas`

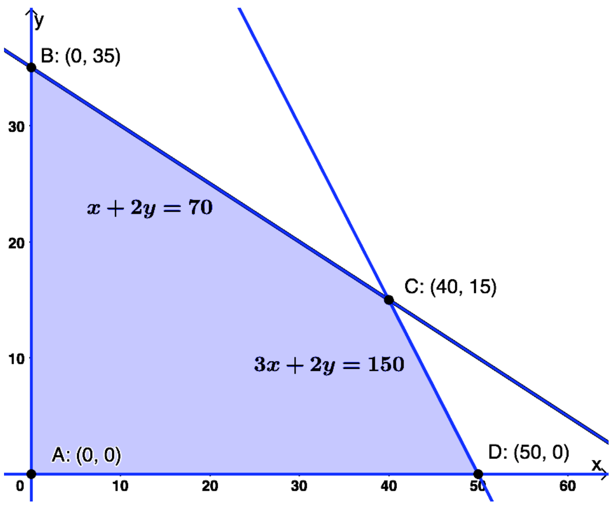
$$x \equiv \text{"Nº de trajes a confeccionar"}$$
$$y \equiv \text{"Nº de vestidos a confeccionar"}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + 2y \leq 70 & \rightarrow (0,35) \quad \& \quad (70,0) \\ ② \; 3x + 2y \leq 150 & \rightarrow (0,75) \quad \& \quad (50,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 60x + 70y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	35	2450
C	40	15	3450
D	50	0	3000

El *máximo beneficio* es de 3450 € y se obtiene vendiendo 40 trajes y 15 vestidos.

Ejercicio 22 (2,5 *puntos*)

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x + 2y \geq 7 \quad \& \quad 2x - y \leq 4 \quad \& \quad 4x - y \geq 1 \quad \& \quad 3x + 2y \leq 20$$

a) (2 puntos) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.

b) (0.5 puntos) Obtenga el valor máximo de la función $F(x, y) = x+3y$ en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A - Suplente)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

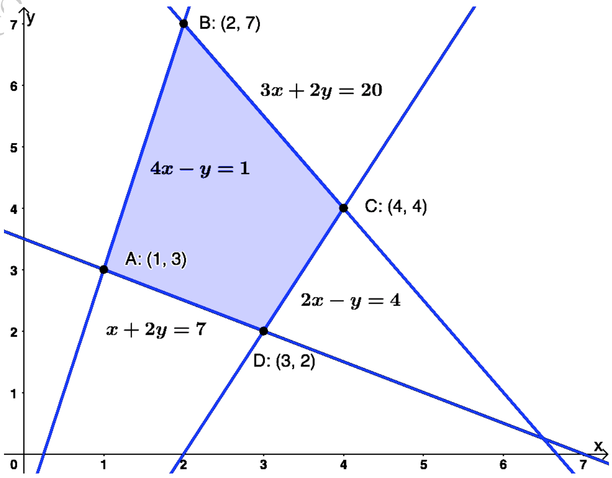
$$\begin{cases} ① \; x + 2y \geq 7 & \rightarrow (0, 3{,}5) \quad \& \quad (7, 0) \\ ② \; 2x - y \leq 4 & \rightarrow (0, -4) \quad \& \quad (2, 0) \\ ③ \; 4x - y \geq 1 & \rightarrow (0, -1) \quad \& \quad (1, 3) \\ ④ \; 3x + 2y \leq 20 & \rightarrow (0, 10) \quad \& \quad (6, 1) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad F(x, y) = x + 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$F(x, y)$
A	1	3	10
B	2	7	23
C	4	4	16
D	3	2	9



El *máximo* de $F(x, y)$ es de 23 y se produce en el punto $B : (2, 7)$.

Ejercicio 23 (2,5 *puntos*)

Sean la función $F(x,y) = 5x - 3y$ *y la región del plano* R *definida mediante las inecuaciones*

$$2x - 3y \leq 1 \quad \& \quad 4x + y \leq 9 \quad \& \quad x + y \leq 5 \quad \& \quad 9x - y \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1.3 puntos) Dibuje la región R *y calcule sus vértices.*

b) (0.5 puntos) Indique razonadamente si los puntos $A(2,2)$ *y* $B(1,3{,}5)$ *pertenecen a la región* R*.*

c) (0.7 puntos) Obtenga los puntos de la región R *donde* F *alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

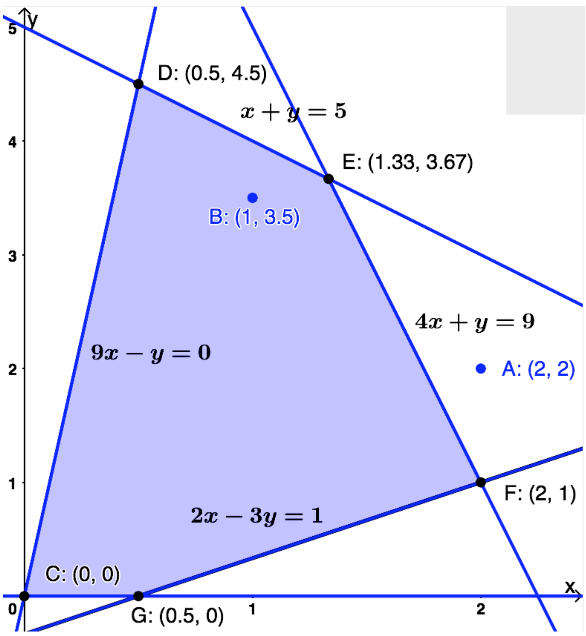
Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 2x - 3y \leq 1 & \rightarrow (2,1) \quad \& \quad (5,3) \\ ② \ 4x + y \leq 9 & \rightarrow (0,9) \quad \& \quad (2,1) \\ ③ \ x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ④ \ 9x - y \geq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (1,9) \\ ⑤ \ y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad F(x,y) = 5x - 3y$

- `Región factible R` Representamos la región y calculamos los vértices.
  El punto B pertenece a la región R mientras que el punto A no (no satisface las restricciones).



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $F(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$F(x,y)$
C	0	0	0
D	0,5	4,5	-11
E	$4/3$	$11/3$	$-13/3$
F	2	1	7
G	0,5	0	2,5

El *mínimo* de $F(x,y)$ es de -11 y se produce en el punto $D : (0{,}5, 4{,}5)$.
El *máximo* de $F(x,y)$ es de 7 y se produce en punto $F : (2,1)$.

Ejercicio 24 (2,5 *puntos*)

Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad. Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A - Extraordinario)

Solución.

	Anillo A	Anillo B	Restricción
Piebras mayor calidad (ud.)	1	3	≤ 200
Piebras menor calidad (ud.)	2	1	≤ 150
Tiempo montaje (min.)	20	50	≥ 1900

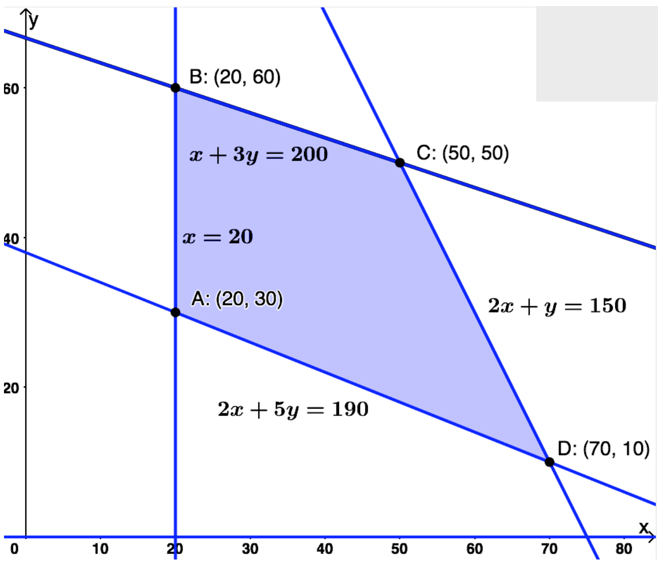
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº unidades del anillo A"
  $y \equiv$ "Nº unidades del anillo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + 3y \leq 200 \\ ② \ 2x + y \leq 150 \\ ③ \ 20x + 50y \geq 1900 \\ ④ \ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + 3y \leq 200 & \to (20,60) \quad \& \quad (200,0) \\ ② \ 2x + y \leq 150 & \to (0,150) \quad \& \quad (75,0) \\ ③ \ 2x + 5y \geq 190 & \to (0,38) \quad \& \quad (95,0) \\ ④ \ x \geq 20 & \to (20,0) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 21x + 50y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	30	1920
B	20	60	3420
C	50	50	3550
D	70	10	1970

El *máximo valor de la venta* es de 3550 €, y se obtiene fabricando y vendiendo 50 unidades de cada tipo de anillo.

Aragón

Ejercicio 25 (3,33 *puntos*)

Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100000 *euros para su apertura y generan unos ingresos de* 15000 *euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a* 6 *personas, requieren de* 150000 *euros de inversión y generan un ingreso de* 18000 *euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a* 25 *y se han comproetido a crear como mínimo* 60 *empleos.*

a) (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b) (5 puntos) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c) (2 puntos) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Sucursal rural	Sucursal urbana	Restricciones
Personas contratadas	3	6	≥ 60
Inversión (€)	100000	150000	≤ 3000000
Ingresos (€/mes)	15000	18000	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de sucursales rurales”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de sucursales urbanas”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

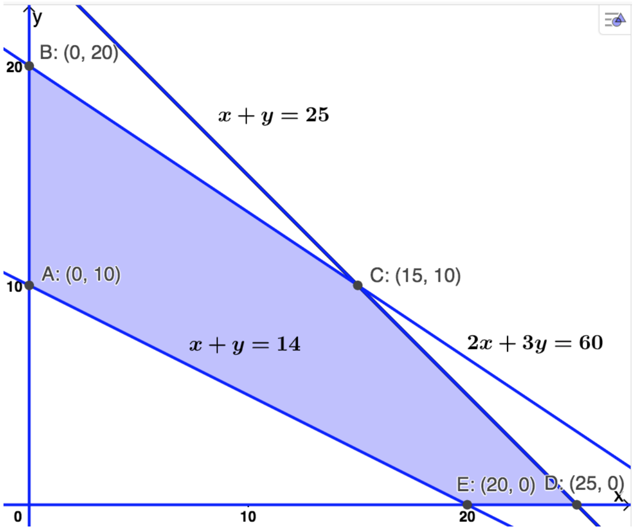
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 25 \\ ② \ 3x + 6y \geq 60 \\ ③ \ 100000x + 150000y \leq 3000000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 25 & \rightarrow (0,25) & \& & (25,0) \\ ② \ x + 2y \geq 20 & \rightarrow (0,10) & \& & (20,0) \\ ③ \ 2x + 3y \leq 60 & \rightarrow (0,20) & \& & (30,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` Hallamos la función Ingresos

$$f(x,y) = 15x + 18y \text{ (miles de €/mes)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	10	180
B	0	20	360
C	15	10	405
D	25	0	375
E	20	0	300



Los *ingresos mensuales máximos* son de 405000 € y se consiguen con la apertura de 15 sucursales rurales y 10 urbanas.

c) Con esta solución

- Se crean $3 \cdot 15 + 6 \cdot 10 = 105$ empleos
- Se invierten $100000 \cdot 15 + 150000 \cdot 10 = 3000000$ €, consumiendo todos los recursos disponibles.

Ejercicio 26 (3,33 *puntos*)

Fernanda dispone de 10000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30 % y la de los fondos de inversión sea del 5 %. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3000 euros y un mínimo de 1000 euros.

a) (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b) (5 puntos) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

c) (2 puntos) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35 % para las criptomonedas y 0 % para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1000 euros en criptomonedas y 5000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Inversión en criptomonedas (€)"
  $y \equiv$ "Inversión en fondos (€)"

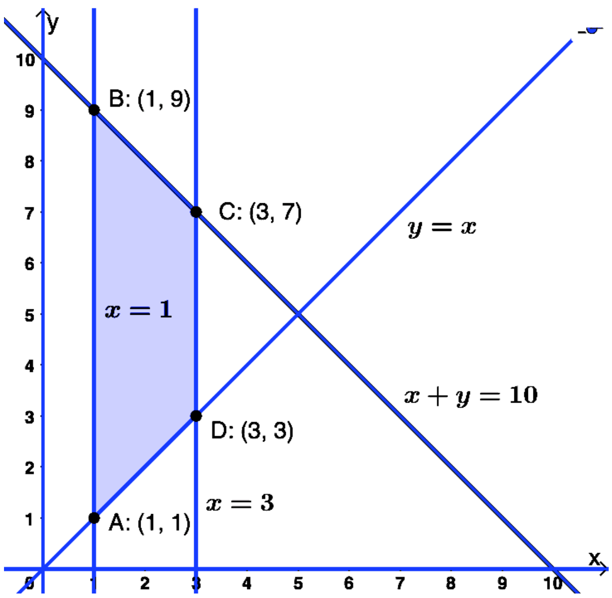
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación
$$\begin{cases} 1\;\; x+y \leq 10 & \to (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ 2\;\; y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ 3\;\; 1 \leq x \leq 3 & \to (1,0) \quad \& \quad (3,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0{,}3x + 0{,}05y$ (miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	1	0,35
B	1	9	0,75
C	3	7	1,25
D	3	3	1,05



El *rendimiento máximo* es de 1250 € y se obtiene invirtiendo 3000 € en criptomoneda y 7000 € en fondos de inversión.

c) La nueva función objetivo es $f(x,y) = 0{,}35x + 0y$ (en miles).
Evaluamos la misma en los vértices de la región factible que no ha cambiado:

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	1	0,35
B	1	9	0,35
C	3	7	1,05
D	3	3	1,05

El *riesgo mínimo* es de 350 y se produce en cualquier punto del segmento que une los vértices $A : (1,1)$ y $B : (1,9)$. El punto $(1,5)$ pertenece a este segmento por lo que en él la función objetivo (riesgo) será mínima.

Ejercicio 27 (3,33 *puntos*)

Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. el lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a) (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b) (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

	Lote A	Lote B	Restricción
Jamones	1	1	≤ 120
Botellas de vino	2	5	≤ 390
Botellas de cava	0	4	≤ 240

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes A"
  $y \equiv$ "Nº de lotes B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

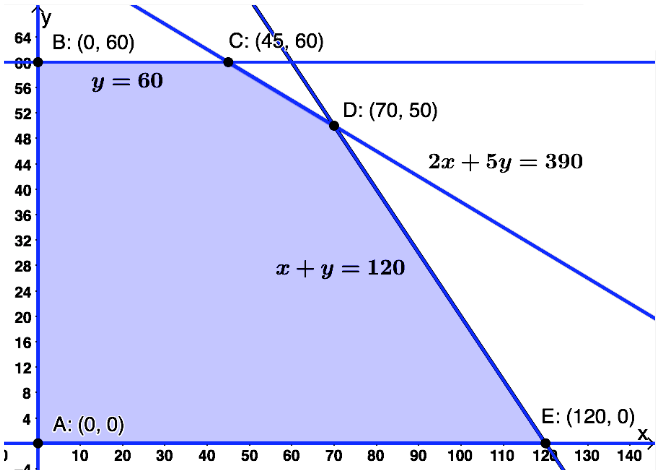
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 120 \\ ② \; 2x + 5y \leq 390 \\ ③ \; 4y \leq 240 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x + y \leq 120 & \to (0,120) \quad \& \quad (120,0) \\ ② \; 2x + 5y \leq 390 & \to (0,78) \quad \& \quad (195,0) \\ ③ \; y \leq 60 & \to (0,60) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 90x + 180y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	60	10800
C	45	60	14850
D	70	50	15300
E	120	0	10800



El *ingreso máximo* es de 15300 €, que se obtiene vendiendo 70 lotes A y 50 lotes B.

b) Evaluamos los artículos de cada lote:

	Lote A	Lote B	Total	Existencias
Jamones	70	50	120	120
Botellas de vino	$70 \cdot 2$	$50 \cdot 5$	390	390
Botellas de cava	0	$50 \cdot 4$	200	240

Por lo tanto con la solución que maximiza los ingresos se agotan las existencias de jamones y botellas de vino y sobran 40 botellas de cava.

Ejercicio 28 (3,33 *puntos*)

Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

	Fertilizante A	Fertilizante B	Restricción
Nitrógeno (ud.)	3	2	≥ 180
Fósforo (ud.)	5	2	≥ 200
Potasio (ud.)	1	2	≥ 80

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de sacos de fertilizante A"
  $y \equiv$ "Nº de sacos de fertilizante B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

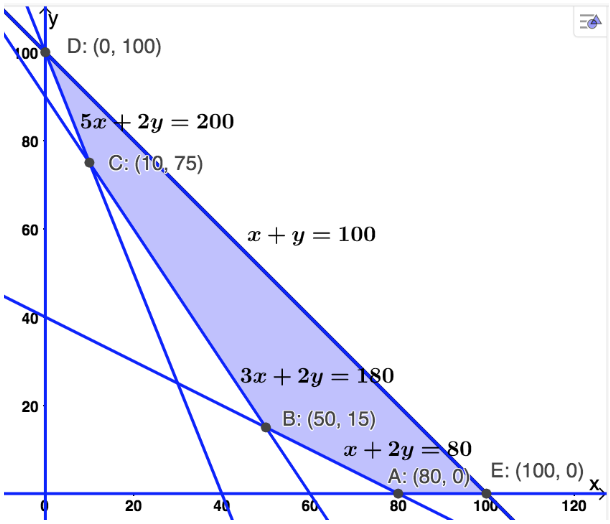
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 100 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (100,0) \\ ② \ 3x + 2y \geq 180 & \rightarrow (0,90) \quad \& \quad (60,0) \\ ③ \ 5x + 2y \geq 200 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (40,0) \\ ④ \ x + 2y \geq 80 & \rightarrow (0,40) \quad \& \quad (80,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 4x + 6y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

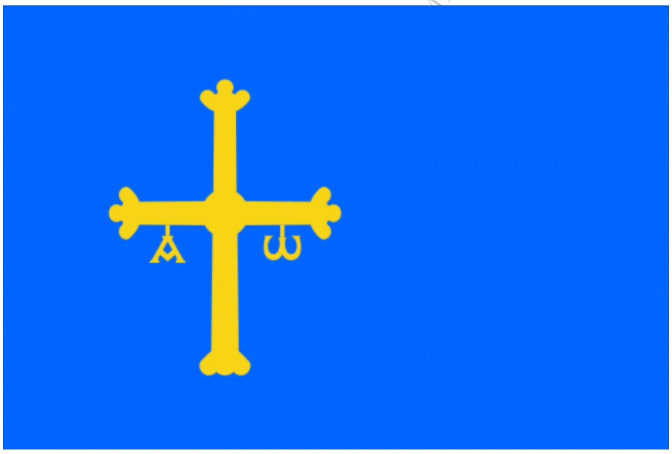
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	80	0	320
B	50	15	290
C	10	75	490
D	0	100	600
E	100	0	400



El *gasto mínimo* es de 290 € comprando 50 sacos del fertilizante A y 15 del B.

Asturias



Ejercicio 29 (2,5 *puntos*)

En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

a) (1.75 puntos) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de lavadoras"
  $y \equiv$ "Nº de frigoríficos"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

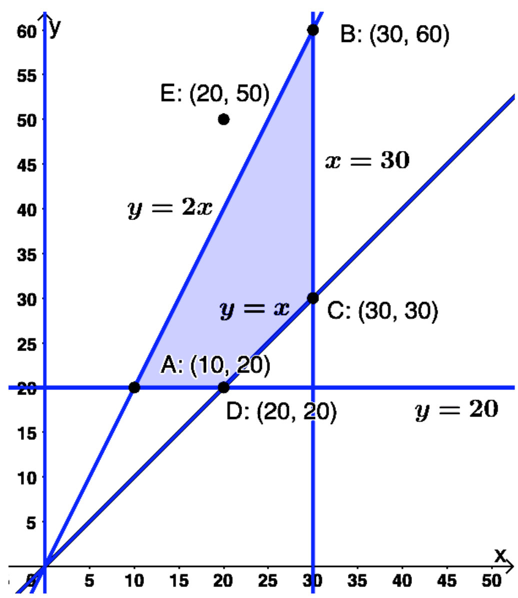
$$\begin{cases} ① \; y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ ② \; y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (10,20) \\ ③ \; y \geq 20 & \to (0,20) \\ ④ \; x \leq 30 & \to (30,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 200x + 250y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	20	7000
B	30	60	21000
C	30	30	13500
D	20	20	9000



Como el punto $(20, 50)$ no pertenece a la región factible, no puede haber 20 lavadoras y 50 frigoríficos

El *máximo beneficio* es de 21000€ vendiendo 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

b) Si lo que se quiere es minimizar el número de lavadoras, la función objetivo sería

$$f(x, y) = x$$

Evaluamos la función en los vértices de la región factible

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	10	20	10
B	30	60	30
C	30	30	30
D	20	20	20

Luego el *número mínimo* de lavadoras en el almacén, respetando todas las restricciones, se consigue con 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

Ejercicio 30 (2,5 *puntos*)

Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

a) (1.75 puntos) ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?

b) (0.75 puntos) ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?,

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

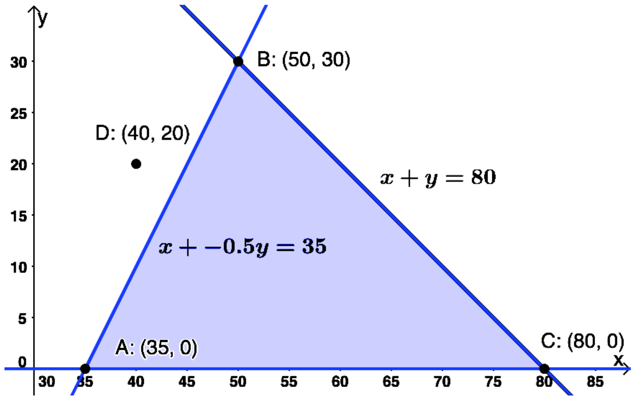
- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de preguntas contestadas correctamente"
  $y \equiv$ "Nº de preguntas falladas"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 80 & \rightarrow (0, 80) \quad \& \quad (80, 0) \\ ② \; x - 0{,}5y \geq 35 & \rightarrow (50, 30) \quad \& \quad (35, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y
A	35	0
B	50	30
C	80	0



Los puntos de la región factible con coordenadas enteras son los que cumplen todas las restricciones del problema.
El punto $D : (40, 20)$ no está en la región factible por lo que no se puede aprobar con 40 aciertos y 20 fallos.

b) La `Función objetivo` a maximizar es

$$f(x, y) = 80 - x - y$$

, que representa el número de preguntas sin responder. Así que evaluamos ésta en los vértices de la región factible:

Por tanto el *máximo* número de preguntas sin contestar es de 45, aprobando el test si se aciertan 35 y el resto se dejan sin contestar.

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	35	0	45
B	50	30	0
C	80	0	0

Ejercicio 31 (2,5 *puntos*)

Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISION	*RADIO*
Audiencia por anuncio	100000	18000
Coste por anuncio	2100€	300€

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50 % de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10 % de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24000€.

a) (1.75 puntos) ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) (0.75 puntos) Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de anuncios en televisión"
  $y \equiv$ "Nº de anuncios en radio"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; y \geq 0{,}5 \cdot (x+y) \\ ② \; x \geq 0{,}1 \cdot (x+y) \\ ③ \; 2100x + 300y \leq 24000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; y \geq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ ② \; y \leq 9x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (2,18) \\ ③ \; 7x + y \leq 80 & \rightarrow (0,80) \quad \& \quad (10,10) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

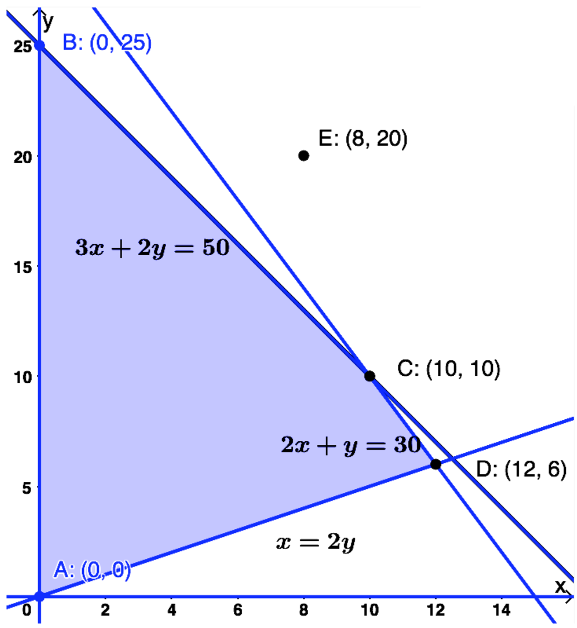
- `Función objetivo:`

$$f(x,y) = 100x + 18y \text{ (miles)}$$

- `Región factible:` No se puede hacer 10 anuncios de TV y 20 de radio pues $D : (10, 20)$ no es de la región factible.

- `Optimización de F.O.`

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	5	45	1310
C	10	10	1180



La *máxima audiencia* es de 1310000 contratando 5 aununcios de TV y 45 de radio.

Ejercicio 32 (2,5 *puntos*)

Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30000 euros; cada vehículo pequeño, 20000 euros y dispone de un presupuesto total de 500000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) (1.75 puntos) ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) (0.75 puntos) El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

	Vehículo grande	Vehículo pequeño	Restricción
Coste (miles €/ud.)	30	20	≤ 500
Coste mantenimiento (€)	600	300	≤ 9000

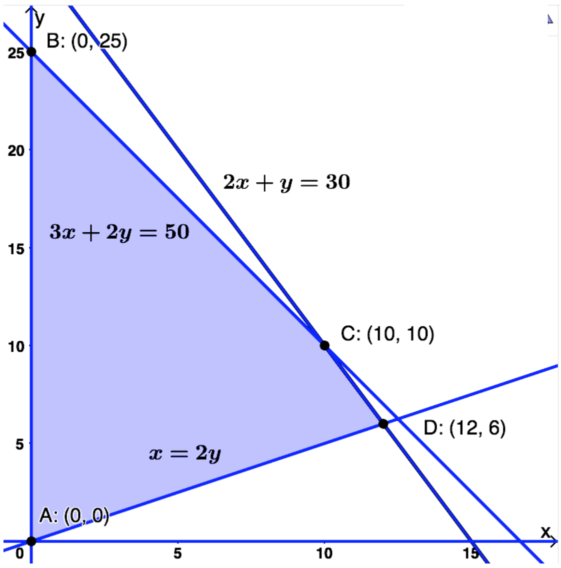
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de vehículos grandes"
  $y \equiv$ "Nº de vehículos pequeños"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; 30x + 20y \leq 500 \\ ② \; x \leq 2y \\ ③ \; 600x + 300y \leq 9000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; 3x + 2y \leq 50 & \to (0,25) \quad \& \quad (10,10) \\ ② \; x \leq 2y & \to (0,0) \quad \& \quad (20,10) \\ ③ \; 2x + y \leq 30 & \to (0,30) \quad \& \quad (15,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 10x + 6y$ (miles de €)

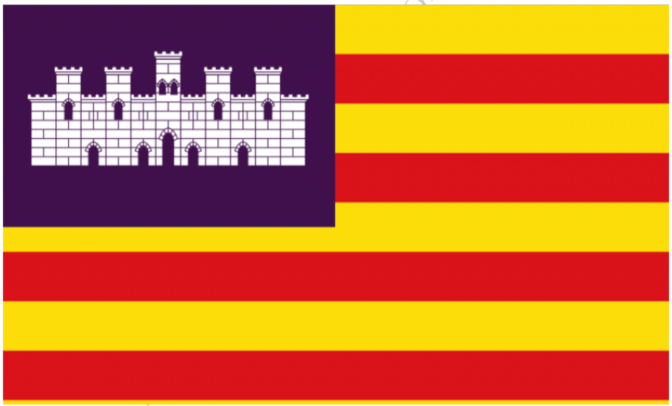
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	25	150
C	10	10	160
D	12	6	156

El *beneficio máximo* es de 160000 €, comprando 10 vehículos de cada tipo.
El punto $E : (8, 20) \notin R.F.$, por lo que no debe comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños.

Islas Baleares



Ejercicio 33 (2,5 *puntos*)

En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0,9 m^2 *de cuero y* 8 *horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan* 1,2 m^2 *de cuero y* 4 *horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de* 60 m^2 *de cuero y puede dedicar un máximo de* 400 *horas de trabajo. El taller cobra* 30 *euros por una bolsa del primer modelo y* 25 *por una del segundo.*

a) (4 puntos) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) (4 puntos) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Bolsa A	Bolsa B	Existencias
Cuero ($m^2/bolsa$)	0,9	1,2	≤ 60
Mano obra (horas)	8	4	≤ 400

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de bolsas tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de bolsas tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

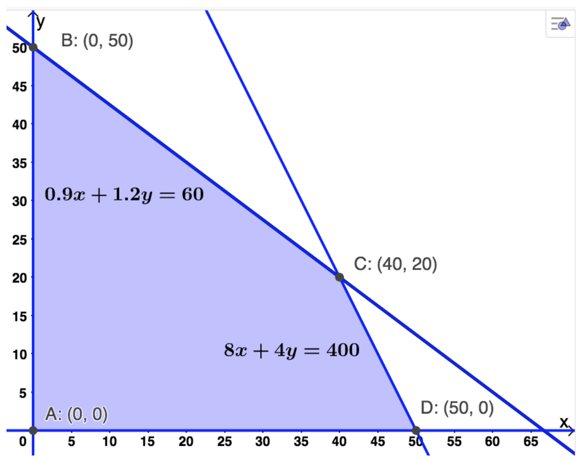
$$\begin{cases} ① \ 0{,}9x + 1{,}2y \leq 60 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (20,35) \\ ② \ 8x + 4y \leq 400 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (50,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 30x + 25y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	50	1250
C	40	20	1700
D	50	0	1500



El *máximo beneficio* es de 1700 €, fabricando 40 Bolsas de tipo A y 20 de tipo B.

Ejercicio 34 (2,5 *puntos*)

El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) *(4 puntos) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal.*

b) *(4 puntos) Dibuje la región factible para la solución indicando las rectas y vértices que la delimitan.*

c) *(2 puntos) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obteneer un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

	Paquete tipo A	Paquete tipo B	Existencias
Bolsa de pipas (ud.)	1	1	10
Chicles (ud.)	2	4	30
Bombones (ud.)	2	1	18
Precio venta (€/paquete)	1,5	2	18

- `Incógnitas:`

$$x \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de paquetes de tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de paquetes de tipo } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; 2x + 4y \leq 30 & \rightarrow (0,7{,}5) \quad \& \quad (15,0) \\ ③ \; 2x + y \leq 18 & \rightarrow (0,18) \quad \& \quad (9,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

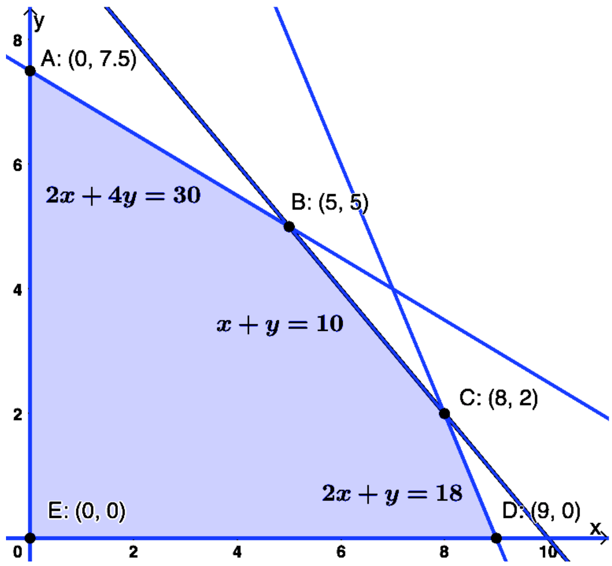
- `Función objetivo:` Queremos maximizar el beneficio.

$$f(x,y) = 1{,}5x + 2y \text{ (euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	7,5	15
B	5	5	17,5
C	8	2	16
D	9	0	13,5
E	0	0	0



El *máximo beneficio* es de 17,5 €, que se obtiene vendiendo 5 paquetes de cada tipo.

Ejercicio 35 (2,5 *puntos*)

Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- *Arena, que pesa 1,6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80€ por metro cúbico.*

- *Gravilla, que pesa 1,8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100€ por metro cúbico.*

- *Ceniza, que pesa 0,5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25€ por metro cúbico.*

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) (4 puntos) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables.

b) (4 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

	Arena	Gravilla	Ceniza	Restricción
Peso (T/m^3)	1,6	1,8	0,5	≤ 18
Precio (€$/m^3$)	80	100	25	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Volumen de arena (m^3)"
  $y \equiv$ "Volumen de gravilla (m^3)"
  $12-(x+y) \equiv$ "Volumen de ceniza (m^3)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

  - La capacidad del camión es 12 $m^3 \implies x+y \leq 12$
  - Peso máximo 18 $T \Rightarrow 1{,}6x + 1{,}8y + 0{,}5 \cdot [12-(x+y)] \leq 18 \Rightarrow 11x + 13y \leq 120$

$$\begin{cases} ① \ x+y \leq 12 & \to (0,12) \quad \& \quad (12,0) \\ ② \ 11x+13y \leq 120 & \to (5,5) \quad \& \quad (10{,}9,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

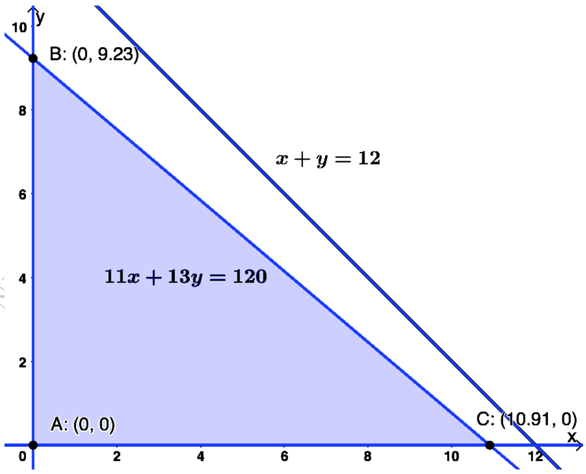
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 80x + 100y + 25 \cdot [12-(x+y)] = 55x + 75y + 300 \text{ (euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	9,23	992,25
C	10,91	0	900,05



El *precio máximo* es de 992,25€, que se obtiene transportando únicamente 9,23 m^3 de gravilla y $12-(0+9{,}23) = 2{,}77$ m^3 de ceniza. En cuanto a toneladas serían $9{,}23 \cdot 1{,}8 = 16{,}61$ toneladas de gravilla y $2{,}77 \cdot 0{,}5 = 1{,}385$ toneladas de ceniza.

Ejercicio 36 (2,5 *puntos*)

En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

- *Oferta A:* 2 *ensaimadas,* 2 *cocas de patata,* 4 *barras de chocolate, que se venderá a* 4 *€.*
- `Oferta B:` 6 *ensaimadas,* 3 *cocas de patata,* 3 *barras de chocolate, que se venderá a* 8 *€.*

Disponen de 120 *ensaimadas,* 60 *cocas de patata y* 72 *barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.*

a) *(3 puntos) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal en dos variables.*

b) *(5 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.*

c) *(2 puntos) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

	Oferta A	Oferta B	Restricción
Ensaimadas (ud.)	2	6	≤ 120
Cocas de patata (ud.)	2	3	≤ 60
Barras de chocolate (ud.)	4	3	≤ 72
Precio venta (€/oferta)	4	8	

- `Incógnitas:`

$$x \equiv \text{"Nº de ofertas } A\text{"}$$
$$y \equiv \text{"Nº de ofertas } B\text{"}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

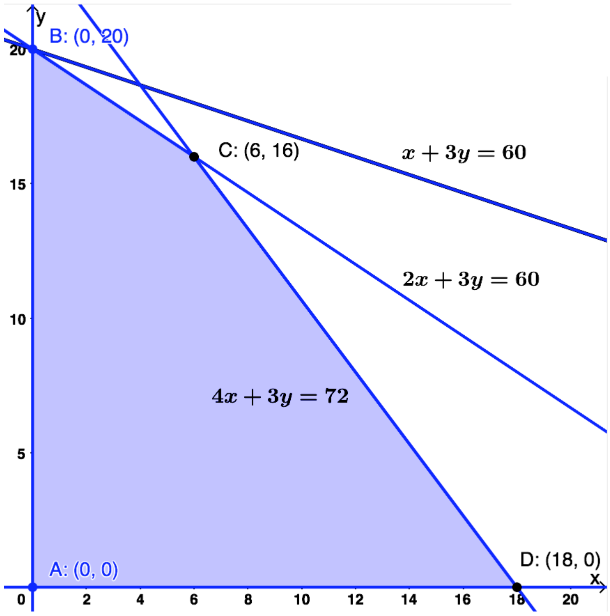
$$\begin{cases} ① \ 2x+6y \leq 120 \\ ② \ 2x+3y \leq 60 \\ ③ \ 4x+3y \leq 72 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+3y \leq 60 & \to (0,20) \quad \& \quad (60,0) \\ ② \ 2x+3y \leq 60 & \to (0,20) \quad \& \quad (30,0) \\ ③ \ 4x+3y \leq 72 & \to (0,24) \quad \& \quad (18,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 4x+8y \quad \text{(euros)}$$

- **Región factible** Representamos la región y calculamos los vértices.

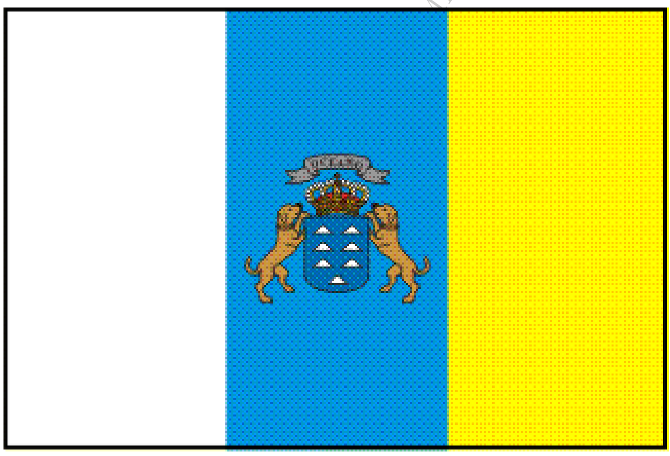
- **Optimización de F.O.** Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	20	160
C	6	16	152
D	18	0	72

El *beneficio máximo* es de 160 €, que se produce vendiendo tan solo 20 ofertas B.

Islas Canarias



Ejercicio 37 (2,5 *puntos*)

Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. la fábrica obtiene un beneficio de 2€ por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50€ por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

a) (1 punto) Forumular el correspondiente problema de programación lineal.

b) (0.5 puntos) Representar la región factible.

c) (1 punto) ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

	Tarrina pequeña	Tarrina grande	Producción
Helado de turrón (kg)	0,2	0,5	≤ 400
Helado de pistacho (kg)	0,15	0,3	≤ 255
	≥ 200	≥ 50	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de tarrinas pequeñas"
  $y \equiv$ "Nº de tarrinas grandes"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

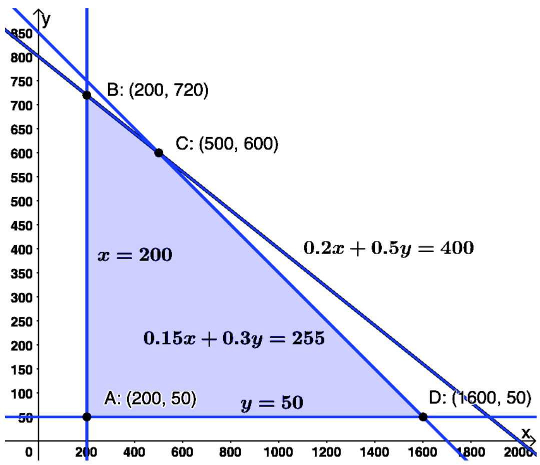
$$\begin{cases} ① \ 0{,}2x + 0{,}5y \leq 400 & \rightarrow (0, 800) \quad \& \quad (2000, 0) \\ ② \ 0{,}15x + 0{,}3y \leq 255 & \rightarrow (0, 1700) \quad \& \quad (850, 0) \\ ③ \ x \geq 200 & \rightarrow (200, 0) \\ ④ \ y \geq 50 & \rightarrow (0, 50) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + 4{,}5y$ (euros)

- `Optimización de F.O.`

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	200	50	625
B	200	720	3640
C	500	600	3700
D	1600	50	3425

El *máximo beneficio* es de 3700€, vendiendo 500 tarrinas pequeñas y 600 grandes.



Ejercicio 38 (2,5 *puntos*)

Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40€, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45€. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

a) (1 punto) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) (0.5 puntos) Representar la región factible.

c) (1 punto) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

Solución.

	Oferta A	Oferta B	Restricciones
Aguacateros	1	2	≤ 350
Mangos	2	1	≤ 400
Precio (€/lote)	40	45	
	≥ 80	≥ 90	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes de la oferta A"
  $y \equiv$ "Nº de lotes de la oferta B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

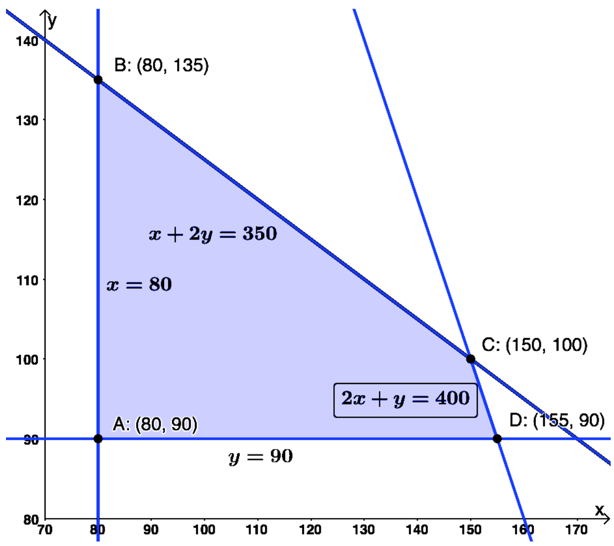
$$\begin{cases} ①\ x + 2y \leq 350 & \rightarrow (0, 175) \quad \& \quad (350, 0) \\ ②\ 2x + y \leq 400 & \rightarrow (0, 400) \quad \& \quad (200, 0) \\ ③\ x \geq 80 & \rightarrow (80, 0) \\ ④\ y \geq 90 & \rightarrow (0, 90) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 40x + 45y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	80	90	7250
B	80	135	9275
C	150	100	10500
D	155	90	10250

La *máxima recaudación* es de 10500€, vendiendo 150 lotes de la oferta A y 100 de la B.



Ejercicio 39 (2,5 *puntos*)

> *Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.*
> *Para maximizar el beneficio diario:*
>
> *a) (1 punto) Formular el correspondiente problema de programación lineal.*
>
> *b) (0.5 puntos) Representar la región factible.*
>
> *c) (1 punto) ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?*
>
> *(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)*

Solución.

	Modelo A	Modelo B	Restricción
Tiempo de fabricación (h)	3	6	$\leq 12 \cdot 8$
Beneficio (€)	70	160	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de relojes del modelo A"
  $y \equiv$ "Nº de relojes del modelo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

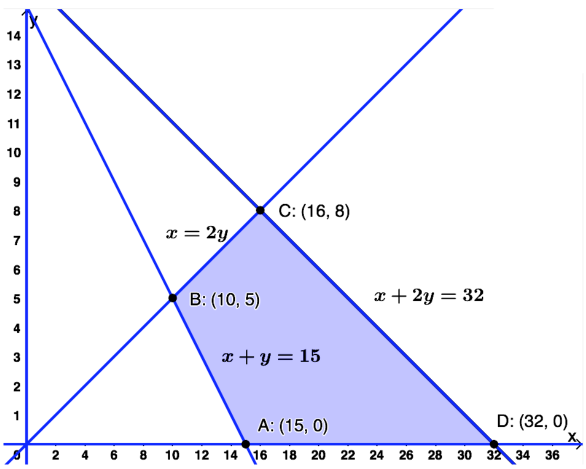
$$\begin{cases} ① \ 3x + 6y \leq 96 \\ ② \ x + y \geq 15 \\ ③ \ y \leq \dfrac{x}{2} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + 2y \leq 32 & \to (0,16) \quad \& \quad (32,0) \\ ② \ x + y \geq 15 & \to (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ③ \ x \geq 2y & \to (0,0) \quad \& \quad (20,10) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 70x + 160y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	15	0	1050
B	10	5	1500
C	16	8	2400
D	32	0	2240

El *beneficio máximo* es de 2400 €, produciendo 16 relojes del modelo A y 8 del B.



Ejercicio 40 (2,5 *puntos*)

Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA necesita 2 *metros cuadrados de hierro y* 2 *metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita* 1 *metro cuadrado de hierro y* 3 *metros cuadrados de madera. Dispone un stock de* 1000 *metros cuadrados de hierro y* 1500 *metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de* 250 *euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de* 350 *euros.*

a) *(1 punto) Formular el correspondiente problema de programación lineal.*

b) *(0.5 puntos) Representar la región factible y determinar sus vértices.*

c) *(1 punto) ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

	Puerta TIMANFAYA	Puerta TABURIENTE	Restricción
Hierro (m^2)	2	1	≤ 1000
Madera (m^2)	2	3	≤ 1500

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de puertas de tipo TIMANFAYA"
  $y \equiv$ "Nº de puertas de tipo TABURIENTE"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; 2x + y \leq 1000 & \to (0, 1000) \quad \& \quad (500, 0) \\ ② \; 2x + 3y \leq 1500 & \to (0, 500) \quad \& \quad (750, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

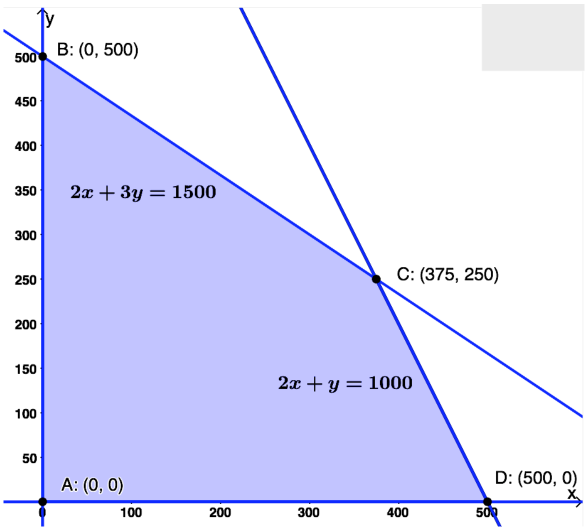
- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 0{,}25x + 0{,}35y$ (miles €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	500	175
C	375	250	181,25
D	500	0	125

El *beneficio máximo* es de 181250 € vendiendo 375 puertas tipo TIMANFAYA y 250 tipo TABURIENTE.



Cantabria

Ejercicio 41 (2,5 *puntos*)

Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44 €. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 €.

a) (0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describe el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?

d) (0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Pack A	Pack B	Existencias
Tartas de queso (ud)	4	2	≤ 400
Quesadas (ud)	12	3	≤ 900
Beneficio (€/pack)	44	16	≤ 900

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de packs A"
  $y \equiv$ "Nº de packs B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

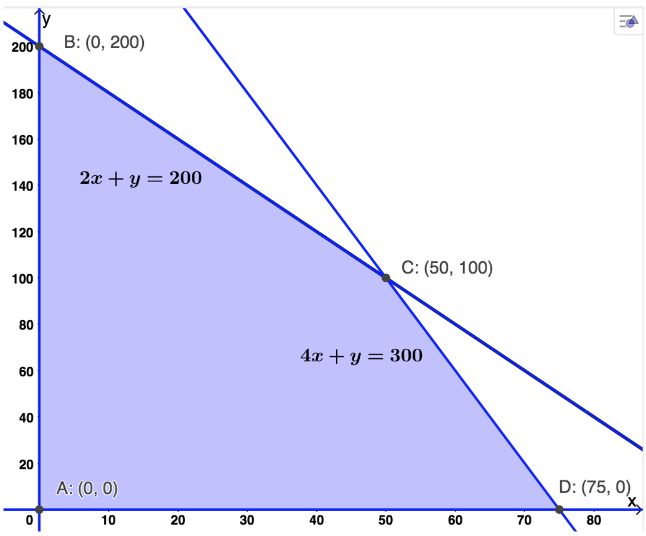
$$\begin{cases} ① \ 4x+2y \leq 400 \\ ② \ 12x+3y \leq 900 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 2x+y \leq 200 & \rightarrow (0,200) \quad \& \quad (100,0) \\ ② \ 4x+y \leq 300 & \rightarrow (0,300) \quad \& \quad (75,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 44x + 16y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	200	3200
C	50	100	3800
D	75	0	3300

El *máximo beneficio* es de 3800 €, vendiendo 50 packs A y 100 packs B.



Ejercicio 42 (2,5 *puntos*)

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

a) (0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

d) (0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

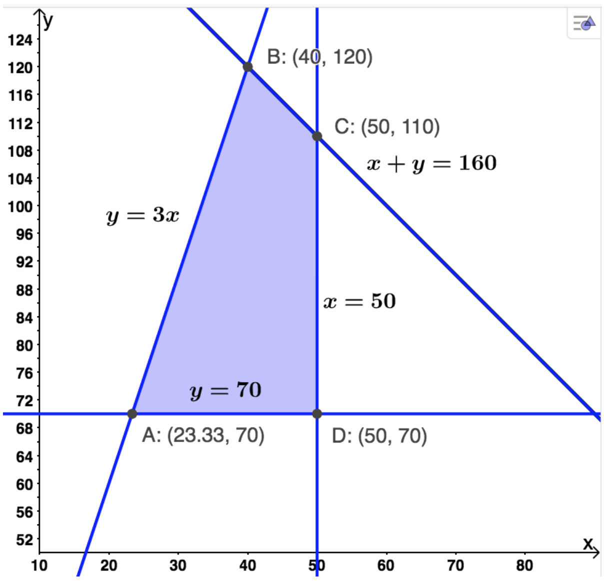
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de vacas pardas"
  $y \equiv$ "Nº de vacas frisonas"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 160 \\ ② \ x \leq 50 \\ ③ \ y \geq 70 \\ ④ \ x \geq \dfrac{y}{3} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 160 & \rightarrow (0,160) \quad \& \quad (160,0) \\ ② \ x \leq 50 & \rightarrow (50,0) \\ ③ \ y \geq 70 & \rightarrow (0,70) \\ ④ \ y \leq 3x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (50,150) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 350x + 500y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	23,33	70	43166,7
B	40	120	74000
C	50	110	72500
D	50	70	52500

El *beneficio máximo* es de 74000 €, vendiendo 40 vacas pardas y 120 frisonas.

Ejercicio 43 (2,5 *puntos*)

El ayuntamiento dispone de 48000 € *para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de* 50 *hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de* 10 *al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de* 480 m^3 *anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita* 8 m^3 *de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los* 4 m^3 *anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de* 400 €*, siendo esta cantidad de* 800 € *para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de* 450 *kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de* 600 *kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.*

a) (0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

d) (0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicha producción?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:`

$$x \equiv \text{“Superficie dedicada al cultivo de hortalizas (Ha)”}$$
$$y \equiv \text{“Superficie dedicada al cultivo de árboles frutales (Ha)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x \leq 50 \\ ② \; y \geq 10 \\ ③ \; 8x + 4y \leq 480 \\ ④ \; 400x + 800y \leq 48000 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x \leq 50 & \to (50,0) \\ ② \; y \geq 10 & \to (0,10) \\ ③ \; 2x + y \leq 120 & \to (0,120) \quad \& \quad (60,0) \\ ④ \; x + 2y \leq 120 & \to (0,60) \quad \& \quad (120,0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

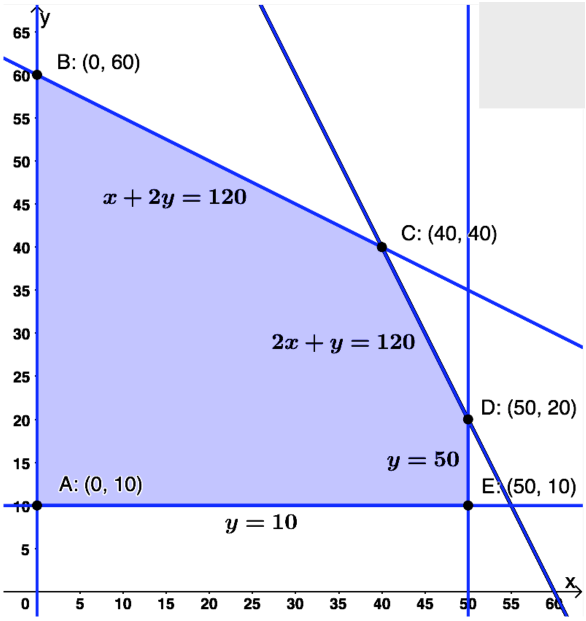
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 450x + 600y \text{ (kg)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	10	6000
B	0	60	36000
C	40	40	42000
D	50	20	34500
E	50	10	28500



La *producción máxima anual total* es de 42000 kg y se obtiene destinando 40 Ha de terreno al cultivo de hortalizas y otras 40 al de árboles frutales.

Ejercicio 44 (2,5 *puntos*)

Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000 € por cada utilitario y de 40000 € por cada deportivo:

a) (0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?

d) (0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de utilitarios"
  $y \equiv$ "Nº de deportivos"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 120 & \rightarrow (0,120) \quad \& \quad (120,0) \\ ② \ x \leq 90 & \rightarrow (90,0) \\ ③ \ y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \\ ④ \ x \geq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (40,20) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

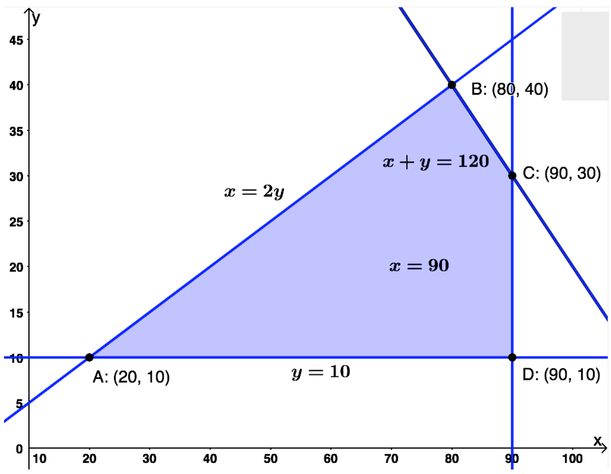
- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 25x + 40y$ (miles €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

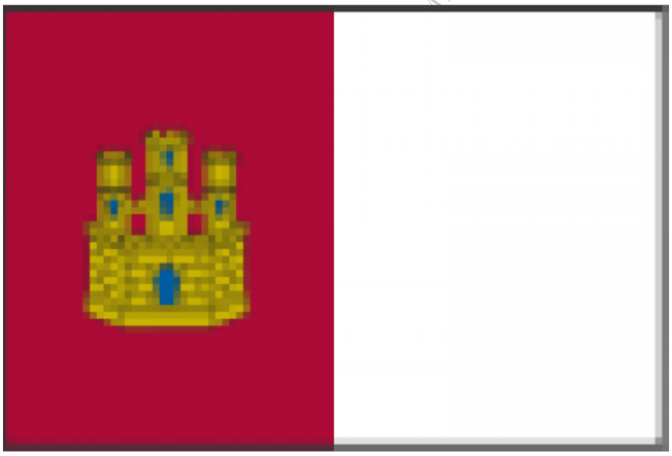
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	10	900
B	80	40	3600
C	90	30	3450
D	90	10	2650

El *beneficio máximo* es de 360000 €, que se obtiene adquiriendo 80 utilitarios y 40 deportivos.



Castilla-La Mancha



Ejercicio 45 (1,5 *puntos*)

Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 € por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.

a) (1.25 puntos) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) (0.25 puntos) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Sección 1 - Bloque 1)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de zapatillas de mujer"
  $y \equiv$ "Nº de zapatillas de hombre"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; 100 \le y \le 600 & \to (0,100) \quad \& \quad (0,600) \\ ② \; x \ge 400 & \to (400,0) \\ ③ \; x + y \le 1200 & \to (0,1200) \quad \& \quad (1200,0) \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

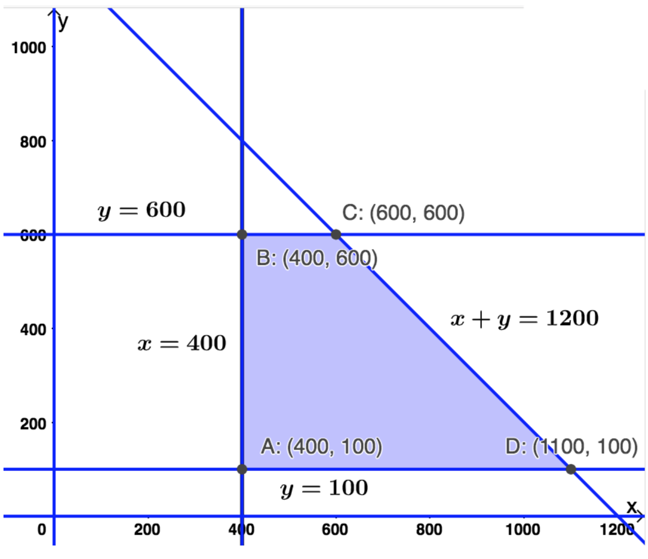
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 28x + 30y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	400	100	14200
B	400	600	29200
C	600	600	34800
D	1100	100	33800



El máximo beneficio es de 348000 € vendiendo 600 pares de zapatilla de mujer y 600 pares de zapatillas de hombre.

Ejercicio 46 (1,5 *puntos*)

En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 8x + 3y$ sujeta a las siguientes restriccioones:

$$\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1.25 puntos) Dibuja la región factible y determina sus vértices.

b) (0.25 puntos) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Sección 1 - Bloque 1)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ① \; 2x + y \leq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (2,0) \\ ② \; x + 2y \geq 2 & \to (0,1) \quad \& \quad (2,0) \\ ③ \; y \leq 3 & \to (0,3) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

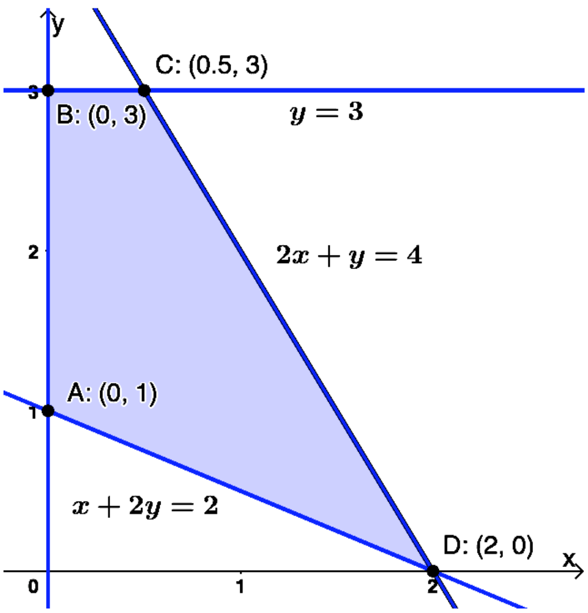
- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 8x + 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	1	3
B	0	3	9
C	0,5	3	13
D	2	0	16

El *mínimo* de $f(x,y)$ es de 3 y se produce en el punto $A : (0,1)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de 16 y se produce en el punto $D : (2,0)$.



Ejercicio 47 (1,5 *puntos*)

En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = -x - 5y + 10$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) (1.25 puntos) Dibuja la región factible y determina sus vértices.

b) (0.25 puntos) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Sección 1 - Bloque 1)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

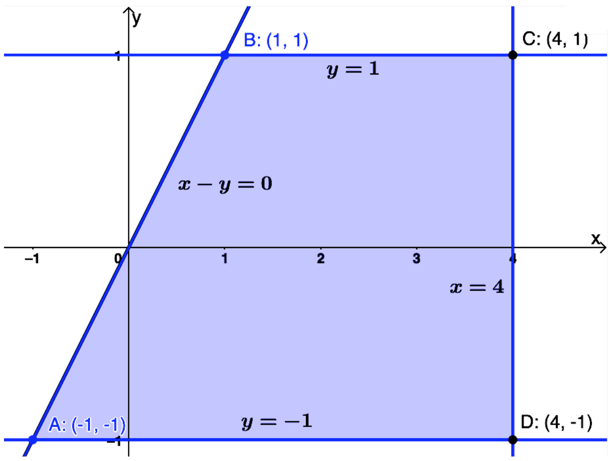
$$\begin{cases} ① \ x - y \geq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (2,2) \\ ② \ -4 \leq x \leq 4 & \rightarrow (-4,0) \quad \& \quad (4,0) \\ ③ \ -1 \leq y \leq 1 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (0,1) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = -x - 5y + 10$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	-1	-1	16
B	1	1	4
C	4	1	1
D	4	-1	11



b) El *mínimo* de $f(x,y)$ es de 1 y se produce en el punto $C : (4,1)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de 16 y se produce en el punto $A : (-1,-1)$.

Ejercicio 48 (1,5 *puntos*)

En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 4x + 5y - 3$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) (1.25 puntos) Dibuja la región factible y determina sus vértices.

b) (0.25 puntos) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Sección 1 - Bloque 1)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

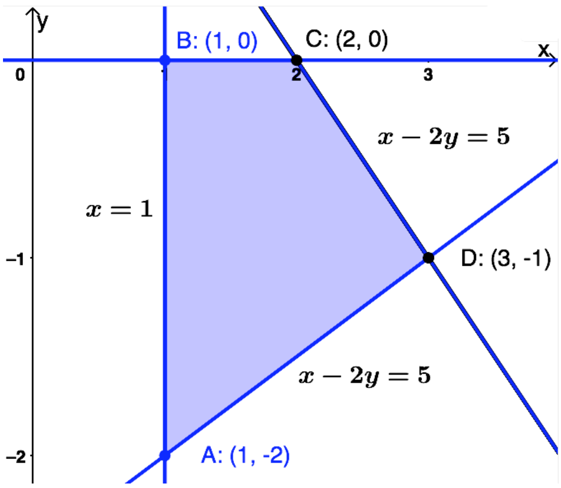
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (2,0) \\ ② \ x - 2y \leq 5 & \rightarrow (5,0) \quad \& \quad (1,-2) \\ ③ \ y \leq 0 & \\ ④ \ x \geq 1 & \rightarrow (1,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 4x + 5y - 3$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

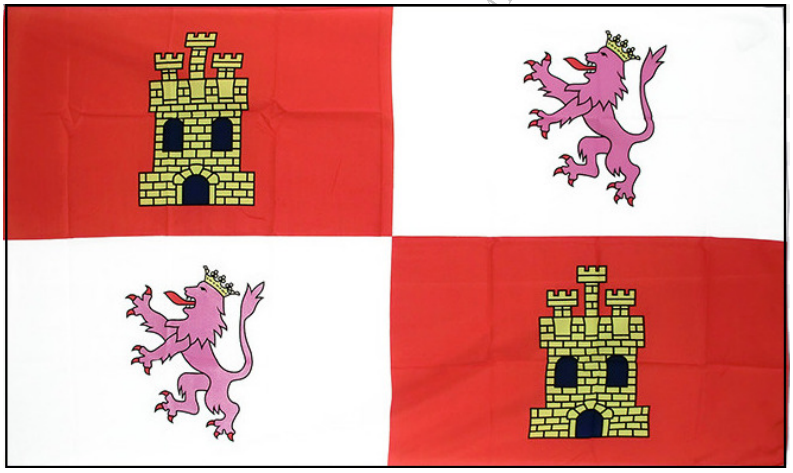
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	-2	-9
B	1	0	1
C	2	0	5
D	3	-1	4



b) El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -9 y se produce en el punto $A : (1,-2)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de 5 y se produce en el punto $C : (2,0)$.

Castilla y León



Ejercicio 49 (3 *puntos*)

> *Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?*
>
> *(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de camiones para llevar agua potable"
  $y \equiv$ "Nº de camiones para llevar medicinas"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 27 & \rightarrow (0,27) \quad \& \quad (27,0) \\ ② \ x \geq 12 & \rightarrow (12,0) \\ ③ \ y \geq \dfrac{x}{2} & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (20,10) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

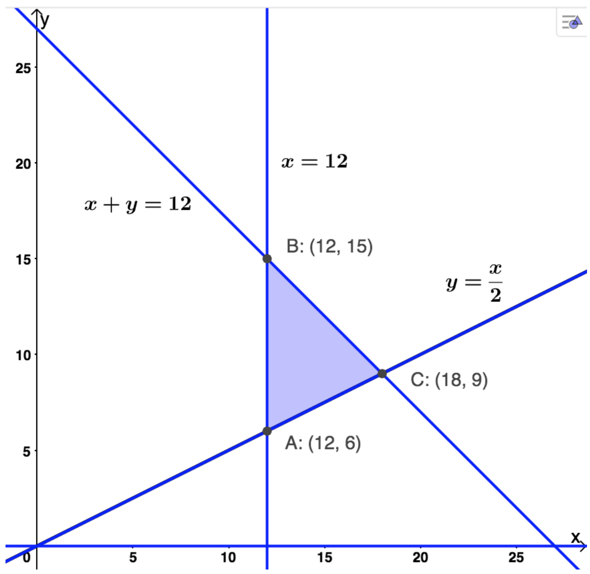
- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 9000x + 6000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	12	6	144000
B	12	15	198000
C	18	9	216000

El *coste mínimo* es de 144000 € y se consigue con un convoy formado por 12 camiones de agua y 6 de medicinas.



Ejercicio 50 (3 *puntos*)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos, mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

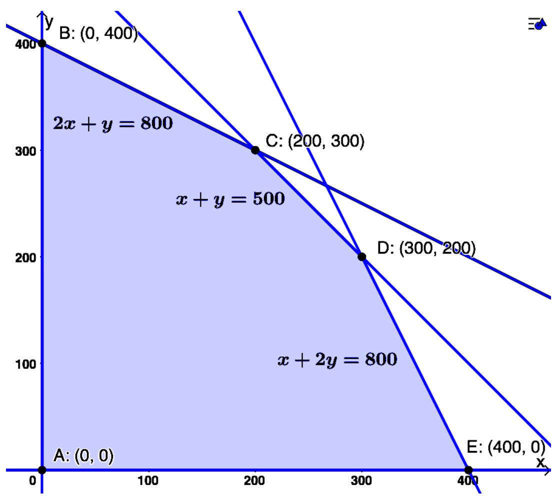
	Lote tipo A	Lote tipo B	Existencias
Kg de manzanas	1	2	800
Kg de naranjas	2	1	800
Kg de plátanos	1	1	500
Precio del lote (€)	12	14	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de lotes de tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación
$$\begin{cases} ① \ x + 2y \leq 800 & \rightarrow (0,400) \quad \& \quad (800,0) \\ ② \ 2x + y \leq 800 & \rightarrow (0,800) \quad \& \quad (400,0) \\ ③ \ x + y \leq 500 & \rightarrow (0,500) \quad \& \quad (500,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 12x + 14y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	400	5600
C	200	300	6600
D	300	200	6400
E	400	0	4800

El *ingreso máximo* es de 6600 € y se obtiene vendiendo 200 lotes tipo A y 300 tipo B.

Ejercicio 51 (3 *puntos*)

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2,4 kg de azúcar.
Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

	Tartas	Bizcochos	Almacén
Consumo harina (g/ud)	400	300	6000
Consumo azúcar (g/ud)	200	100	2400
		≥ 6	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de tartas a fabricas"
  $y \equiv$ "Nº de bizcochos a fabricar"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

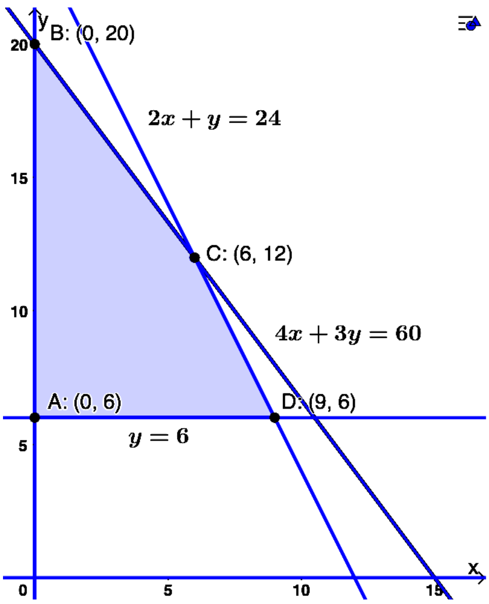
$$\begin{cases} 400x + 300y \leq 6000 \\ 200x + 100y \leq 2400 \\ y \geq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 4x + 3y \leq 60 & \to (0,20) & \& & (15,0) \\ ② \ 2x + y \leq 24 & \to (0,24) & \& & (12,0) \\ ③ \ y \geq 6 & \to (0,6) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 10x + 6y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	6	36
B	0	20	120
C	6	12	132
D	9	6	126



El *ingreso máximo* es de 132 € vendiendo 6 tartas y 12 bizcochos.

Problema 1 (3 ***puntos***)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 *unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de* 40 *unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de* 3000 *euros por cada unidad vendida del formato S y de* 2500 *euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?*

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque Algebra)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Uds. de producto de formato S"
  $y \equiv$ "Uds. de producto de formato L"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

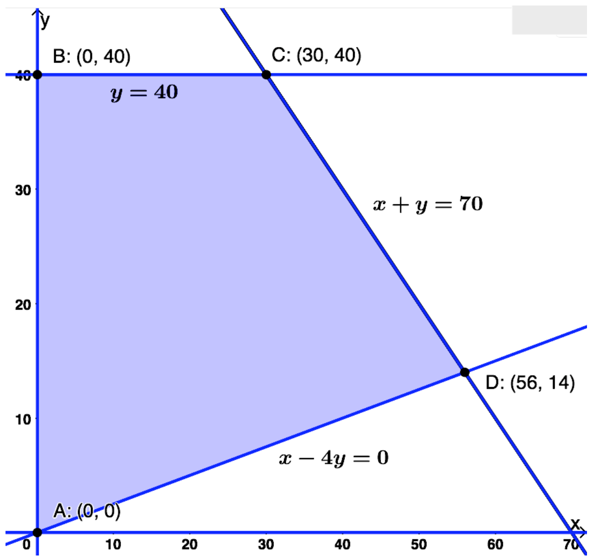
$$\begin{cases} ① \ x+y \leq 70 \\ ② \ y \geq \dfrac{1}{5}\cdot(x+y) \\ ③ \ y \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+y \leq 70 & \to (0,70) \quad \& \quad (70,0) \\ ② \ x-4y \leq 0 & \to (0,0) \quad \& \quad (40,10) \\ ③ \ y \leq 40 & \to (0,40) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 3x + 2{,}5y$ (miles de euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	40	100
C	30	40	190
D	56	14	203



El *beneficio máximo* es de 203000 € repartiendo 56 unidades del formato S y 14 del formato L.

Cataluña

Ejercicio 52 (2,5 *puntos*)

En una pastelería quieren preparar cajitas de panellets *para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de* 120 panellets *de piñones y de* 150 panellets *de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las de primer tipo contendrán* 3 panellets *de piñones y* 2 *de coco, y las del segundo tipo contendrán* 4 panellets *de piñones y* 6 *de coco. La idea de la pastelería es preparar el máximo número de cajitas posible con los* panellets *de los que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar* 9 *cajitas de cada tipo.*

a) (1.25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) (1.25 puntos) Determine cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para realizar el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los panellets *disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo.*

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Serie 2)

Solución.

	Cajas tipo A	Cajas tipo B	Existencias
Panellets de piñones	3	4	≤ 120
Panellets de coco	2	6	≤ 150
	≥ 9	≥ 9	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de cajas de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de cajas de tipo B"

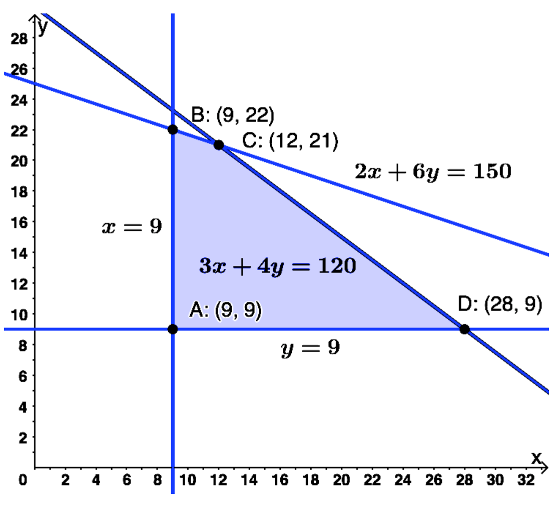
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 3x + 4y \leq 120 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (40,0) \\ ② \ 2x + 6y \leq 150 & \rightarrow (0,25) \quad \& \quad (75,0) \\ ③ \ x \geq 9 & \rightarrow (9,0) \\ ④ \ y \geq 9 & \rightarrow (0,9) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x + y$

- `Optimización de F.O.`

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	9	9	18
B	9	22	31
C	12	21	33
D	28	9	37



Podremos hacer un *máximo* de 37 obsequios: 28 de tipo A y 9 de tipo B.

Piñones $= 28 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 120 \Rightarrow$ se usan todos

Coco $= 28 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 110 < 150 \Rightarrow$ sobran 40

Ejercicio 53 (2,5 *puntos*)

Para vender un exceso de producción de 100 bañadores y 200 pares de chancletas, una tienda de ropa de playa prepara dos promociones: la oferta azul y la oferta amarilla. La oferta azul consiste en un lote con tres pares de chancletas y un bañador por 50 €, y la oferta amarilla, en un lote con un par de chancletas y dos bañadores por 30 €. Para cumplir los propósitos de la tienda, el número de lotes vendidos de la oferta azul debería ser la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla.

a) (1.25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de venta que tiene la tienda.

b) (1.25 puntos) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendrán que venderse para optimizar los ingresos? ¿Cuáles serán esos ingresos?

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Serie 5)

Solución.

	Oferta azul	Oferta amarilla	Existencias
Bañadores	1	2	≤ 100
Chancletas	3	1	≤ 200
Precio lote	50	30	

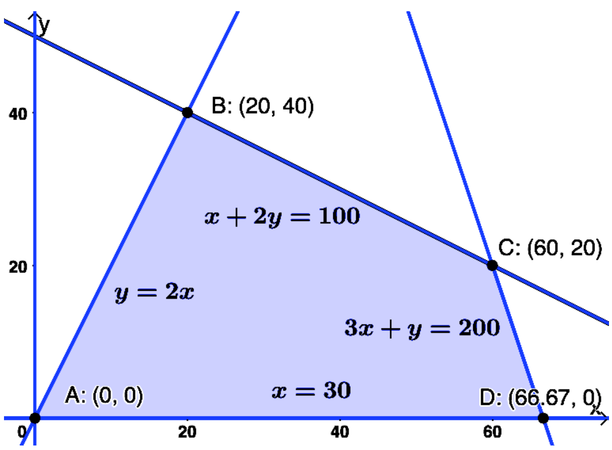
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes de la oferta azul"
  $y \equiv$ "Nº de lotes de la oferta amarilla"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + 2y \leq 100 \\ ② \; 3x + y \leq 200 \\ ③ \; x \geq \dfrac{y}{2} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x + 2y \leq 100 & \to (0,50) \quad \& \quad (100,0) \\ ② \; 3x + y \leq 200 & \to (0,200) \quad \& \quad (66{,}7,0) \\ ③ \; y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (50,100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 50x + 30y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	20	40	2200
C	60	20	3600
D	67,7	0	3383,5

Los *ingresos máximos* son de 3600 € y se obtienen vendiendo 60 lotes de la oferta azul y 20 de la oferta amarilla.

Ejercicio 54 (2,5 *puntos*)

Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y en la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1000 euros y el contrato prevé que como mínimo hay que hacer 3. Cada anuncio en la televisión cuesta 3000 euros y, por disponibilidad de programación, pueden hacerse como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.

a) (1.25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) (1.25 puntos) Calcule cuántos anuncios tendrá que poner en la radio y cuánoos en la televisión para que el número de nuevos clientes sea máximo. ¿Cuántos clientes nuevos obtendrá?

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Septiembre 2021 - Serie 1)

Solución.

	Radio	Televisión	Restricción
Coste por anuncio	1000	3000	≤ 18000
	≥ 3	≤ 4	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de anuncios en radio"
  $y \equiv$ "Nº de anuncios en televisión"

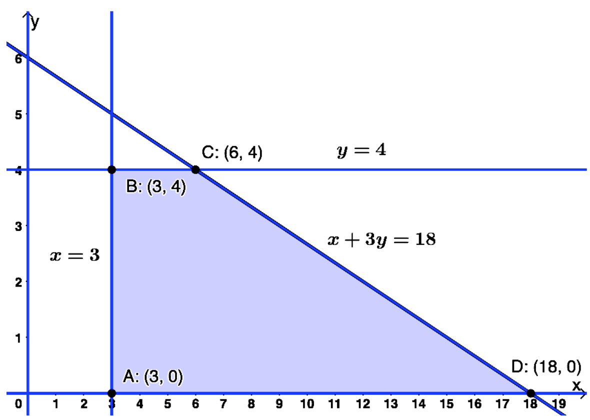
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} 1000x + 3000y = 18000 \\ x \geq 3 \\ y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ x + 3y = 18 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (18,0) \\ (2)\ x \geq 3 & \rightarrow (3,0) \\ (3)\ y \leq 4 & \rightarrow (0,4) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 10x + 60y$

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3	0	30
B	3	4	270
C	6	4	300
D	18	0	180



El *incremento máximo de clientes* será de 300 si se ponen 6 anuncios en radio y 4 en la televisión.

Ejercicio 55 (2,5 *puntos*)

Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de navidad, A y B, para sus trabajadores. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por lo tanto, seguro que cava no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) (1.75 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

b) (0.75 puntos) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa cambia de opinión y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo habrá que hacer?

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Serie 2)

Solución.

a) Recopilamos los datos del enunciado en una tabla:

	Cesta A	Cesta B	Existencias
Jamones	1	2	≤ 40
Botellas de cava	1	3	
Barras de turrón	5	2	≤ 120

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de cestas de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de cestas de tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

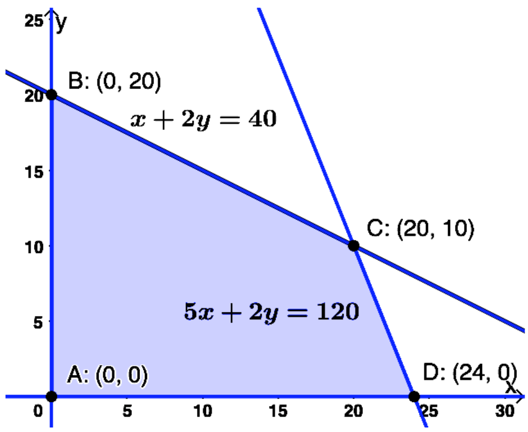
$$\begin{cases} ① \; x + 2y \leq 40 & \rightarrow (0,20) \quad \& \quad (40,0) \\ ② \; 5x + 2y \leq 120 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (24,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	20	20
C	20	10	30
D	24	0	24



El *máximo* número de cestas es de 30, distribuidas en 20 de tipo A y 10 de tipo B.

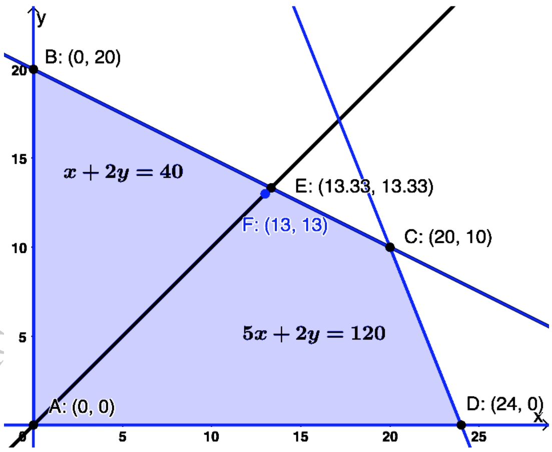
b) Como la jefa ha decidido que se venda la misma cantidad de cada tipo de cestas, añadimos la restricción correspondiente:

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + 2y \leq 40 & \to (0,20) \quad \& \quad (40,0) \\ ② \; 5x + 2y \leq 120 & \to (0,60) \quad \& \quad (24,0) \\ ③ \; x = y & \to (0,0) \quad \& \quad (20,20) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + y$

- `Región factible` Representamos la región y hallamos la intersección de la recta $y = x$ con el perímetro de la región factible, que es $E(13{,}33, 13{,}33)$.
  Por lo tanto la solución ha de ser un punto de la recta $y = x$, con coordenadas enteras, que se encuentre dentro de la región factible.
  Así que el máximo sería el punto $F(13,13)$, que implica que el *máximo* número de cestas es de 26, distribuidas en 13 de cada tipo.



Ejercicio 56 (2,5 *puntos*)

Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone y ofrece dos tarifas diferentes: la tarifa estándar (sin gastos de cancelación) es de 120 € por noche, y la tarifa reducida (que no admite cancelaciones) es de 90 € por noche. Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida y quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida.

a) (1.25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) (1.25 puntos) Determine cuántas habitaciones deben tener reservadas con cada tarifa para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Serie 5)

Solución.

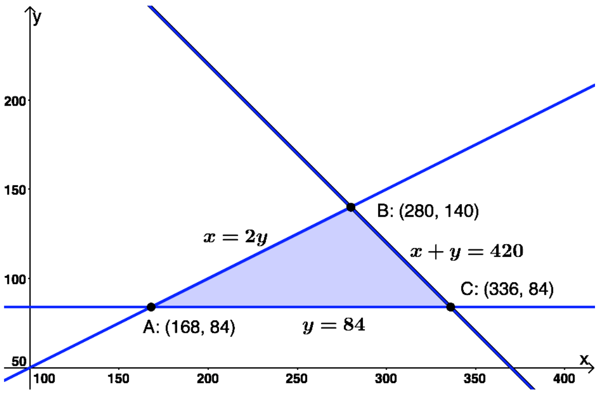
a)
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de habitaciones con tarifa estándar"
  $y \equiv$ "Nº de habitaciones con tarifa reducida"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 420 \\ ② \ y \geq 0{,}2 \cdot 420 \\ ③ \ x \geq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 420 & \rightarrow (0,420) \quad \& \quad (420,0) \\ ② \ y \geq 84 & \rightarrow (0,84) \\ ③ \ x \geq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (420,210) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 120x + 90y$

b)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	168	84	27720
B	280	140	46200
C	336	84	47880



Los *ingresos máximos* son de 47880 que se producen con unas reservas de 336 habitaciones con tarifa estándar y 84 con tarifa reducida.

Ejercicio 57 (2,5 *puntos*)

La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Se quiere usar esta técnica para tratar alimentos que ya han empezado a deteriorarse.
Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Se sabe que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.

a) (1.5 puntos) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para que la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad tiene que ser como mínimo de 60 grays y en los alrededores no puede exceder de 27 grays. Para hacerlo, determine cuál es la función objetivo que debe minimizarse y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) (1 punto) Si se aplica un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia a sus alrededores). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a)?

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Septiembre 2022 - Serie 3)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad emitida de rayos de cobalto (grays)"
  $y \equiv$ "Cantidad emitida de rayos de cesio (grays)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

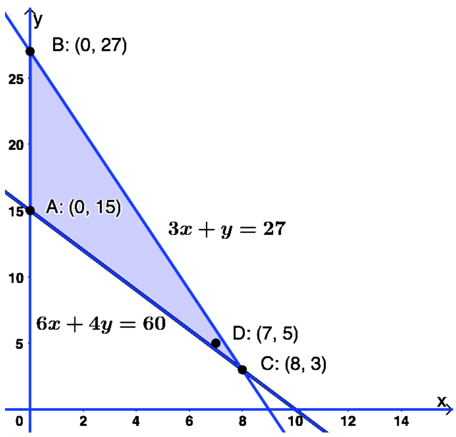
$$\begin{cases} ① \; 6x + 4y \geq 60 & \rightarrow (0, 15) \quad \& \quad (10, 0) \\ ② \; 3x + y \leq 27 & \rightarrow (0, 27) \quad \& \quad (9, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 4x + 5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	15	75
B	0	27	135
C	8	3	47



Por lo tanto la cantidad de cobalto ha de ser de 8 grays y la de cesio de 3 grays para que la parte en buenas condiciones reciba la mínima radiación de 47 grays.

b) ① $6x + 4y \geq 60 \implies 6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 62 \geq 60$ ✓

② $3x + y \leq 27 \implies 3 \cdot 7 + 5 = 26 \leq 27$ ✓

El problema es que si calculamos la radiación soportada por la zona que está en buenas condiciones:

$$f(7,5) = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 = 53 > 47$$

Podemos comprobar que recibe más radiación que en el supuesto del apartado a).

Si representamos el punto $D(7,5)$ en la gráfica veremos que se encuentra dentro de la región factible (luego verifica las restricciones del problema), pero, al no estar situado en el perímetro de la misma, nunca podrá optimizar la función objetivo (radiación en la parte del alimento que se encuentra en buen estado).

Ejercicio 58 (2,5 *puntos*)

> *Una empresa de Menorca quiere ofrecer dos tipos de actividades: bautizos de submarinismo desde una barca y excursiones en barca por la costa para bañarse en calas. El bautizo de submarinismo tiene un precio de 60 euros por persona y en cada embarcación irán 10 participantes y 5 instructores. La excursión por la costa tiene un precio de 18 euros por persona y en cada embarcación irán 25 participantes y 2 instructores. La empresa dispone de 30 embarcaciones iguales y de 75 instructores que pueden realizar salidas de submarinismo o excursiones en barca por las calas indistintamente. Su intención es obtener el máximo de ingresos suponiendo que llenará todas las embarcaciones.*
>
> *a) (1.25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.*
>
> *b) (1.25 puntos) ¿Cuántas salidas de cada tipo debe ofrecer la empresa todos los días para obtener el máximo de ingresos? ¿Cuánto dinero ingresará a diario?*
>
> *(Cataluña - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Serie 1)*

Solución.

	Bautizo de submarinismo	Excursión en barca	Restricción
Participantes	10	25	
Embarcaciones	1	1	≤ 30
Instructores	5	2	≤ 75

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de salidas de bautismo de submarinismo"
  $y \equiv$ "Nº de salidas de excursión en barca"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

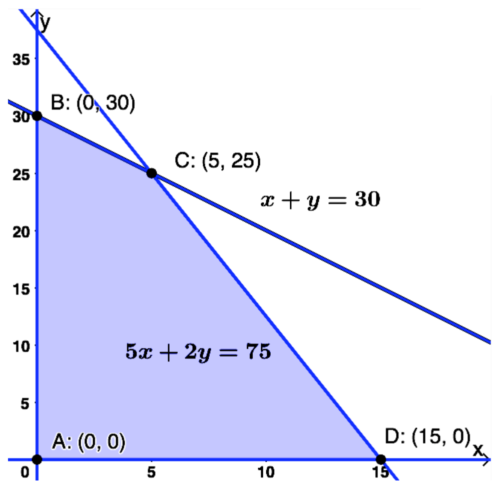
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 30 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (30,0) \\ ② \ 5x + 2y \leq 75 & \rightarrow (0,37{,}5) \quad \& \quad (25,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 60 \cdot 10x + 18 \cdot 25y \implies f(x,y) = 600x + 450y \text{ (euros)}$$

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	30	13500
C	5	25	14250
D	15	0	9000



El *ingreso máximo* es de 14250 €, haciendo 5 bautismos de submarinismo y 25 excursiones en barca.

Ejercicio 59 (2,5 *puntos*)

Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24000 kg y la de mandarinas, de 12000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas, de 0,70 €/kg.
Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.

a) (1.25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) (1.25 puntos) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos.

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Septiembre 2023 - Serie 2)

Solución.

	Caja A	Caja B	Restricción
Naranjas (kg)	8	5	≤ 24000
Mandarinas (kg)	2	5	≤ 12000
Precio caja (€/ud)	$0{,}6 \cdot 8 + 0{,}7 \cdot 2 = 6{,}2$	$0{,}6 \cdot 5 + 0{,}7 \cdot 5 = 6{,}5$	≤ 12000

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de cajas de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de cajas de tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

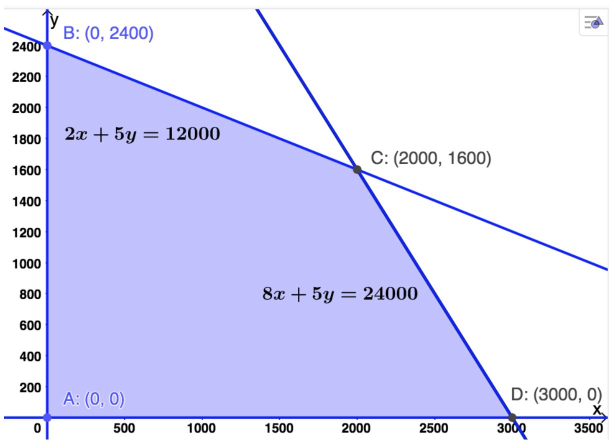
$$\begin{cases} ① \ 8x + 5y \leq 24000 & \rightarrow (0, 4800) \quad \& \quad (3000, 0) \\ ② \ 2x + 5y \leq 12000 & \rightarrow (0, 2400) \quad \& \quad (6000, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 6{,}2x + 6{,}5y$ (euros)

- `Región factible`

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	2400	15600
C	2000	1600	22800
D	3000	0	18600



Los *ingressos máximos* son de 22800 € vendiendo 200 cajas tipo A y 1600 tipo B

Extremadura

Ejercicio 60 (2 *puntos*)

En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que previamente, ha fabricado necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios así como el valor de dichos beneficios máximos.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Espejos	Cuadros	Restricciones
Tiempo de elaboración (h)	1	4	≤ 60

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de espejos"
  $y \equiv$ "Nº de cuadros"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

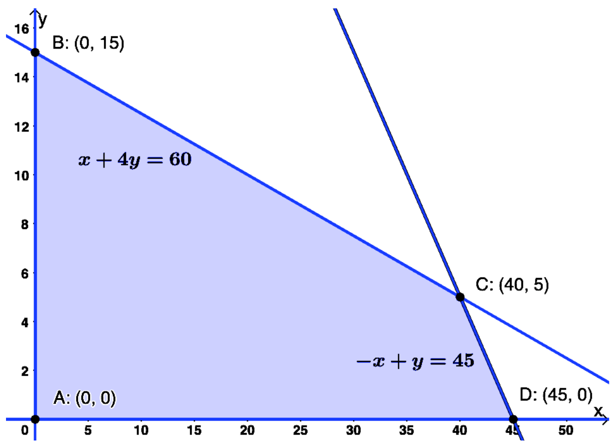
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 45 & \rightarrow (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ ② \ x + 4y \leq 60 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (60,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 120x + 180y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	15	2700
C	40	5	5700
D	45	0	5400



El *beneficio máximo* es de 5700 € y se produce vendiendo 40 espejos y 5 cuadros.

Ejercicio 61 (2 *puntos*)

En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos así como el valor de dichos beneficios máximos.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

	Pastel tipo A	Pastel tipo B	Restricciones
Azúcar (gr/ud)	6	4	≤ 240
Levadura (gr/ud)	3	4	≤ 180

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de pasteles de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de pasteles de tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

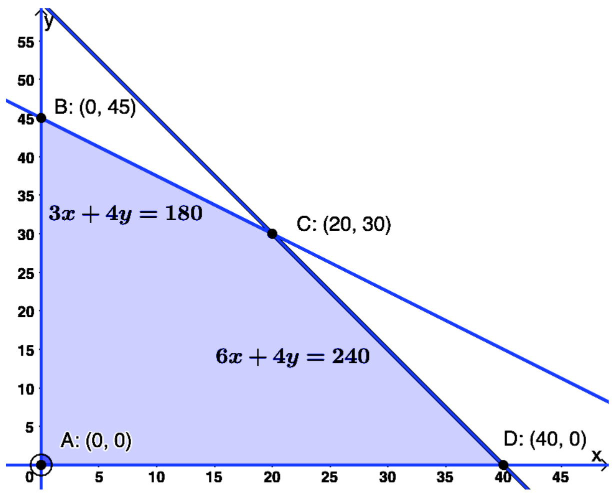
$$\begin{cases} \text{①}\ 6x + 4y \leq 240 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (40,0) \\ \text{②}\ 3x + 4y \leq 180 & \rightarrow (0,45) \quad \& \quad (60,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 4{,}5x + 5{,}5y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	45	247,5
C	20	30	255
D	40	0	180



El *beneficio máximo* es de 255 € que se obtiene vendiendo 20 pastiles de tipo A y 30 de tipo B.

Ejercicio 62 (2 *puntos*)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 *euros por cada coche y* 400 *euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de* 300000 *euros para comprar vehículos al precio de* 3000 *euros cada coche y* 2000 *euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de* 125 *vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.*

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

	Coches	Motocicletas	Restricción
Precio Compra (miles €)	3	2	≤ 300
Beneficio (miles €)	0,5	0,4	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de coches comprados"
  $y \equiv$ "Nº de motocicletas comprados"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

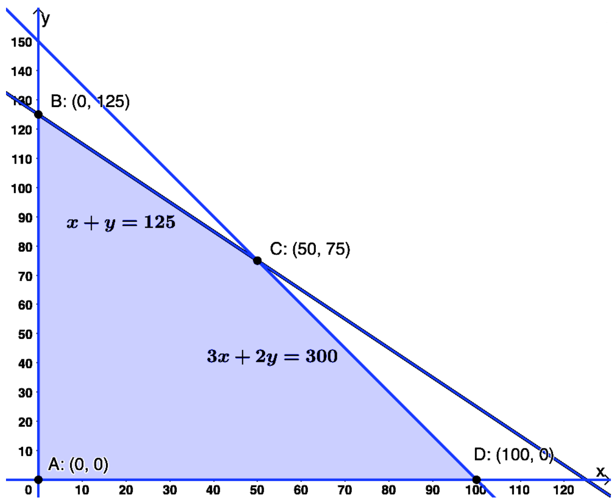
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 125 & \to (0,125) \quad \& \quad (125,0) \\ ② \; 3x + 2y \leq 300 & \to (0,150) \quad \& \quad (100,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0{,}5x + 0{,}4y$ (miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	125	50
C	50	75	55
D	100	0	50



El *beneficio máximo* es de 55000 €, que se obtiene comprando (y posteriormente vendiendo) 50 coches y 75 motocicletas.

Ejercicio 63 (2 *puntos*)

> *Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de móviles a fabricar semanalmente"
  $y \equiv$ "Nº de tabletas a fabricar semanalmente"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \leq 800 & \rightarrow (800, 0) \\ ② \ y \leq 600 & \rightarrow (0, 600) \\ ③ \ x + y \leq 1000 & \rightarrow (0, 1000) \quad \& \quad (1000, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

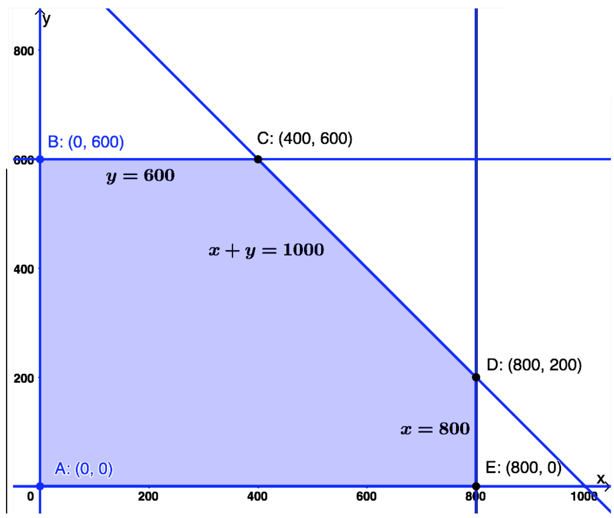
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 720x + 540y \quad \text{(euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	600	324000
C	400	600	612000
D	800	200	684000
E	800	0	576000



Los *ingresos máximos* son de 684000 € y se obtienen fabricando y vendiendo 800 móviles y 200 tabletas.

Galicia

Ejercicio 64 (3,33 *puntos*)

Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30000 € y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

a) (1 punto) Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) (1.5 puntos) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) (0.83 puntos) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de móviles de calidad A"
  $y \equiv$ "Nº de móviles de calidad A^+"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

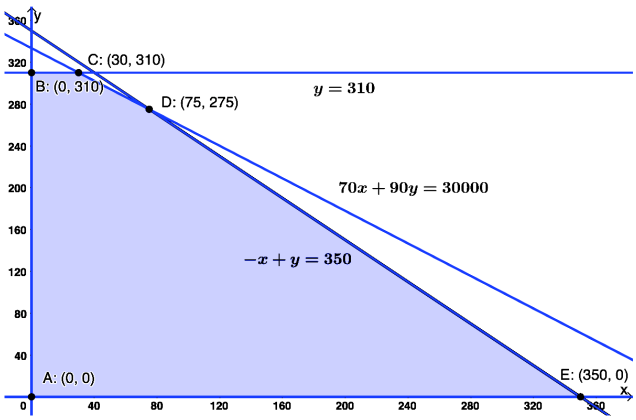
$$\begin{cases} ①\ 70x + 90y \leq 30000 & \rightarrow (0, 333{,}3) \quad \& \quad (428{,}6, 0) \\ ②\ x + y \leq 350 & \rightarrow (0, 350) \quad \& \quad (350, 0) \\ ③\ y \leq 310 & \rightarrow (0, 310) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo:` Beneficio $A = 100 - 70 = 30$ & Beneficio $A^+ = 150 - 90 = 60$

$$f(x, y) = 30x + 60y \text{ (euros)}$$

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	310	18600
C	30	310	19500
D	75	275	18750
E	350	0	10500



El *beneficio máximo* es de 19500 € y se obtiene vendiendo 30 móviles de calidad A y 310 de calidad A^+.

Ejercicio 65 (3,33 *puntos*)

En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €.

a) (1 punto) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) (1.5 puntos) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) (0.83 puntos) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

	Motor de moto	Motor de coche	Restricción
Trabajo manual (min)	60	45	$\leq 120 \cdot 60$
Trabajo de máquina (min)	20	40	$\leq 90 \cdot 60$
Beneficios (€/ud)	1500	2000	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de motores de moto"
  $y \equiv$ "Nº de motores de coche"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

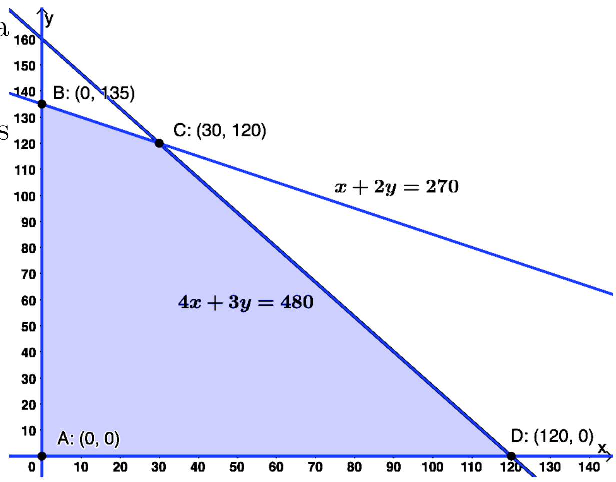
$$\begin{cases} ① \ 60x + 45y \leq 7200 \\ ② \ x + 2y \leq 270 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 4x + 3y \leq 480 & \rightarrow (0,160) \quad \& \quad (120,0) \\ ② \ 9x + 8y \leq 1080 & \rightarrow (0,135) \quad \& \quad (120,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 1500x + 2000y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	135	270000
C	30	120	285000
D	120	0	180000



El *beneficio máximo* es de 285000 €, ensamblando 30 motores de moto y 120 de coche.

Ejercicio 66 (3,33 *puntos*)

Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24000 y cada planta de producción B de 20000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

	Planta A	Planta B	Restricción
Costes (miles €/mes)	1	2	≤ 42
Empleados	8	4	≤ 120

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de plantas A"
  $y \equiv$ "Nº de plantas B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + 2y \leq 42 & \rightarrow (0,21) \quad \& \quad (42,0) \\ ② \ 8x + 4y \leq 120 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (15,0) \\ ③ \ x \leq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,15) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

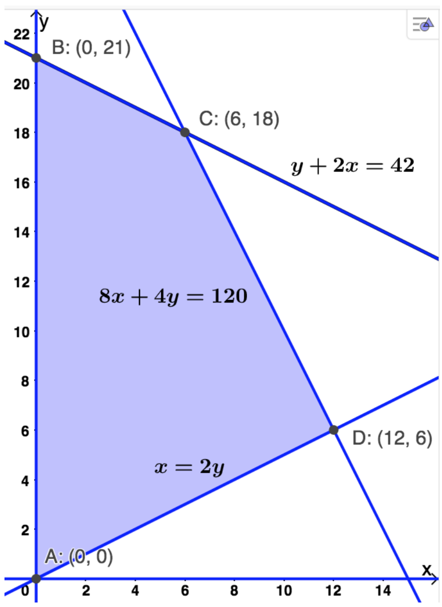
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 24x + 20y \quad \text{(miles €)}$$

- `Región factible` Calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	21	420
C	6	18	504
D	12	6	408



El *máximo beneficio* es de 504000 €, con 6 plantas de tipo A y 18 de tipo B.

Ejercicio 67 (3,33 *puntos*)

Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: Las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.
Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg.

a) *(1.5 puntos) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.*

b) *(1.5 puntos) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?*

c) *(0.33 puntos) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de jurel pescado (Tm)"
  $y \equiv$ "Cantidad de caballa pescada (Tm)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

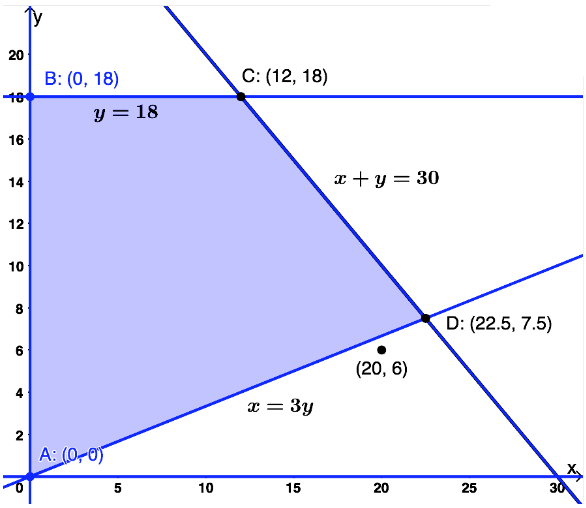
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 30 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (30,0) \\ ② \ x \leq 3y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,10) \\ ③ \ y \leq 18 & \rightarrow (0,18) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 5000x + 6000y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	18	108000
C	12	18	168000
D	22,5	7,5	157500



b) Los *ingresos máximo* son de 168000 €, pescando 12 Tm de jurel y 18 Tm de caballa.

c) El punto $(20, 6)$ no pertenece a la región factible (no cumple la restricción ②), por lo que la peca de 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa no cumple las normas sobre cuota pesquera.

La Rioja

Ejercicio 68 (2,5 *puntos*)

Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y.
Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.
¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?

(La Rioja - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque Algebra)

Solución.

	Técnica A	Técnica B	Restricción
Cobre (gr/h)	8	4	≥ 80
Zinc (gr/h)	3	6	≥ 60
Níquel (gr/h)	1	12	≥ 60

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo de uso de la técnica A (h)"
  $y \equiv$ "Tiempo de uso de la técnica B (h)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

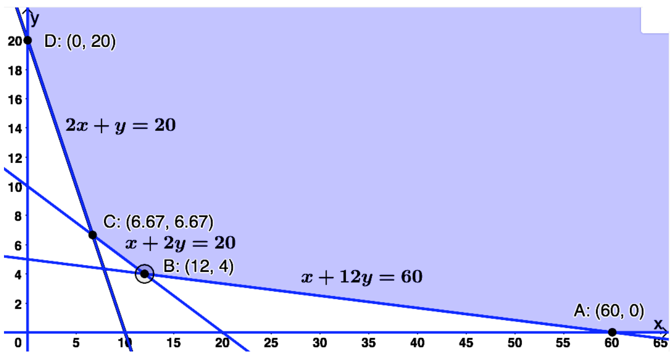
$$\begin{cases} ① \ 8x+4y \geq 80 \\ ② \ 3x+6y \geq 60 \\ ③ \ x+12y \geq 60 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 2x+y \geq 20 & \to (0,20) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \ x+2y \geq 20 & \to (0,10) \quad \& \quad (20,0) \\ ③ \ x+12y \geq 60 & \to (0,5) \quad \& \quad (60,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x+y$ (horas)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	60	0	60
B	12	4	16
C	6,67	6,67	13,33
D	0	20	20



El *mínimo tiempo* es de 13,33 horas, utilizando 6,67 horas cada una de las dos técnicas disponibles.

Comunidad de Madrid

Ejercicio 69 (3 *puntos*)

Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Exprésese la función objetivo y las resticciones del problema.

b) Represéntese gráficamente el recinto definido.

c) Obténgase el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2000 Modelo - Opción B)

Solución.

	Collares	Pulseras	Restricción
Producción máxima			≤ 50
Horas de fabricación	2	1	≤ 80
Beneficios €/ud.	5	4	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de collares"
  $y \equiv$ "Nº de pulseras"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 50 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (50,0) \\ ② \ 2x + y \leq 80 & \rightarrow (0,80) \quad \& \quad (40,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

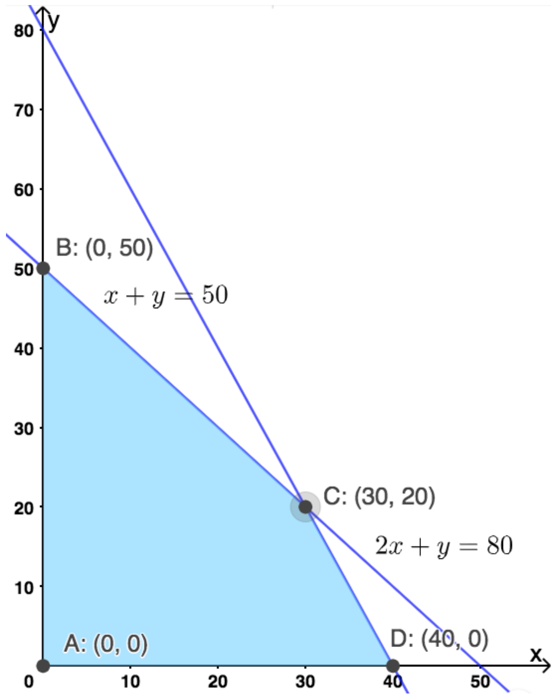
- `Función objetivo` $f(x, y) = 5x + 4y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	50	200
C	30	20	230
D	40	0	200

Por tanto el *máximo beneficio* es de 230 euros y se produce fabricando 30 collares y 20 pulseras.



Ejercicio 70 (3 *puntos*)

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

- *El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.*
- *Cada mesa requiere dos horas para su fabricación: cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.*
- *El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de matrerial.*

a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Representa gráficamente la región factible y calcula los vértices de la misma.

c) Razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

d) Resuelve el problema.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2000 Junio - Opción B)

Solución.

	Mesas	Sillas	Restricción
Producción máxima (ud.)			≤ 4
Tiempo de fabricación (h)	2	3	≤ 10
Coste material (€)	4	2	≤ 12
		$y \geq 100$	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº mesas fabricadas"
  $y \equiv$ "Nº sillas fabricadas"

a) - `Restricciones` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

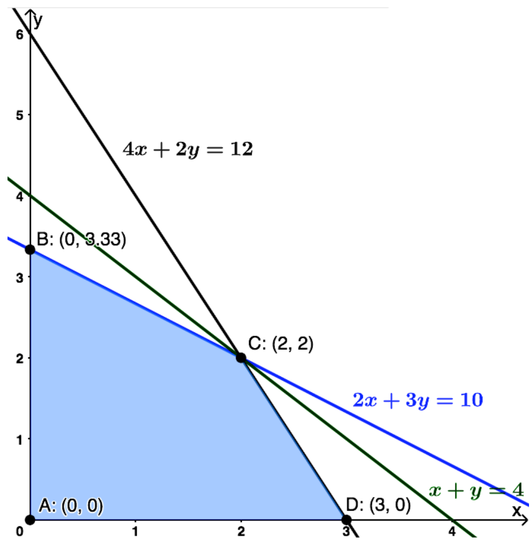
$$\begin{cases} (1)\ x + y \leq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (4,0) \\ (2)\ 2x + 3y \leq 10 & \to (0, 10/3) \quad \& \quad (5,0) \\ (3)\ 4x + 2y \leq 12 & \to (0,6) \quad \& \quad (3,0) \\ (4)\ y \geq 100 & \to (0,100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 20x + 30y$$

b)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	$^{10}/_{3}$	100
C	2	2	100
D	3	0	60



c) El punto $(1, 1)$, correspondiente a la fabricación de una mesa y una silla, pertenece a la región factible, lo que significa que cumple las restricciones pedidas. En cuanto a si le interesa a la empresa esta producción la respuesta es no, ya que sus beneficios no son máximos (los beneficios máximos se producen en los vértices de la *región factible*).

d) La empresa obtendrá un beneficio máximo igual a 100 € produciendo 2 mesas y 2 sillas. Hay que tener en cuenta que el punto B no es solución del problema ya que el número de mesas y sillas ha de ser un entero.

Ejercicio 71 (3 *puntos*)

Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 Kcal por cada 100 g de ingrediente, mientras que el B contiene 15 g de grasas y 100 Kcal por cada 100 g. El coste es de 1,5 euros por cada 100 g del ingrediente A y de 1 euro por cada 100 g del ingrediente B.
El menú a diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y al menos 110 Kcal por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada ingrediente a emplear en el menú de manera que su coste sea lo más reducido posible.

a) Indíquese la expresión de las restricciones y la función objetivo.

b) Represéntese gráficamente la región delimitada por las restricciones.

c) Calcúlese el porcentaje óptimo de cada ingrediente a incluir en el menú.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2000 Septiembre - Opción B)

Solución.

	Ingrediente A	Ingrediente B	Restricción
Contenido grasa (g)	35	15	≤ 30
Aporte calórico (Kcal)	150	100	≥ 110
Coste €/100 g	1,5	1	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad del ingrediente } A \text{ (en cientos de gramos)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad del ingrediente } B \text{ (en cientos de gramos)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; 35x + 15y \leq 30 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (6/7, 0) \\ ② \; 150x + 100y \geq 110 & \rightarrow (0, 11/10) \quad \& \quad (11/15,) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

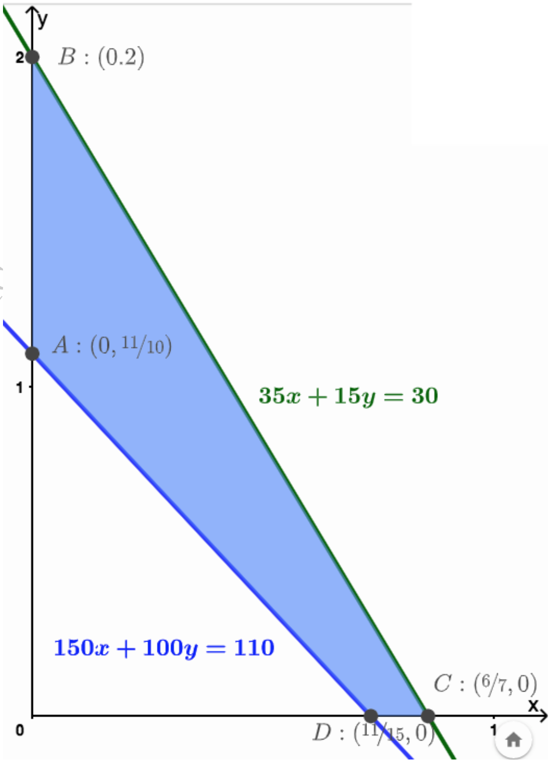
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 1{,}5x + y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	$11/10$	1,1
B	0	2	2
C	$6/7$	0	1,28
D	$11/15$	0	1,1



La composición óptima del menú para obtener el mínimo coste es cualquier punto del segmento que une los puntos $A : (0, 11/10)$ y $D : (11/15, 0)$.
Para obtener el porcentaje de cada ingrediente en la composición resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 15x + 10y = 11 \end{cases} \implies \boxed{\begin{array}{c} x = 0{,}2 = 20\,\% \\ y = 0{,}8 = 80\,\% \end{array}}$$

Ejercicio 72 (3 *puntos*)

En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina. Para poder ateneder la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.

c) Resuélvase el problema

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2001 Junio - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de bidones de petróleo"
  $y \equiv$ "Nº de bidones de gasolina"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

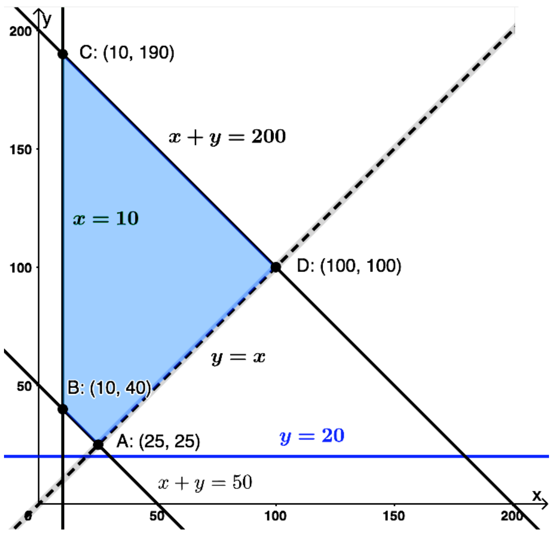
$$\begin{cases} ① \; x \geq 10 & \rightarrow (10,0) \\ ② \; y \geq 20 & \rightarrow (0,20) \\ ③ \; y > x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (50,50) \\ ④ \; x + y \leq 200 & \rightarrow (0,200) \quad \& \quad (200,0) \\ ⑤ \; x + y \geq 50 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (50,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0{,}2x + 0{,}3y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	25	25	12,5
B	10	40	14
C	10	190	59
D	100	100	50



El mínimo se produce en $A(25,25)$ pero no pertenece a la región factible, así que buscamos un punto próximo, por ejemplo $f(25,26) = 12,8$ €, que sigue siendo un coste mínimo correspondiente a 25 barriles de petróleo y 26 de gasolina.

Ejercicio 73 (3 *puntos*)

> *Un fabricante de productos químicos vende fertilizantes, A y B, a razón de 40 y 20 euros el kilogramo, respectivamente. Su producción máxima es de una tonelada de cada fertilizante y su mínimo operativo es de 100 kilogramos de cada fertilizante. Si su producción total es de 1700 kilogramos, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcular dichos ingresos máximos.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2002 Modelo - Opción A)*

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Kg de producción de fertilizante } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Kg de producción de fertilizante } B\text{”}$$

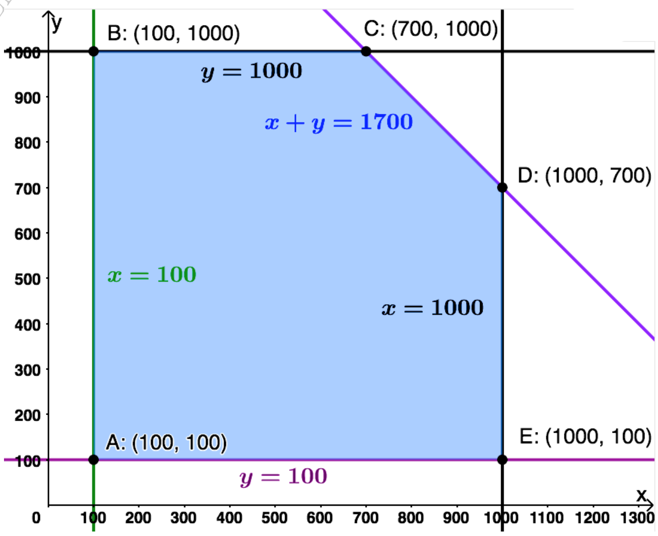
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 1700 & \rightarrow (1700, 0) \quad \& \quad (0, 1700) \\ ② \; 100 \leq x \leq 1000 & \rightarrow (100, 0) \quad \& \quad (1000, 0) \\ ③ \; 100 \leq y \leq 1000 & \rightarrow (0, 100) \quad \& \quad (0, 1000) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 40x + 20y$

- `Región factible` Como la producción total es 1700 buscaremos el máximo en los puntos de esa recta, con lo que los candidatos serán los puntos de intersección de la citada recta con el perímetro de la región factible.

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	100	100	6000
B	100	1000	24000
C	700	1000	48000
D	1000	700	54000
E	1000	100	42000



Por lo que el *beneficio máximo* asciende a 54000 € y se produce con 1000 kg de fertilizante A y 700 kg de B.

Ejercicio 74 (3 *puntos*)

> *Considerar el siguiente problema de programación lineal:*
> *Minimizar* $z = -3x - 2y$
> *Sujeto a*
>
> $$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases}$$
>
> *a) Mediante la resolución gráfica del problema, discutir si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.*
>
> *b) Si se añade la restricción:*
>
> $$x + y \geq 10$$
>
> *discutir si existe solución óptima y en caso afirmativo calcularla.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2002 Modelo - Opción B)*

Solución.

a)

- `Restricciones:`

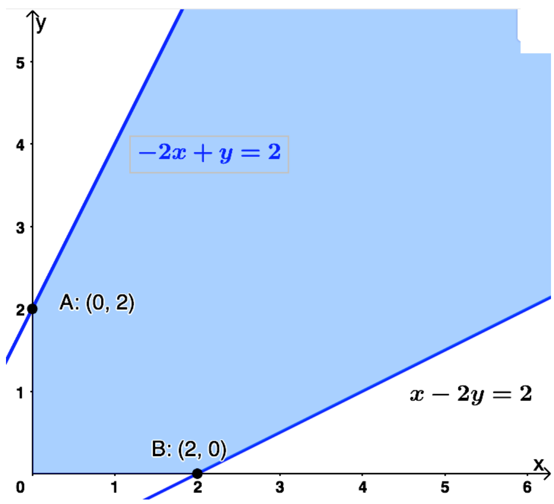
$$\begin{cases} ① \; -2x + y \leq 2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-1,0) \\ ② \; x - 2y \leq 2 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (2,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` Minimizar $z(x,y) = -3x - 2y$ es lo mismo que maximizar $z(x,y) = 3x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $z(x,y)$ en cada vértice y vemos que, pese a que existen soluciones factibles, al ser un recinto no acotado es imposible obtener el máximo

Punto	x	y	$z(x,y)$
A	0	2	4
B	2	0	6



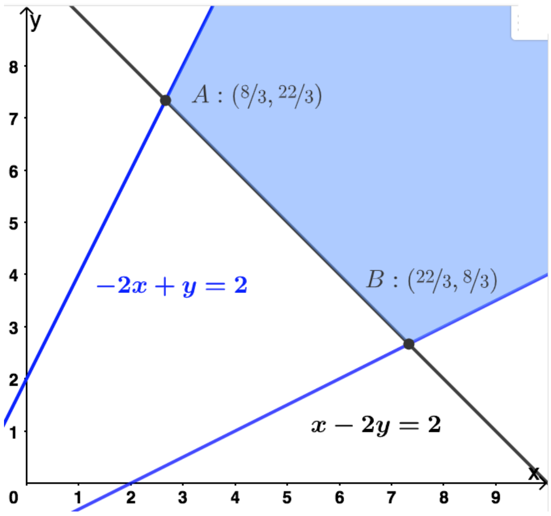
b)

- `Restricciones:`

$$\begin{cases} ① \; -2x + y \leq 2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-1,0) \\ ② \; x - 2y \leq 2 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (2,0) \\ ③ \; x + y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- **`Función objetivo`** Maximizar $z(x,y) = 3x + 2y$

- **`Región factible`** Representamos la región y calculamos los vértices.



- **`Optimización de F.O.`** Evaluamos $z(x,y)$ en cada vértice y vemos que al añadir la restricción la situación es exactamente la misma, existen soluciones factibles, pero al ser un recinto no acotado es imposible obtener el máximo

Punto	x	y	$z(x,y)$
A	$8/3$	$22/3$	$68/3$
B	$22/3$	$8/3$	$82/3$

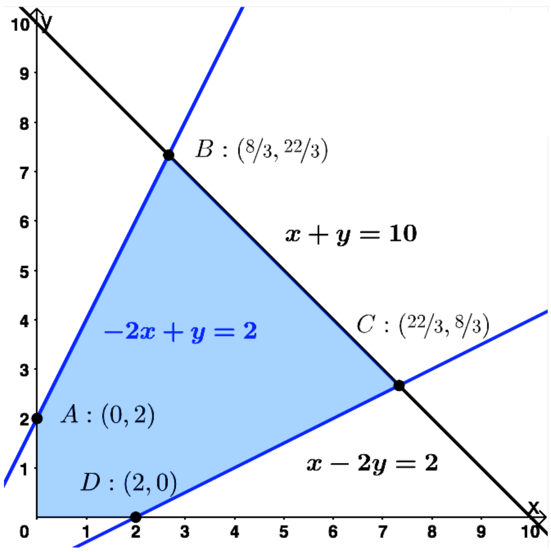
Pero si modificamos un poco la restricción añadida podríamos conseguir una solución óptima del problema

- **`Restricciones:`**

$$\begin{cases} ① \; -2x + y \leq 2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-1,0) \\ ② \; x - 2y \leq 2 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (2,0) \\ ③ \; x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- **`Función objetivo`** Maximizar $z(x,y) = 3x + 2y$

- **`Región factible`** Representamos la región y calculamos los vértices.



- **`Optimización de F.O.`** Evaluamos $z(x,y)$ en cada vértice.

Punto	x	y	$z(x,y)$
A	0	2	4
B	$8/3$	$22/3$	$68/3$
C	$22/3$	$8/3$	$82/3$
D	2	6	18

El mínimo de la función $z(x,y) = -3x - 2y$ se produce en el punto $C : (22/3, 8/3)$ y vale $82/3$.

Ejercicio 75 (3 *puntos*)

> *Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: $G1$ y $G2$. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo $G1$ es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo $G2$ es capaz de asaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 33000 euros para $G1$ y 35000 euros para $G2$. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto cn el mínimo coste?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2002 Junio - Opción B)*

Solución.

	Grupo $G1$	Grupo $G2$	Restricción
Ud. semanales asfaltadas zona A	3	2	≥ 6
Ud. semanales asfaltadas zona B	2	3	≥ 12
Ud. semanales asfaltadas zona C	2	2	≥ 10
Coste semanal (€)	33000	35000	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de semanas trabajadas por $G1$"
  $y \equiv$ "Nº de semanas trabajadas por $G2$"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

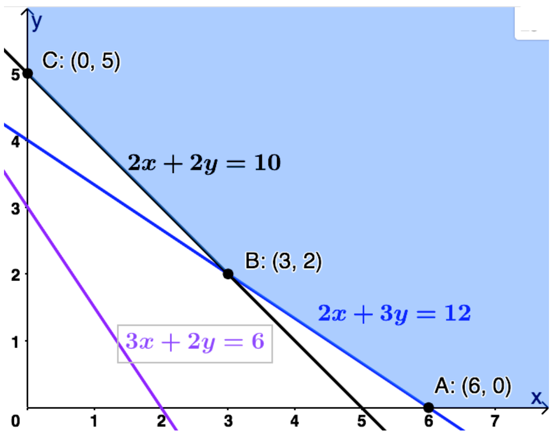
$$\begin{cases} ① \ 3x + 2y \geq 6 & \to (0,3) \quad \& \quad (3,0) \\ ② \ 2x + 3y \geq 12 & \to (0,4) \quad \& \quad (6,0) \\ ③ \ 2x + 2y \geq 10 & \to (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 33000x + 35000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	0	198000
B	3	2	169000
C	0	5	175000



Por tanto el *coste mínimo* es de 169000 euros y se produce trabajando 3 semanas el grupo $G1$ y 2 el grupo $G2$.

Ejercicio 76 (3 *puntos*)

Determinar los valores máximo y mínimo de la función $z = 3x + 4y$ *sujeta a las resticciones:*

$$\begin{cases} 3x + y \geq 3 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq -2 \\ y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2002 Septiembre - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; 3x + y \geq 3 & \to (0,3) \quad \& \quad (1,0) \\ ② \; x + y \leq 5 & \to (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ③ \; x \geq -2 & \to (-2,0) \\ ④ \; y \leq 10 & \to (0,10) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

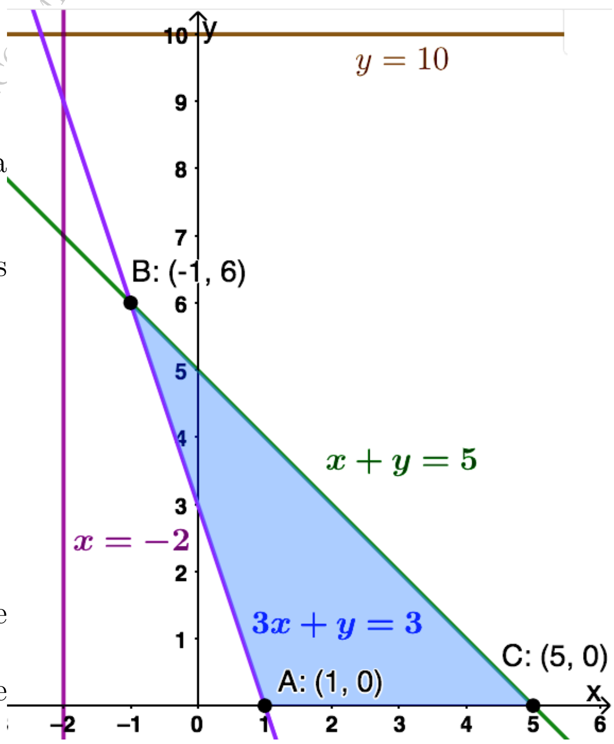
- `Función objetivo`

$$z(x,y) = 3x + 4y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$z(x,y)$
A	1	0	3
B	-1	6	21
C	5	0	15



El *mínimo* de la función $z(x,y)$ se produce en el punto $A : (1,0)$ y vale 3.
El *máximo* de la función $z(x,y)$ se produce en el punto $B : (-1,6)$ y vale 21.

Ejercicio 77 (3 *puntos*)

> *Un vendedor quiere dar salida a 400 kg de garbanzos, 300 kg de lentejas y 250 kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2 kg de garbanzos, 2 kg de lentejas y 1 kg de judías y los de tipo B contienen 3 kg de garbanzos, 1 kg de lentejas y 2 kg de judías. El precio de venta de cada paquete es de 25 euros para los del tipo A y de 35 euros para los del tipo B. ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2003 Junio - Opción B)*

Solución.

	Paquete A	Paquete B	Restricción
kg de garbanzos	2	3	≤ 400
kg de lentejas	2	1	≤ 300
kg de judías	1	2	≤ 250
Precio venta (€)	25	35	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº paquetes vendidos del tipo A"
  $y \equiv$ "Nº paquetes vendidos del tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

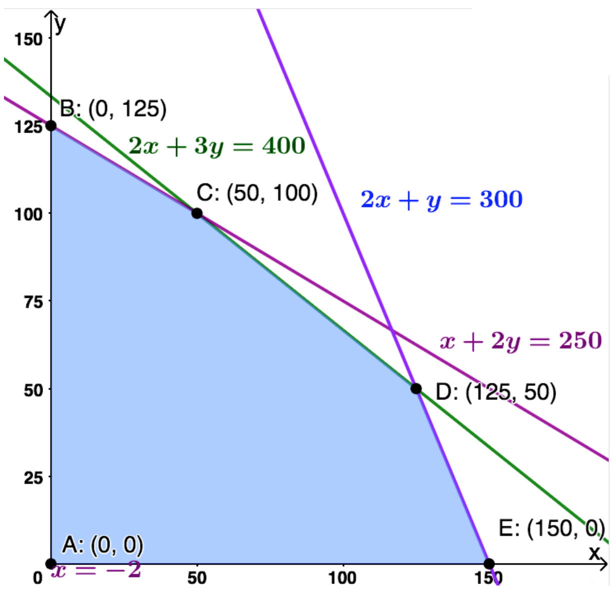
$$\begin{cases} ① \; 2x + 3y \leq 400 & \rightarrow (0, {}^{400}/_{3}) \quad \& \quad (200, 0) \\ ② \; 2x + y \leq 300 & \rightarrow (0, 300) \quad \& \quad (150, 0) \\ ③ \; x + 2y \leq 250 & \rightarrow (0, 125) \quad \& \quad (250, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 25x + 35y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	125	4375
C	50	100	4750
D	125	50	4875
E	150	0	3750



Por tanto el *máximo beneficio* es de 4875 euros y se produce con 125 paquetes del tipo A y 50 del tipo B.

Ejercicio 78 (3 *puntos*)

Determinar los valores máximos mínimos de la función $z = 5x + 3y$ *sujeta a las restricciones*

$$\begin{cases} 3x + y \geq 4 \\ x + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2003 Septiembre - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

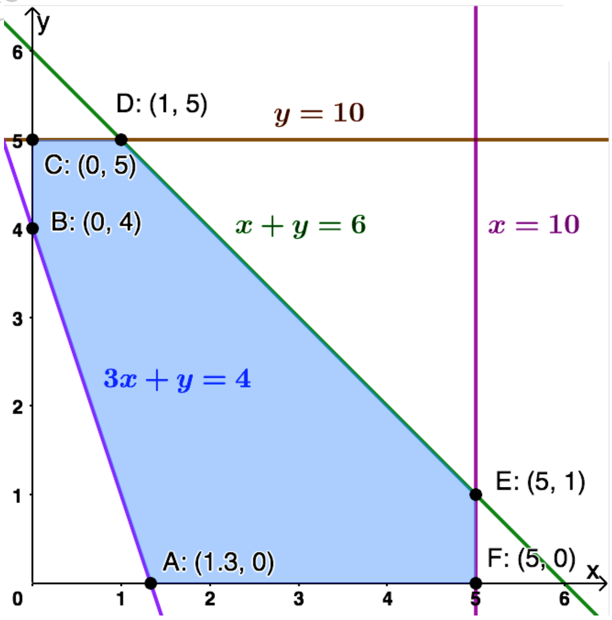
$$\begin{cases} ① \; 3x + y \geq 4 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (4/3, 0) \\ ② \; x + y \leq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ③ \; 0 \leq x \leq 5 & \rightarrow (5,0) \\ ④ \; 0 \leq y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad z(x,y) = 5x + 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $z(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$z(x,y)$
A	$4/3$	0	$20/3$
B	0	4	12
C	0	5	15
D	1	5	20
D	5	1	28
E	5	0	25



El *mínimo* de la función $z(x,y)$ es de $20/3$ y se produce en el punto $A : (4/3, 0)$.
El *máximo* de la función $z(x,y)$ es de 28 y se produce en el punto $D : (5,1)$.

Ejercicio 79 (3 *puntos*)

Un centro dedicado a la enseñanza personalizada de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 20 *y* 65 *estudiantes del curso básico y entre* 20 *y* 40 *estudiantes del curso avanzado. El número máximo de estudiantes que en total puede atender es* 100. *Los beneficios que obtiene por cada estudiante en el curso básico se estiman en* 145 *euros y en* 150 *euros por cada estudiante del curso avanzado. Hallar qué número de estudiantes de cada curso proporciona el máximo beneficio.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2004 Modelo - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de estudiantes del curso básico”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de estudiantes del curso avanzado”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

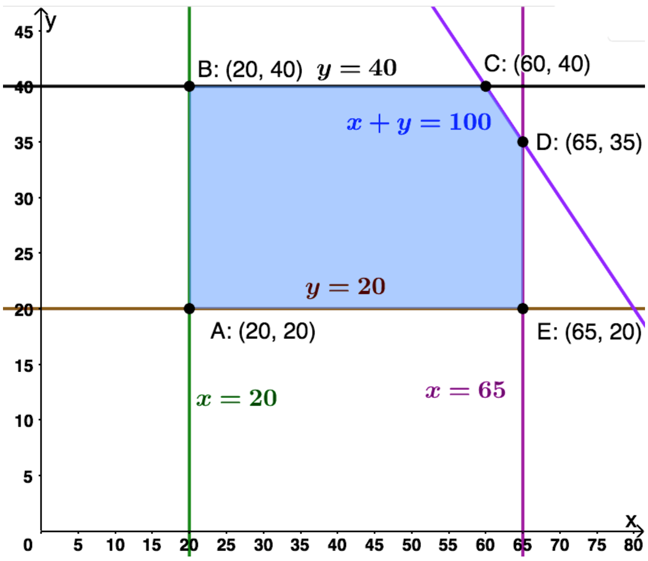
$$\begin{cases} ① \; 20 \leq x \leq 65 & \rightarrow (20,0) \quad \& \quad (65,0) \\ ② \; 20 \leq y \leq 40 & \rightarrow (0,20) \quad \& \quad (0,40) \\ ③ \; x + y \leq 100 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (100,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 145x + 150y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	20	5900
B	20	40	8900
C	60	40	14700
D	65	35	14675
E	65	20	12425



Por tanto el *máximo beneficio* es de 14700 euros y se obtiene con 60 estudiantes del curso básico y 40 del curso avanzado.

Ejercicio 80 (3 *puntos*)

> *Un producto se compone de la mezcla de otros dos* A *y* B*. Se tienen* 500 *kg de* A *y* 500 *kg de* B*. En la mezcla, el peso de* B *debe ser menor o igual que* 1,5 *veces el de* A*. Para satisfacer la demanda la producción debe ser mayor o igual que* 600 *kg. Sabiendo que cada kg de* A *cuesta* 5 *euros, y cada kg de* B *cuesta* 4 *euros. Calcular los kg de* A *y* B *que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2004 Junio - Opción A)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Kg de producto A"
  $y \equiv$ "Kg de producto B"

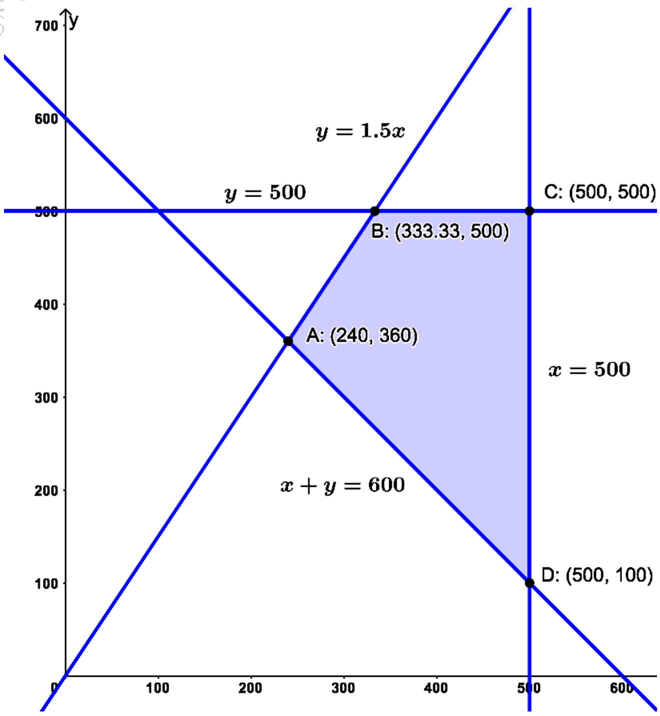
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; x \leq 500 & \to (500, 0) \\ ② \; y \leq 500 & \to (0, 500) \\ ③ \; y \leq 1{,}5x & \to (0, 0) \quad \& \quad (400, 600) \\ ④ \; x + y \geq 600 & \to (0, 600) \quad \& \quad (600, 0) \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	240	360	2640
B	333	500	3665
C	500	500	4500
D	500	100	2900

Por tanto hay que mezclar 240 kg del componente A con 360 kg del componente B para obtener un *coste mínimo* de 2640 euros.

Ejercicio 81 (3 *puntos*)

Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 euros, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 euros y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 euros a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que hraán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2004 Septiembre - Opción B)

Solución.

	lote A	lote B	Almacén
Nº bañadores	1	2	1600
Nº gafas de baño	1	1	1000
Nº gorros de baño	1	0	800
Beneficio (€)	8	10	

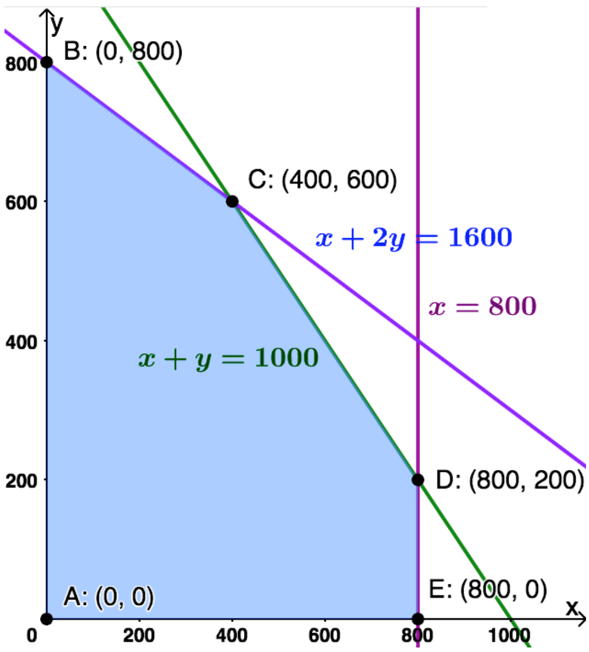
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de lotes tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + 2y \leq 1600 & \rightarrow (0, 800) \quad \& \quad (1600, 0) \\ ② \ x + y \leq 1000 & \rightarrow (0, 1000) \quad \& \quad (1000, 0) \\ ③ \ x \leq 800 & \rightarrow (0, 800) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 8x + 10y - 1500$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	800	6500
C	400	600	7700
D	800	200	6900
E	800	0	4900

Por tanto el *beneficio máximo* es de 7700 euros y se produce vendiendo 400 lotes del tipo A y 600 lotes del tipo B.

Ejercicio 82 (3 *puntos*)

Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.

a) Expresar la función objetivo.

b) Describir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

c) Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2005 Modelo - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de viajes realizados por el barco A"
  $y \equiv$ "Nº de viajes realizados por el barco B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

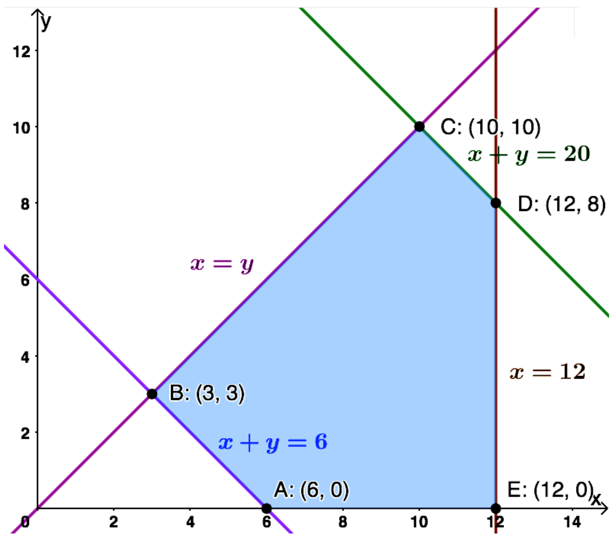
$$\begin{cases} ① \ x \geq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (6,6) \\ ② \ x \leq 12 & \rightarrow (12,0) \\ ③ \ x + y \geq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ④ \ x + y \leq 20 & \rightarrow (0,20) \quad \& \quad (20,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 18000x + 12000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	0	108000
B	3	3	90000
C	10	10	300000
D	12	8	312000
E	12	0	216000



Por tanto el *beneficio máximo* es de 312000 euros y se produce con 12 cruceros del barco A y 8 del barco B.

Ejercicio 83 (3 *puntos*)

> *Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada en vase grande. ¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el mínimo gasto de almacenaje? Obtener dicho mínimo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2005 Junio - Opción B)*

Solución.

	Envase pequeño	Envase grande	
Almacén			≤ 1000
Coste de almacenamiento	0,1€	0,2€	
Stock mínimo	≥ 100	≥ 200	

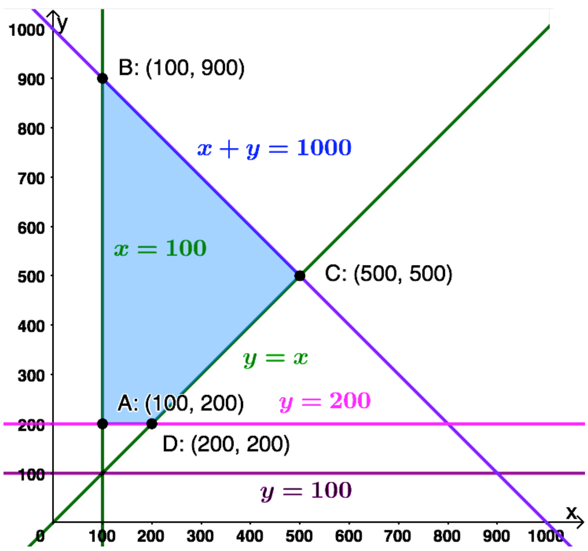
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de envases pequeños"
  $y \equiv$ "Nº de envases grandes"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 & \rightarrow (0, 1000) \quad \& \quad (1000, 0) \\ x \geq 100 & \rightarrow (100, 0) \\ y \geq 200 & \rightarrow (0, 200) \\ y \geq x & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (100, 100) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}2y$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	100	200	50
B	100	900	190
C	500	500	150
D	200	200	60

Por tanto el *coste de almacenamiento mínimo* es de 50 euros y se produce con un stock de 100 envases pequeños y 200 grandes.

Ejercicio 84 (3 *puntos*)

En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 gr de harina de trigo y 300 gr de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración del preparado B contiene 200 gr de harina de trigo y 100 gr de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2005 Septiembre - Opción A)

Solución.

	Preparado A	Preparado B	Almacén
Harina de trigo (gr)	200	200	≤ 24000
Harina de maíz (gr)	300	100	≤ 15000
Valor energético (cal)	600	400	

- `Incógnitas`

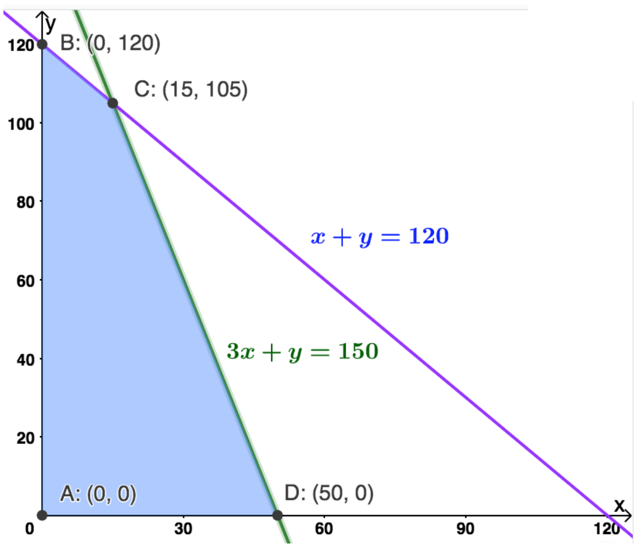
$$x \equiv \text{“Nº raciones del preparado } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº raciones del preparado } A\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 200x + 200y \leq 24000 \\ ② \ 300x + 100y \leq 15000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 120 & \rightarrow (0,120) \quad \& \quad (120,0) \\ ② \ 3x + y \leq 150 & \rightarrow (0,150) \quad \& \quad (50,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 600x + 400y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	120	48000
C	15	105	51000
D	50	0	30000

Por tanto el *rendimiento energético máximo* es de 51000 calorías y se produce con 15 preparados del tipo A y 105 del B.

Ejercicio 85 (3 *puntos*)

> *Un taller dedicado a la confección de prendas de punto fabrica dos tipos de prendas: A y B. Para la confección de la prenda de tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de máquina. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquina. El taller dispone al mes como máximo de 85 horas para el trabajo manual y de 75 horas para el trabajo de máquina y debe de confeccionar al menos 100 prendas. Si los beneficios son de 20 euros por cada prenda de tipo A de 17 euros por cada prenda de tipo B, ¿cuántas prendas de cada tipo debe de fabricar al mes, para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2006 Modelo - Opción B)*

Solución.

	Prendas tipo A	Prendas tipo B	Restricción
Tiempo trabajo manual (min.)	30	60	$\leq 85 \cdot 60 = 5100$
Tiempo trabajo máquina (min.)	45	20	$\leq 75 \cdot 60 = 4500$
Beneficio (€)	20	17	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de prendas de tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de prendas de tipo } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

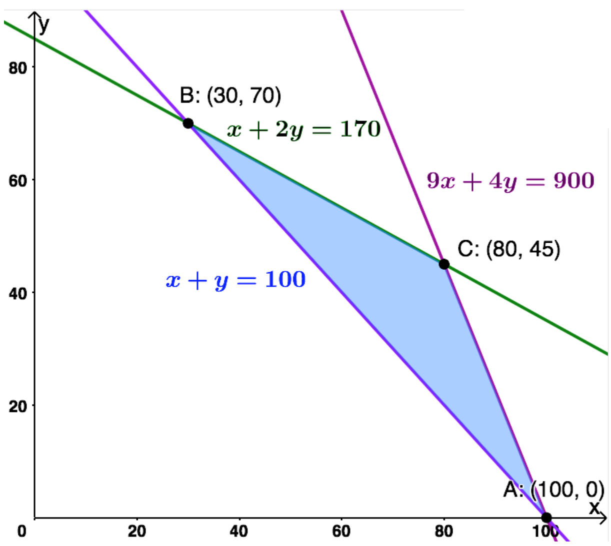
$$\begin{cases} ① \ 30x + 60y \leq 5100 \\ ② \ 45x + 20y \leq 4500 \\ ③ \ x + y \geq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + 2y \leq 170 & \to (0, 85) \quad \& \quad (170, 0) \\ ② \ 9x + 4y \leq 900 & \to (0, 225) \quad \& \quad (100, 0) \\ ③ \ x + y \geq 100 & \to (0, 100) \quad \& \quad (100, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 20x + 17y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	100	0	2000
B	30	70	1790
C	80	45	2365



Por tanto el *beneficio máximo* es de 2365 euros y se produce fabricando 80 prendas tipo A y 45 del tipo B.

Ejercicio 86 (3 *puntos*)

> *Una papelería quiere liguidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, ! y B. Los lotes A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 de papel normal, y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿?Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos ¿A cuántos ascienden estos ingresos máximos?.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2006 Junio - Opción A)*

Solución.

	Lote tipo A	Lote tipo B	Almacén
Papel reciclado (kg)	1	2	≤ 78
Papel normal (kg)	3	2	≤ 138
Precio de venta (€)	0,9	1	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de lotes de tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de lotes de tipo } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

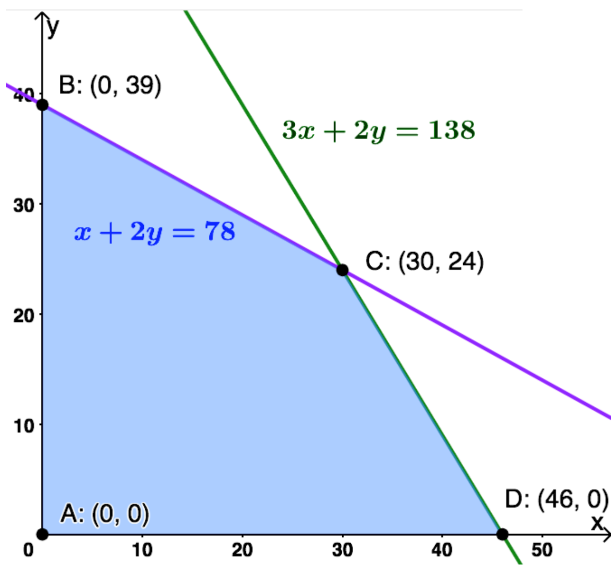
$$\begin{cases} ① \ x + 2y \leq 78 & \rightarrow (0,39) \quad \& \quad (78,0) \\ ② \ 3x + 2y \leq 138 & \rightarrow (0,69) \quad \& \quad (46,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 0{,}9x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	39	39
C	30	24	51
D	46	0	41,4



Por tanto el *máximo beneficio* es de 51 euros y se produce vendiendo 30 lotes de A y 24 de B.

Ejercicio 87 (3 *puntos*)

Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores: finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2006 Septiembre - Opción A)

Solución.

	Lámina fina	Lámina gruesa	
Kg de aluminio	5	20	≤ 400
Horas de trabajo	10	15	≤ 450
Ganancia (€)	45	80	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“}m^2 \text{ de lámina fina”}$$
$$y \equiv \text{““}m^2 \text{ de lámina gruesa””}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

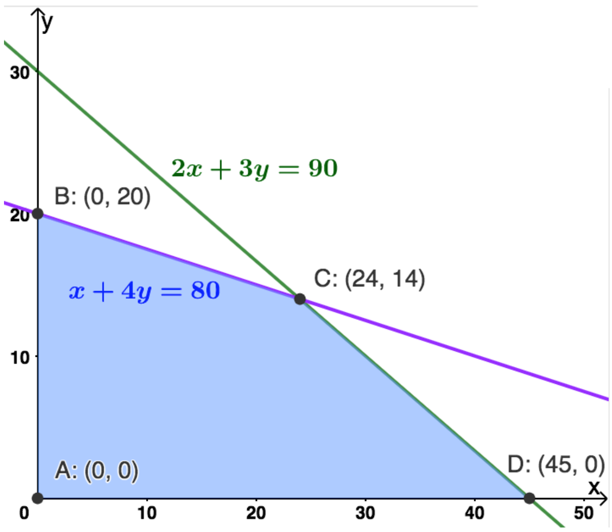
$$\begin{cases} ① \ 5x + 20y \leq 400 \\ ② \ 10x + 15y \leq 450 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + 4y \leq 80 & \to (0, 20) \quad \& \quad (80, 0) \\ ② \ 2x + 3y \leq 90 & \to (0, 30) \quad \& \quad (45, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 45x + 80y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	20	1600
C	24	14	2200
D	45	0	2025



Por tanto la *ganancia máxima* es de 2200 euros y se produce fabricando 24 m^2 de lámina de aluminio fina y 14 m^2 de lámina gruesa.

Ejercicio 88 (3 *puntos*)

> *Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de tipo B, 1000 euros. Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2007 Junio - Opción B)*

Solución.

	Cable tipo A	Cable tipo B	Almacén
Kg cobre / 100 m cable	10	15	≤ 195
Kg titanio / 100 m cable	2	1	≤ 20
Kg alumnio / 100 m cable	1	1	≤ 14
Beneficio (€) / 100 m cable	1500	1000	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de cable tipo A (cientos de m)"
  $y \equiv$ "Cantidad de cable tipo B (cientos de m)"

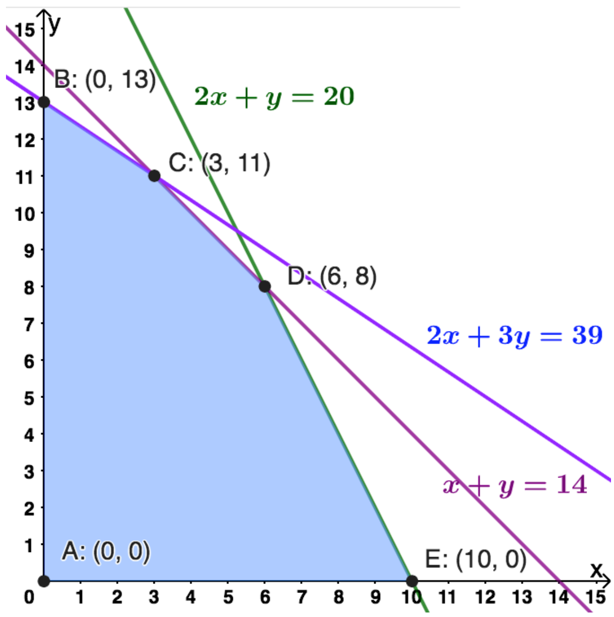
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 10x + 15y \leq 195 \\ ② \ 2x + y \leq 20 \\ ③ \ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 2x + 3y \leq 39 & \to (0, 13) & \& & (19{,}5, 0) \\ ② \ 2x + y \leq 20 & \to (0, 20) & \& & (10, 0) \\ ③ \ x + y \leq 14 & \to (0, 14) & \& & (14, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 1500x + 1000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	13	13000
C	3	11	15500
D	6	8	17000
E	10	0	15000

Por tanto el *máximo beneficio* es de 17000 euros y se produce fabricando 600 m de cable del tipo A y 800 del tipo B.

Ejercicio 89 (3 *puntos*)

> *Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de* 104 *m, necesitándose* 2 *m para instalar una fila de clase preferente y* 1,5 *m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos* 3 *filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de* 152 *euros y de* 206 *euros para la clase preferente.*
> *¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2007 Septiembre - Opción B)*

Solución.

	Clase preferente	Clase turista	Restricción
Espacio necesario (m)	2	1,5	≤ 104
Beneficios (€)	206	152	
	≥ 3	$\geq 3x$	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de filas de clase preferente”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de filas de clase turista”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

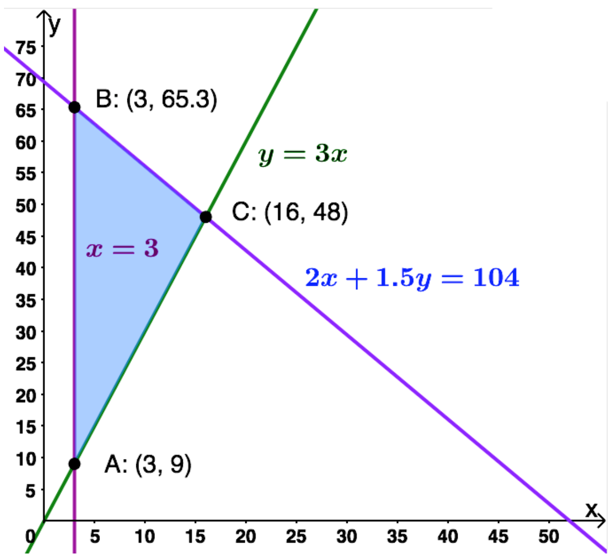
$$\begin{cases} ① \ 2x + 1{,}5y \leq 104 & \rightarrow (0, 69{,}3) \quad \& \quad (52, 0) \\ ② \ x \geq 3 & \rightarrow (3, 0) \\ ③ \ y \geq 3x & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (3, 9) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 206x + 152y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	3	9	1986
B	3	65,3	10548, 7
C	16	48	10592



Por tanto el *máximo beneficio* es de 10592 euros instalando 16 filas de clase preferente y 48 de clase turista.

Ejercicio 90 (3 *puntos*)

a) *Representar la región del plano definida por el siguiente sistema de inecuaciones:*

$$\begin{cases} -x+y \le 60 \\ x+y \ge -40 \\ 11x+3y \le 40 \end{cases}$$

b) *Maximizar la función* $f(x,y) = 10x - y$ *en la región obtenida.*

c) *Minimizar la función* $g(x,y) = x - 10y$

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2008 Modelo - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ -x+y \le 60 & \to (0,60) \quad \& \quad (-60,0) \\ ② \ x+y \ge -40 & \to (0,-40) \quad \& \quad (-40,0) \\ ③ \ 11x+3y \le 40 & \to (0, {}^{40}/_{3}) \quad \& \quad ({}^{40}/_{11}, 0) \end{cases}$$

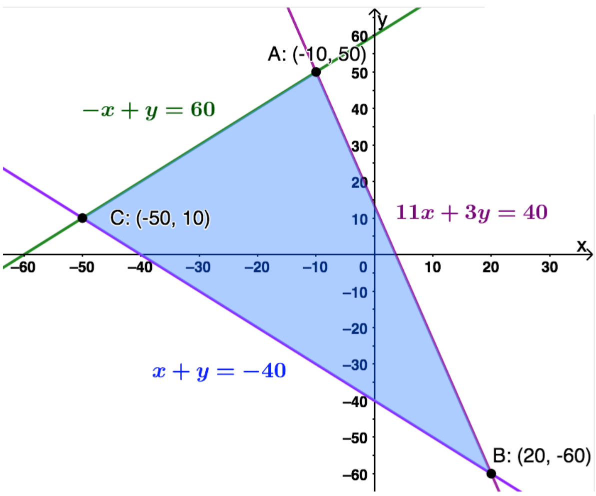
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 10x - y \qquad \& \qquad g(x,y) = x - 10y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$	$g(x,y)$
A	-10	50	-150	-510
B	20	-60	260	620
C	-50	10	-510	-150



El *máximo de* $f(x,y)$ es de 260 y se produce en el punto $B : (20, -60)$.
El *mínimo de* $g(x,y)$ es de -510 y se produce en el punto $A : (-10, 50)$.

Ejercicio 91 (3 *puntos*)

Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada almazara para obtener el mínimo coste? Determinínese dicho coste mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2008 Junio - Opción B)

Solución.

	Almazara A	Almazara B	
Compra mínima (ton.)	1	1	≥ 6
Precio venta (€/ton)	2000	3000	
Precio venta (€/ton)	$2 \leq x \leq 7$	$2 \leq y \leq 7$	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de aceite de la almazara A (ton.)"
  $y \equiv$ "Cantidad de aceite de la almazara B (ton.)"

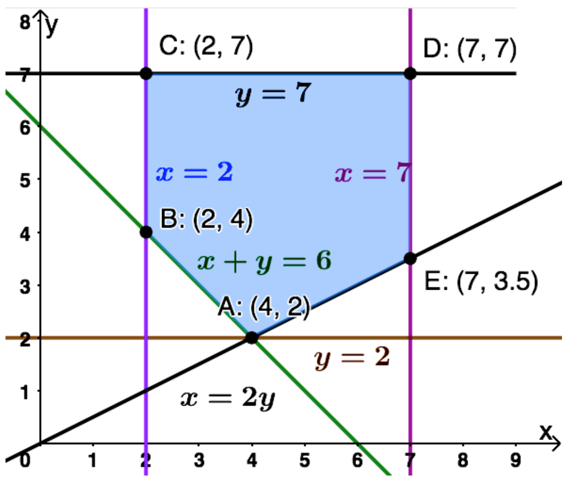
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 6 & \to (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \; 2 \leq x \leq 7 & \to (2,0) \quad \& \quad (7,0) \\ ③ \; 2 \leq y \leq 7 & \to (2,0) \quad \& \quad (7,0) \\ ④ \; x \leq 2y & \to (0,0) \quad \& \quad (2,1) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2000x + 3000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	4	2	14000
B	2	4	16000
C	2	7	25000
D	7	7	35000
E	7	3,5	24500

Por tanto el *coste mínimo* es de 14000 euros, para lo que habrá que comprar 4 ton. a la almazara A y 2 a la B.

Ejercicio 92 (3 *puntos*)

Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las del tipo B garantizan una ganancia del 5 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual?. Determínese dicha ganancia máxima.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2008 Septiembre - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad invertida en acciones del tipo } A\text{” (€)}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad invertida en acciones del tipo } B \text{ (€)”}$$

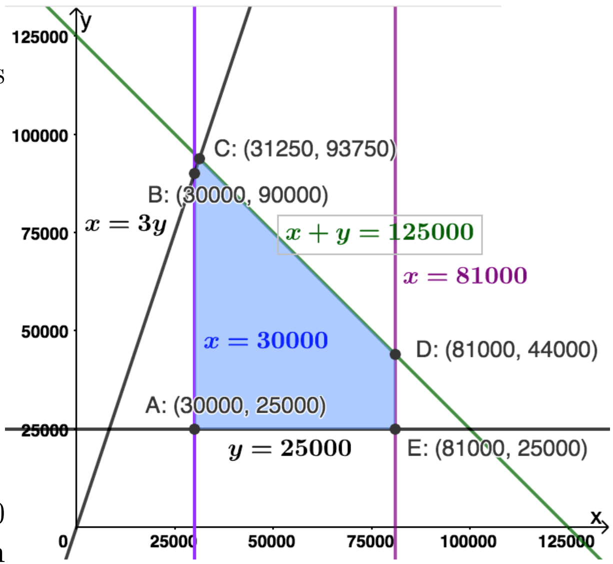
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y \le 125000 & \to (0,125000) \quad \& \quad (125000,0) \\ ② \ 30000 \le x \le 81000 & \to (30000,0) \quad \& \quad (81000,0) \\ ③ \ y \ge 25000 & \to (0,25000) \\ ④ \ y \le 3x & \to (0,0) \quad \& \quad (25000,75000) \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 0{,}1x + 0{,}05y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	30000	25000	4250
B	30000	90000	7500
C	31250	93750	7812,5
D	81000	44000	10300
E	81000	25000	9350

Por tanto el *máximo beneficio* es de 10300 euros y se produce invirtiendo 81000 € en acciones de tipo A y 44000 en la de tipo B.

Ejercicio 93 (3 *puntos*)

Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2009 Junio - Opción B)

Solución.

	Petróleo A	Petróleo B	Restricciones
Gasolina refinada (ton.)	0,1	0,05	≥ 10
Fuel-oil refinado (ton.)	0,35	0,55	≥ 50
Coste petróleo (€/ton)	350	400	
	≤ 100	≤ 100	

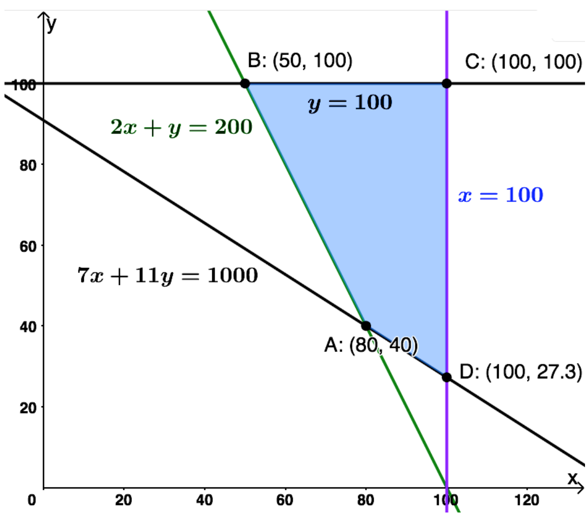
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Toneladas de petróleo tipo A"
  $y \equiv$ "Toneladas de petróleo tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; 0{,}1x + 0{,}05y \geq 10 \\ ② \; 0{,}35x + 0{,}55y \geq 50 \\ ③ \; x \leq 100 \\ ④ \; y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; 2x + y \geq 200 & \to (0,200) \quad \& \quad (100,0) \\ ② \; 7x + 11y \geq 1000 & \to (0,90{,}9) \quad \& \quad (142{,}8,0) \\ ③ \; x \leq 100 & \to (100,0) \\ ④ \; y \leq 100 & \to (0,100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 350x + 400y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	80	40	44000
B	50	100	57500
C	100	100	75000
D	100	27,3	45909

Por tanto el *coste mínimo* es de 44000 euros y se obtiene comprando 80 toneladas de petróleo tipo A y 40 de tipo B

Ejercicio 94 (3 *puntos*)

Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0,3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas de taller de fabricación y 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2009 Septiembre - Opción A)

Solución.

	Panel tipo A	Panel tipo B	
Horas de fabricación	0,3	0,2	≤ 240
Horas de barnizado	0,2	0,2	≤ 200
Beneficio (€/m^2)	4	3	

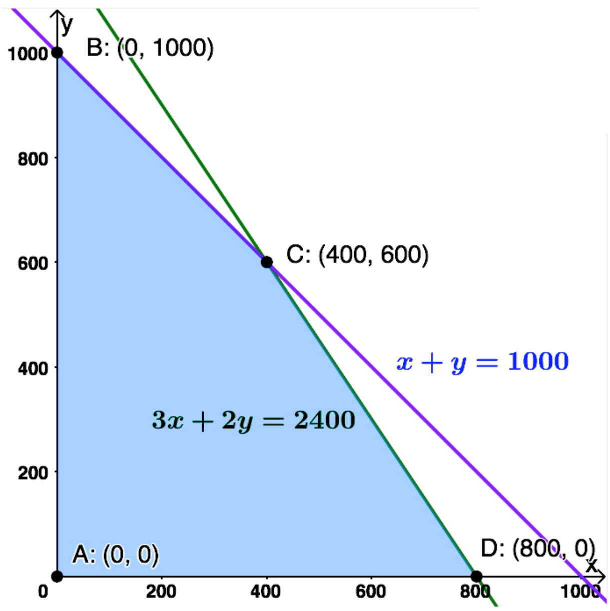
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "m^2 de panel tipo A"
  $y \equiv$ "m^2 de panel tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; 0{,}3x + 0{,}2y \leq 240 \\ ② \; 0{,}2x + 0{,}2y \leq 200 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; 3x + 2y \leq 2400 & \rightarrow (0, 1200) \quad \& \quad (800, 0) \\ ② \; x + y \leq 1000 & \rightarrow (0, 1000) \quad \& \quad (1000, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 4x + 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	1000	3000
C	400	600	3400
D	800	0	4200

Por tanto el *máximo beneficio* es de 3400 euros y se produce fabricando 400 m^2 de panel tipo A y 600 m^2 de tipo B.

Ejercicio 95 (3 *puntos*)

> *Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de tipo B, 1000 euros. Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2010 Modelo - Opción B)*

Solución.

	Cable tipo A	Cable tipo B	Almacén
Kg cobre / 100 m cable	10	15	≤ 195
Kg titanio / 100 m cable	2	1	≤ 20
Kg alumnio / 100 m cable	1	1	≤ 14
Beneficio (€) / 100 m cable	1500	1000	

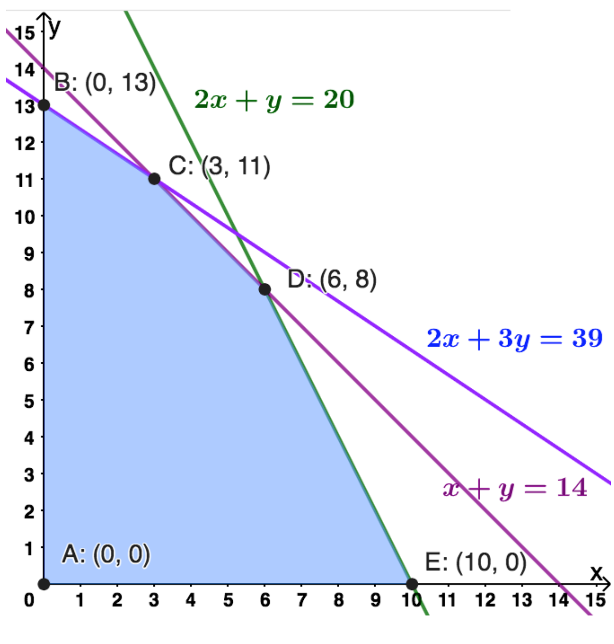
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de cable tipo A (cientos de m)"
  $y \equiv$ "Cantidad de cable tipo B (cientos de m)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 10x + 15y \leq 195 \\ ② \ 2x + y \leq 20 \\ ③ \ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 2x + 3y \leq 39 & \to (0,13) \quad \& \quad (19{,}5, 0) \\ ② \ 2x + y \leq 20 & \to (0,20) \quad \& \quad (10, 0) \\ ③ \ x + y \leq 14 & \to (0,14) \quad \& \quad (14, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 1500x + 1000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	13	13000
C	3	11	15500
D	6	8	17000
E	10	0	15000

Por tanto el *máximo beneficio* es de 17000 euros y se produce fabricando 600 m de cable del tipo A y 800 del tipo B.

Ejercicio 96 (3 *puntos*)

Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes españoles, mientras que el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800000 euros la inversión total en jugadores extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser como mínimo de 500000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros. ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo? Calcúlese dicho importe máximo. Justifíquese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2010 Junio - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad invertida en fichajes españoles (miles de €)"
  $y \equiv$ "Cantidad invertida en fichajes extranjeros (miles de €)"

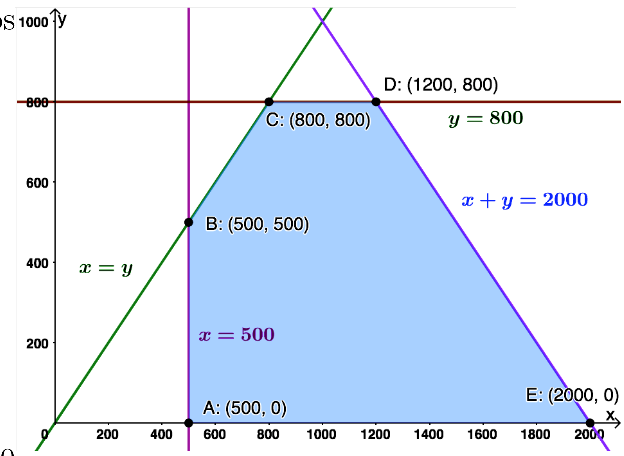
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 2000 & \to (0, 2000) \quad \& \quad (2000, 0) \\ ② \; y \leq 800 & \to (0, 800) \\ ③ \; x \geq 500 & \to (500, 0) \\ ④ \; x \geq y & \to (0, 0) \quad \& \quad (500, 500) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}15y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	500	0	50
B	500	500	125
C	800	800	200
D	1200	800	240
E	2000	0	200

Por tanto el *máximo beneficio* es de 240000 € invirtiendo 1200000 € en fichajes españoles y 800000 € en fichajes extranjeros.

Ejercicio 97 (3 *puntos*)

> *Un pintos necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6 m^2 por kg y un precio de 1 euros por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2010 Septiembre - Opción B)*

Solución.

	Pintura tipo A	Pintura tipo B	Almacén
Rendimiento (m^2/kg)	6	8	≥ 480
Precio (€/kg)	1	1,2	≤ 120
	$x \leq 75$	$y \leq 75$	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Kg pintura proveedor A"
  $y \equiv$ "Kg pintura proveedor B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

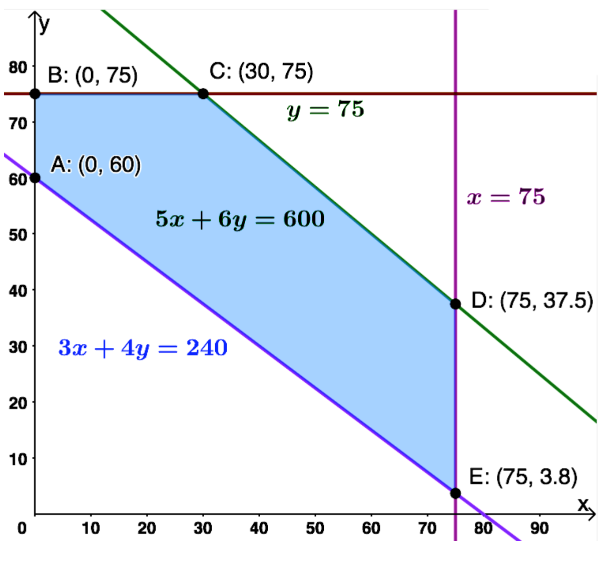
$$\begin{cases} ① \ 6x + 8y \geq 480 \\ ② \ x + 1{,}2y \leq 120 \\ ③ \ x \leq 75 \\ ④ \ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 3x + 4y \geq 240 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (80,0) \\ ② \ 5x + 6y \leq 600 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (120,0) \\ ③ \ x \leq 75 & \rightarrow (75,0) \\ ④ \ y \leq 75 & \rightarrow (0,75) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x + 1{,}2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	60	72
B	0	75	90
C	30	75	120
D	75	37,5	120
E	75	3,8	79,6



Por tanto el *coste mínimo* es de 72 euros y corresponde a la compra de 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B.

Ejercicio 98 (3 *puntos*)

Se considera la región S acotada plana definida por las cinco condiciones siguientes:

$$x + 2y \leq 4 \quad \& \quad x - 2y \leq 4 \quad \& \quad 2x - 3y \geq -6 \quad \& \quad 2x + 3y \geq -6 \quad \& \qquad \& \quad x \leq 2$$

a) *Dibújese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Calcúlense los valores máximos y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S y especifíquense los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2004 Junio - Opción A)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

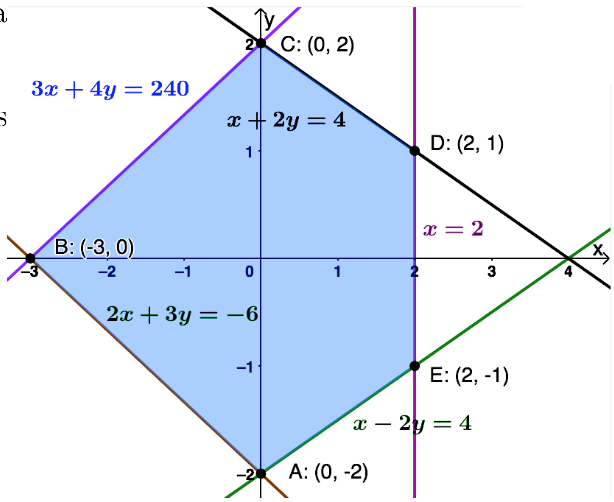
$$\begin{cases} ① \; x + 2y \leq 4 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (4, 0) \\ ② \; x - 2y \leq 4 & \rightarrow (0, -2) \quad \& \quad (4, 0) \\ ③ \; 2x - 3y \geq -6 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (-3, 0) \\ ④ \; 2x + 3y \geq -6 & \rightarrow (0, -2) \quad \& \quad (-3, 0) \\ ④ \; x \leq 2 & \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	-2	-2
B	-3	0	-6
C	0	2	2
D	2	1	5
E	2	-1	3



Por tanto el *mínimo* de $f(x, y)$ es de -6 y se produce en el punto $B : (-3, 0)$, mientras que el *máximo* es igual a 5 y se produce en el punto $D : (2, 1)$.

Ejercicio 99 (3 *puntos*)

Una compañía aérea oferta hasta un máximo de 60 plazas en sus vuelos diarios entre Madrid y Lisboa. Las plazas de clase turista se ofrecen a 40 euros, mientras que las de primera clase tienen un precio de venta de 75 euros. Por normativa internacional, el número de plazas ofertadas de primera clase debe ser inferior o igual al doble de las plazas de clase turista y superior o igual a la mitad de las plazas de dicha clase turista. Además, por motivos de estrategia empresarial, la compañía tiene que ofrecer como mínimo 10 plazas de clase turista.
¿Qué número de plazas de cada clase se deben ofertar diariamente con el objetivo de maximizar los ingresos de la aerolínea? Determínese dicho ingreso máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2012 Junio - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas`

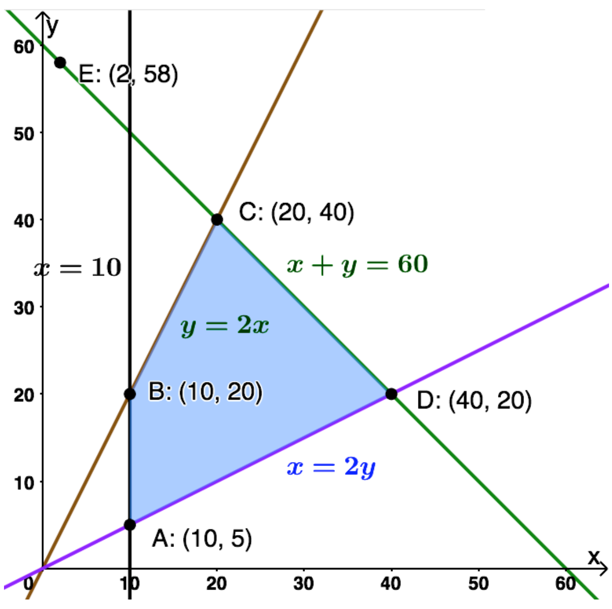
$$x \equiv \text{“Nº de plazas de clase turista ofertadas”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de plazas de primera clase ofertadas”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x+y \leq 60 \\ ② \; y \leq 2x \\ ③ \; y \geq \dfrac{x}{2} \\ ④ \; x \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x+y \leq 60 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (60,0) \\ ② \; y \leq 2x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,60) \\ ③ \; x \leq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (60,30) \\ ④ \; x \geq 10 & \rightarrow (10,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 40x + 75y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	5	775
B	10	20	1900
C	20	40	3800
D	40	20	3100

Por tanto el *ingreso máximo* es de 3800 euros y se obtiene ofertando 20 asientos de clase turista y 40 de primera clase.

Ejercicio 100 (3 *puntos*)

> *Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de 3 m^2 por litro, con un coste de 1 euro por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de 4 m^2 por litro, con un coste de 1,2 euros por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480euros y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura. Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2012 Septiembre - Opción A)*

Solución.

- Si utiliza un litro cada 10 minutos, en las 75 horas que puede pintar como máximo utilizará $75 \cdot 6 = 450\ \ell$.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de pintura tipo 1 } (\ell)\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de pintura tipo 2 } (\ell)\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

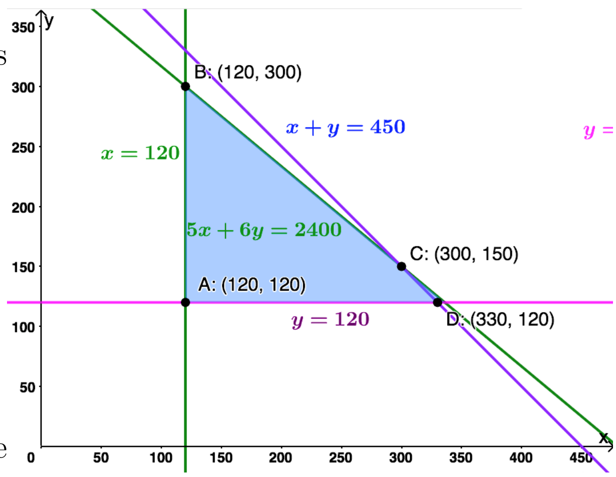
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 450 \\ ② \ x + 1{,}2y \leq 480 \\ ③ \ x \geq 120 \\ ④ \ y \geq 120 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 450 & \rightarrow (0, 450) \quad \& \quad (450, 0) \\ ② \ 5x + 6y \leq 2400 & \rightarrow (0, 400) \quad \& \quad (480, 0) \\ ③ \ x \geq 120 & \rightarrow (120, 0) \\ ④ \ y \geq 120 & \rightarrow (0, 120) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 3x + 4y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	120	120	840
B	120	300	1560
C	300	150	1500
D	330	120	1470



Por tanto la *superficie máxima* que se puede pintar de de 1560 m^2 utilizando 120 ℓ de la primera pintura y 300 ℓ de la segunda.

Ejercicio 101 (2 *puntos*)

a) *Determínense los valores de a y b para que la función objetivo $F(x, y) = 3x + y$ alcance su valor máximo en el punto $(6, 3)$ de la región factible definida por:*

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + ay \leq 3 \\ 2x + y \leq b \end{cases}$$

b) *Represéntese la región factible para esos valores y calcúlense las coordenadas de todos sus vértices.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Modelo - Opción B)

Solución.

Como el punto $(6, 3)$ ha de ser un vértice de la región factible, debe ser el punto de corte de las rectas:

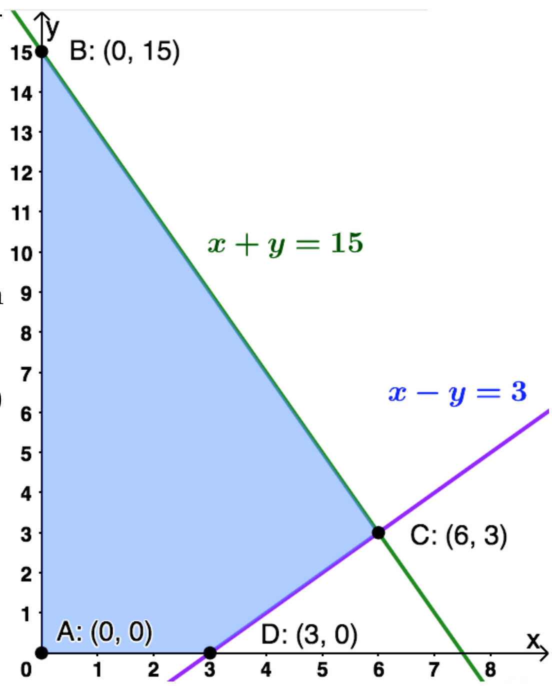
$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + y = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6 + 3a = 3 \Longrightarrow \boxed{a = -1} \\ 2 \cdot 6 + 3 = b \Longrightarrow \boxed{b = 15} \end{cases}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x - y \leq 3 & \rightarrow (0, -3) \;\; \& \;\; (3, 0) \\ ② \; 2x + y \leq 15 & \rightarrow (0, 15) \;\; \& \;\; (7{,}5, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	
A	0	0	
B	0	15	
C	6	3	
D	3	0	

Ejercicio 102 (2 *puntos*)

Se desea maximizar la función $f(x, y) = 64{,}8x + 76{,}5y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$6x + 5y \leq 700 \quad \& \quad 2x + 3y \leq 300 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) *Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Determínese el valor máximo de* f *sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Junio - Opción A)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

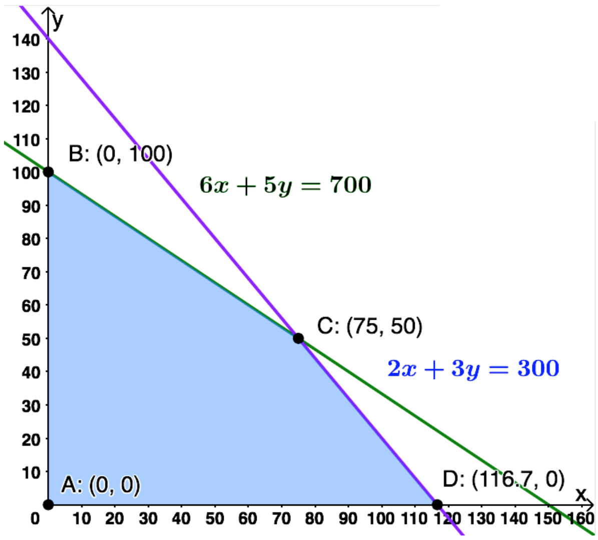
$$\begin{cases} ① \ 6x + 5y \leq 700 & \to (0, 140) \quad \& \quad (116{,}7, 0) \\ ② \ 2x + 3y \leq 300 & \to (0, 100) \quad \& \quad (150, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 64{,}8x + 76{,}5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	100	7650
C	75	50	8685
D	116,7	0	7560



Por tanto el *máximo* de la función $f(x, y)$ es de 8685 y se produce en el punto $C : (75, 50)$.

Ejercicio 103 (2 *puntos*)

Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones:

$$C : \begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \geq 5 \\ 7x + y \leq 35 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = 3x - 2y$ sobre la región C, determinando los puntos donde se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Junio - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

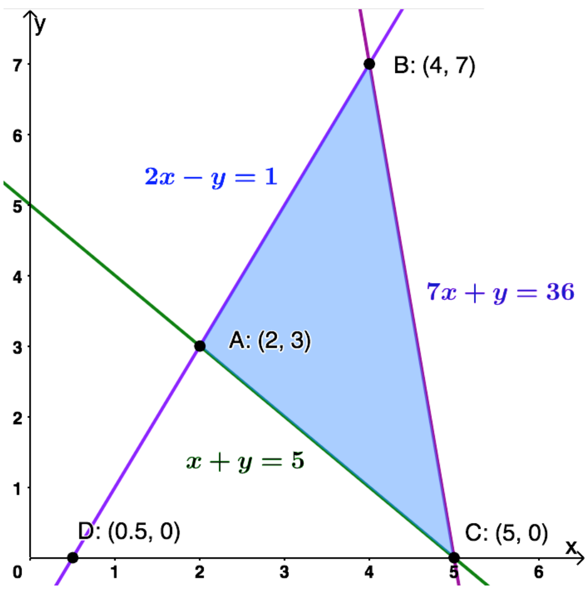
$$\begin{cases} ① \ 2x - y \geq 1 & \rightarrow (0, -1) \quad \& \quad (0{,}5, 0) \\ ② \ x + y \geq 5 & \rightarrow (0, 5) \quad \& \quad (5, 0) \\ ③ \ 7x + y \leq 35 & \rightarrow (0, 35) \quad \& \quad (5, 0) \\ ④ & \rightarrow (0,) \quad \& \quad (, 0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 3x - 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	3	0
B	4	7	-2
C	5	0	15



Por tanto el *máximo* de $f(x, y)$ es de 15 en el punto $C : (5, 0)$, mientras que el *mínimo* es de -2 en el punto $B : (4, 7)$.

Ejercicio 104 (2 *puntos*)

Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y \geq 3 \\ 2x-y \leq 4 \\ 2x+ \leq 24 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el punto de C donde la función $f(x,y)=3x+y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Septiembre - Opción A)

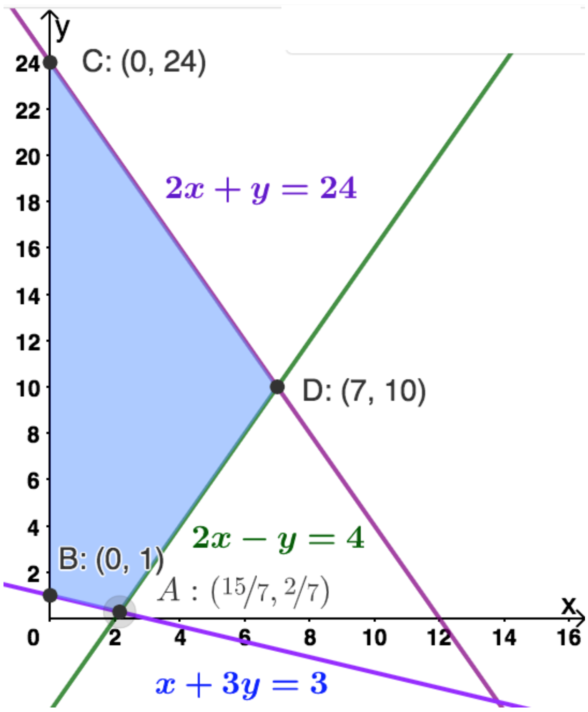
Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+3y \geq 3 & \to (0,1) \quad \& \quad (3,0) \\ ② \ 2x-y \leq 4 & \to (0,-4) \quad \& \quad (2,0) \\ ③ \ 2x+y \leq 24 & \to (0,24) \quad \& \quad (12,0) \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y)=3x+y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	$15/7$	$2/7$	$47/7$
B	0	1	1
C	0	24	24
D	7	10	31



Por tanto el *máximo* de la función $f(x,y)$ es igual a 31 y se produce en el punto $D:(7,10)$.

Ejercicio 105 (2 *puntos*)

Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 *toneladas y yates de* 100 *toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar* 100 *horas y cada yate* 50 *horas. El astillero dispone de* 1600 *horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de* 12 *pesqueros ni más de* 16 *yates. Las reparaciones se pagan a* 100 *euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Modelo - Opción A)

Solución.

	Pesqueros	Yates	Restricción
Tiempo reparación (h)	100	50	≤ 1600
	$x \leq 12$	$y \geq 16$	

- `Incógnitas`

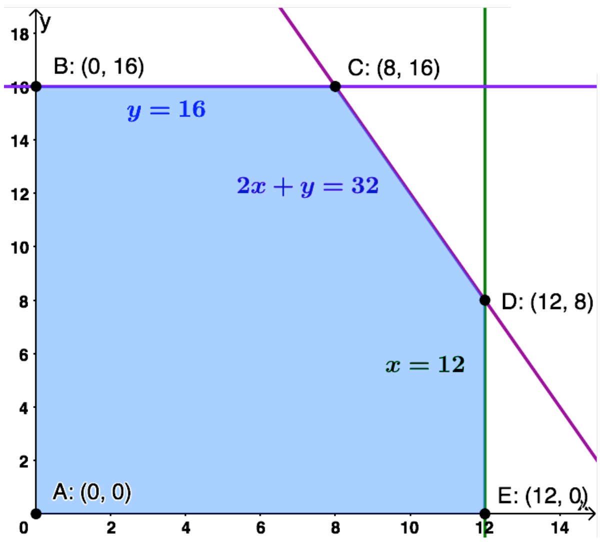
$$x \equiv \text{“Nº de pesqueros reparados”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de yates reparados”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ①\ 100x + 50y \leq 1600 \\ ②\ x \leq 12 \\ ③\ y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ①\ 2x + y \leq 320 & \to (0, 320) \quad \& \quad (160, 0) \\ ②\ x \leq 12 & \to (12, 0) \\ ③\ y \leq 16 & \to (0, 16) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 50000x + 10000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	16	160000
C	8	16	560000
D	12	8	680000
E	12	0	600000

Por tanto el *ingreso máximo* es de 680000 euros reparando 12 barcos pesqueros y 8 yates.

Ejercicio 106 (2 *puntos*)

Se considera la función $f(x,y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \leq 0 \quad \& \quad x + y \leq 6 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \leq 3$$

a) *Represéntese la región S.*

b) *Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S, indicando los puntos donde se alcanzan.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Junio - Opción A)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

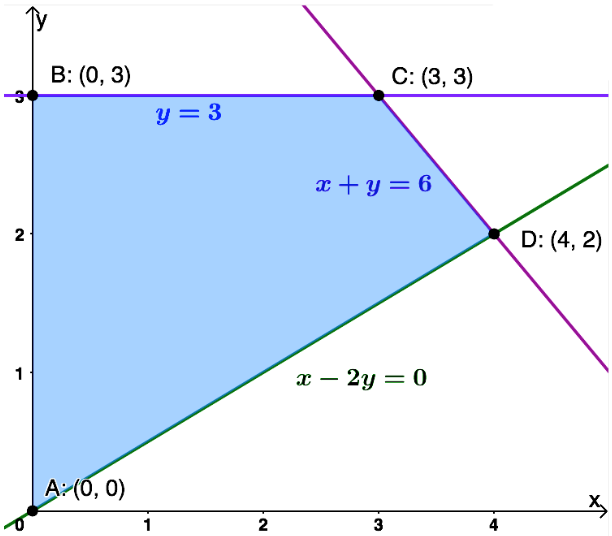
$$\begin{cases} ① \ x - 2y \leq 0 & \to (0,0) \quad \& \quad (6,3) \\ ② \ x + y \leq 6 & \to (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ③ \ y \leq 3 & \to (3,0) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 5x - 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	3	-6
C	3	3	9
D	4	2	16



El *mínimo* de la función $f(x,y)$ es igual a -6 y se produce en el punto $B : (0,3)$.
El *máximo* de la función $f(x,y)$ es igual a 16 y se produce en el punto $D : (4,2)$.

Ejercicio 107 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x - 2y \leq 0 \quad \& \quad x - y \leq 1 \quad \& \quad x + y \leq 5 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

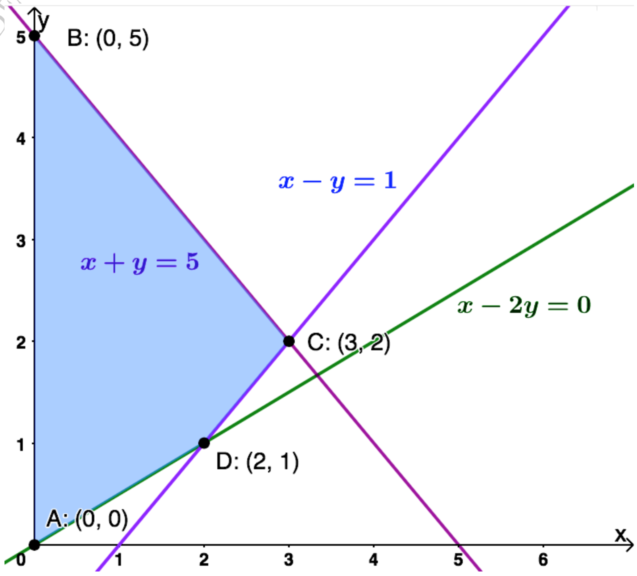
$$\begin{cases} ① \; x - 2y \leq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (2,1) \\ ② \; x - y \leq 1 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (1,0) \\ ③ \; x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\qquad f(x, y) = x - y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	5	-5
C	3	2	1
D	2	1	1



El *mínimo* de $f(x, y)$ es de -5 y se produce en el punto $B : (0, 5)$.
El *máximo* de $f(x, y)$ es de 1 y se produce en cualquier punto del segmento que une los puntos $C : (3, 2)$ y $D : (2, 1)$.

Ejercicio 108 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x - 4 \quad \& \quad y \leq x - 1 \quad \& \quad 2y \geq x \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlene las coordenadas de sus vértices.

b) Obténgase los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

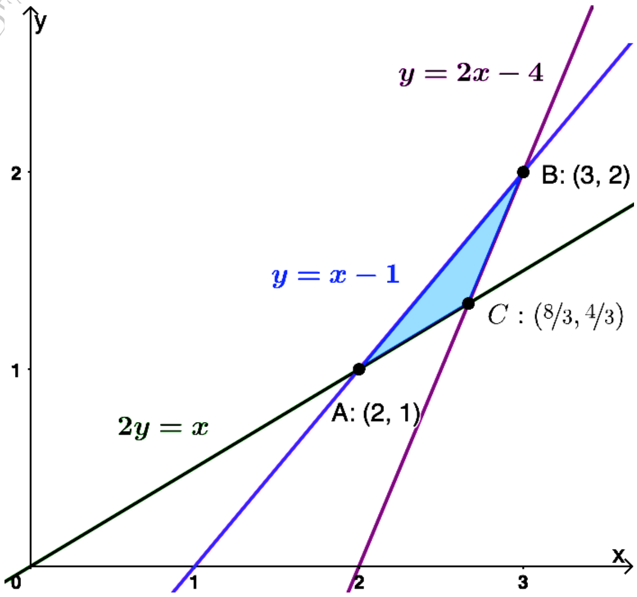
$$\begin{cases} ① \; y \leq 2x - 4 & \rightarrow (0,-4) \quad \& \quad (2,0) \\ ② \; y \leq x - 1 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (1,0) \\ ③ \; 2y \geq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (4,2) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x - 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	1	-1
B	3	2	-3
C	$8/3$	$4/3$	$-4/3$



El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -3 y se produce en el punto $B : (3,2)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de -1 y se produce en el punto $A : (2,1)$.

Ejercicio 109 (2 *puntos*)

Una industria química elabora plásticos de dos calidades diferentes. Para ellos tiene 2 máquinas, A y B. Es necesario que fabrique un mínimo de 20 toneladas de plástico superior y 13 de plástico medio. Cada hora que trabaja la máquina A, fabrica 7 toneladas de plástico superior y 2 de plástico medio, mientras que la máquina B produce 2 y 3 toneladas, respectivamente. Además, la máquina A no puede trabajar más de 9 horas, ni más de 10 horas la máquina B. El coste de funcionamiento de las máquinas es de 800 euros/hora para A y de 600 euros/hora para B. Calcúlese cuántas horas debe funcionar cada máquina para que el coste total de funcionamiento sea mínimo y cuál es ese coste mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción A - Coincidentes)

Solución.

	Envase pequeño	Envase grande	Restricción
Plástico superior (ton/h)	7	2	≥ 20
Plástico medio (ton/h)	2	3	≥ 13
	≤ 9	≤ 10	

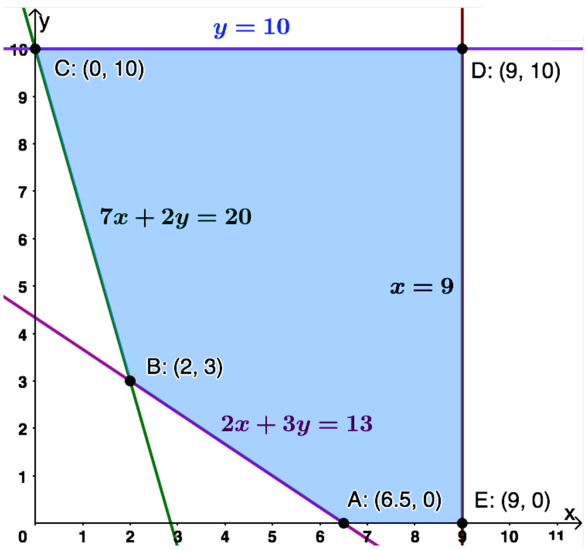
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo de funcionamiento máquina A (h)"
  $y \equiv$ "Tiempo funcionamiento máquina B (h)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ①\ 7x + 2y \geq 20 & \rightarrow (0, 10) \quad \& \quad (20/7, 0) \\ ②\ 2x + 3y \geq 13 & \rightarrow (0, 13/3) \quad \& \quad (13/2, 0) \\ ③\ x \leq 9 & \rightarrow (9, 0) \\ ④\ y \leq 10 & \rightarrow (10, 0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 800x + 600y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	6,5	0	5200
B	2	3	3400
C	0	10	6000
D	9	10	13200
E	9	0	7200

Por lo tanto el *coste mínimo* es de 3400 euros y se produce con 2 horas de trabajo de la máquina A y 3 horas de la B.

Ejercicio 110 (2 *puntos*)

> *Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2 euros, mientras que producir un litro de bebida B cuesta 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar mas de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifíquense las respuestas.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Modelo - Opción A)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de bebida A (millones de litros)"
  $y \equiv$ "Cantidad de bebida B (millones de litros)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

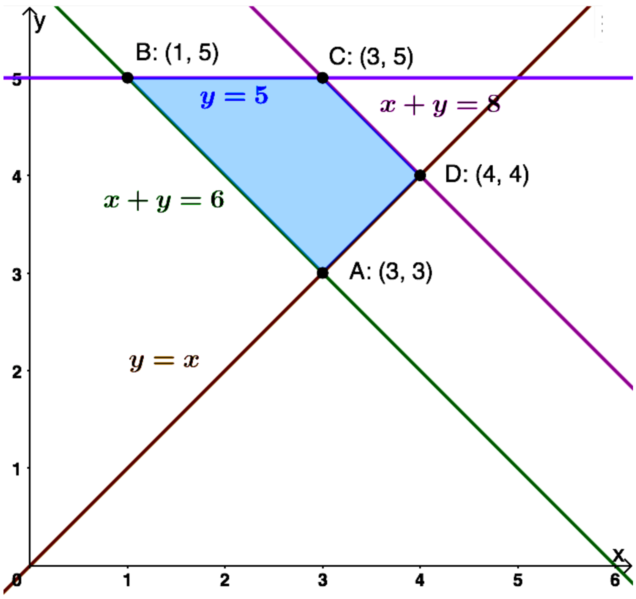
$$\begin{cases} ① \; x+y \geq 6 & \to (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \; x+y \leq 8 & \to (0,8) \quad \& \quad (8,0) \\ ③ \; y \leq 5 & \to (0,5) \\ ④ \; y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (5,5) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2x + 0{,}5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3	3	7,5
B	1	5	4,5
C	3	5	8,5
D	4	4	10



El *coste mínimo* es de 4,5 millones de euros y se produce vendiendo 1 millón de litros de la bebida A y 5 de la bebida B.

Ejercicio 111 (2 *puntos*)

Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho 6 *toneladas de pienso del tipo A y como máximo* 4 *toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de* 1000 *euros y el de una tonelada del tipo B de* 2000 *euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Producción diaria de pienso tipo } A \text{ (ton.)”}$$
$$y \equiv \text{“Producción diaria de pienso tipo } A \text{ (ton.)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

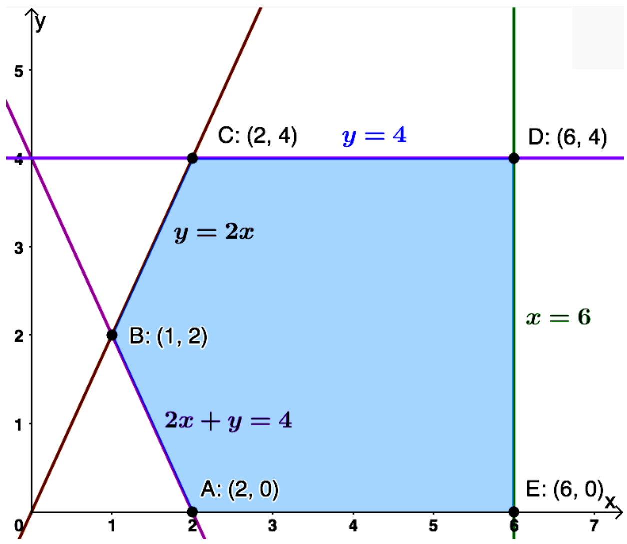
$$\begin{cases} ① \; x \leq 6 & \to (6,0) \\ ② \; y \leq 4 & \to (0,4) \\ ③ \; y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (2,4) \\ ④ \; 2x + y \geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (2,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 1000x + 2000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	0	2000
B	1	2	5000
C	2	4	10000
D	6	4	14000
E	6	0	6000



El *coste mínimo* es de 2000 euros y se obtiene produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna de B.

Ejercicio 112 (2 *puntos*)

Un banco oferta dos productos financieros, A y B. El banco garantiza para el producto A un beneficio anual del $5\,\%$ de la cantidad invertida, y para el producto B un beneficio del $2\,\%$ anual de la cantidad invertida. Una persona desea invertir en ambos productos a lo sumo 10000 euros, con la condición de que la cantidad invertida en el producto A no supere el triple de la cantidad invertida en el producto B y que la inversión en el producto B sea de 6000 euros como máximo.
Determínese qué cantidad debe invertir en cada producto para obtener, al cabo de un año, un beneficio máximo y obténgase este beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } A \text{ (euros)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } B \text{ (euros)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x+y \leq 10000 & \rightarrow (0,10000) \quad \& \quad (10000,0) \\ ② \; x \leq 3y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (3000,9000) \\ ③ \; y \leq 6000 & \rightarrow (0,6000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

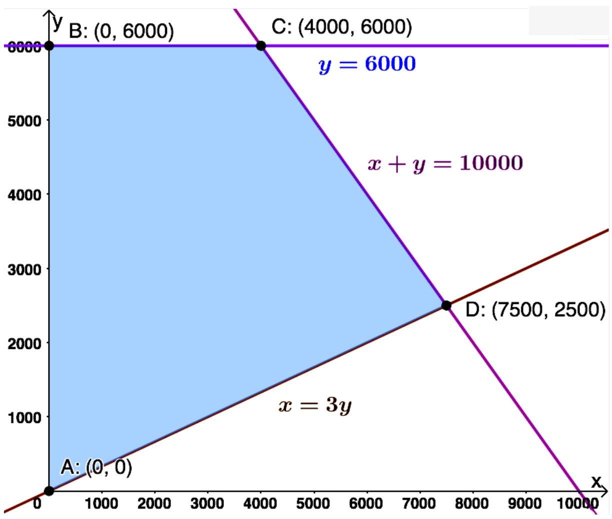
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 0{,}05x + 0{,}02y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	6000	120
C	4000	6000	320
D	7500	2500	425



El *máximo beneficio* es de 425 euros invirtiendo 7500 euros en el producto A y 2500 en el producto B.

Ejercicio 113 (2 *puntos*)

Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite del tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Septiembre - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de aceite } A\ (\ell)\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de aceite } B\ (\ell)\text{”}$$

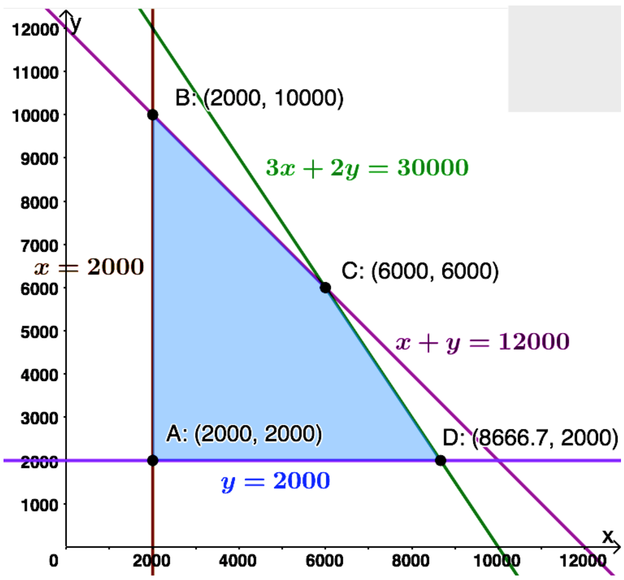
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ①\ x + y \leq 12000 & \rightarrow (0, 12000) \quad \& \quad (12000, 0) \\ ②\ x \geq 2000 & \rightarrow (2000, 0) \\ ③\ y \geq 2000 & \rightarrow (0, 2000) \\ ④\ 3x + 2y \leq 3000 & \rightarrow (0, 1500) \quad \& \quad (1000, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = (0{,}25 \cdot 3)x + (0{,}3 \cdot 2)y = 0{,}75x + 0{,}6y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2000	2000	2700
B	2000	10000	7500
C	6000	6000	8100
D	8667	2000	7700

El *beneficio máximo* es de 8100 euros y se produce comprando 6000 litros de aceite A y 6000 del tipo B.

Ejercicio 114 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$y + 2x \geq 7 \quad \& \quad y - 2x \geq -1 \quad \& \quad y \leq 5$$

a) *Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x - 5y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Septiembre - Opción A- Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; y + 2x \geq 7 & \rightarrow (0, 7) \quad \& \quad (3{,}5, 0) \\ ② \; y - 2x \geq -1 & \rightarrow (0, -1) \quad \& \quad (0{,}5, 0) \\ ③ \; y \leq 5 & \rightarrow (0, 5) \end{cases}$$

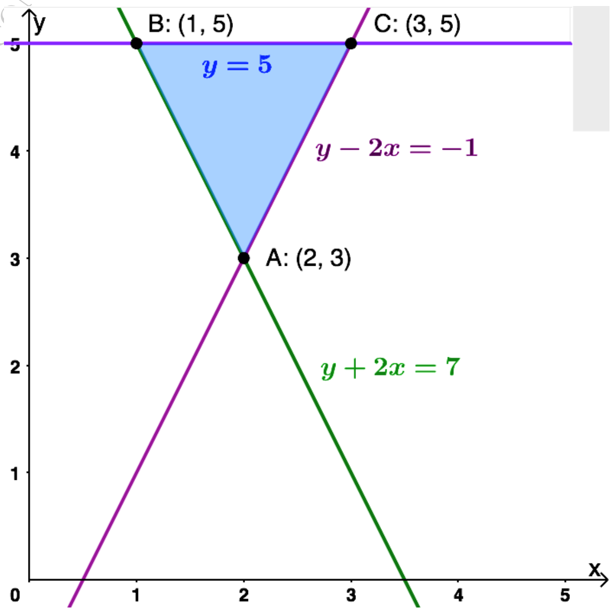
- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = -5x - 5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	3	-25
B	1	5	-30
C	3	5	-40

El *mínimo* de $f(x, y)$ es de -40 y se produce en el punto $C : (3, 5)$.
El *máximo* de $f(x, y)$ es de -25 y se produce en el punto $A : (2, 3)$.



Ejercicio 115 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5 \qquad \& \qquad y - x \leq 3 \qquad \& \qquad \frac{1}{2}x - y \leq -2$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

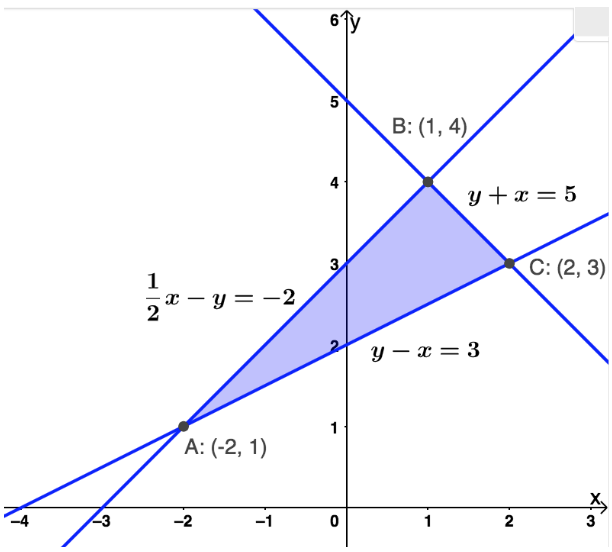
Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ y + x \leq 5 & \to (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \ y - x \leq 3 & \to (0,3) \quad \& \quad (-3,0) \\ ③ \ \frac{1}{2}x - y \leq -2 & \to (0,2) \quad \& \quad (-4,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	-2	1	-3
B	1	4	6
C	2	3	7

El *mínimo* de la función es de -3 y se produce en el punto $A(-2, 1)$.
El *máximo* es de 7 y se produce en el punto $C(2, 3)$.

Ejercicio 116 (2 *puntos*)

> *Sea S la región del plano definida por*
>
> $$x + y \leq 5 \quad \& \quad 2x - y \geq -2 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 1$$
>
> *a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*
>
> *b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = 2x - 3y$ en la región S indicando los punots de S en los que se alcanzan dichos valores.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.
Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones

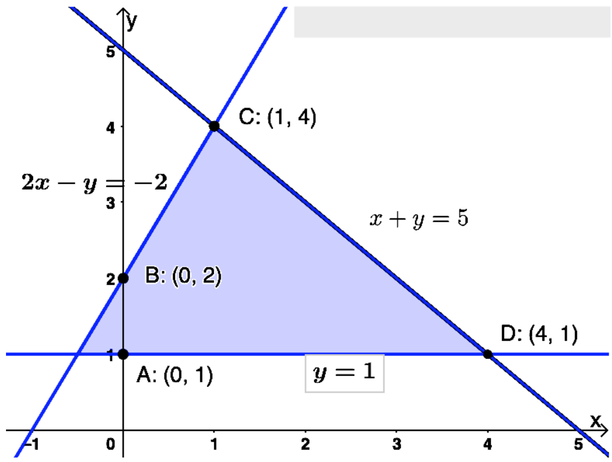
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \ 2x - y \geq -2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-1,0) \\ ③ \ x \geq 0 & \rightarrow (0,0) \\ ④ \ y \geq 1 & \rightarrow (0,1) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 2x - 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	1	-3
B	0	2	-6
C	1	4	-10
D	4	1	5



El *mínimo* de la función $f(x,y)$ es de -10 y se produce en el punto $C : (1,4)$.
El *máximo* de la función $f(x,y)$ es de 5 y se produce en el punto $D : (4,1)$

Ejercicio 117 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$2x - y \geq 1 \quad \& \quad 2x - 3y \leq 6 \quad \& \quad x + 2y \geq 3 \quad \& \quad x + y \leq 8 \quad \& \quad y \leq 3$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 2x+y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

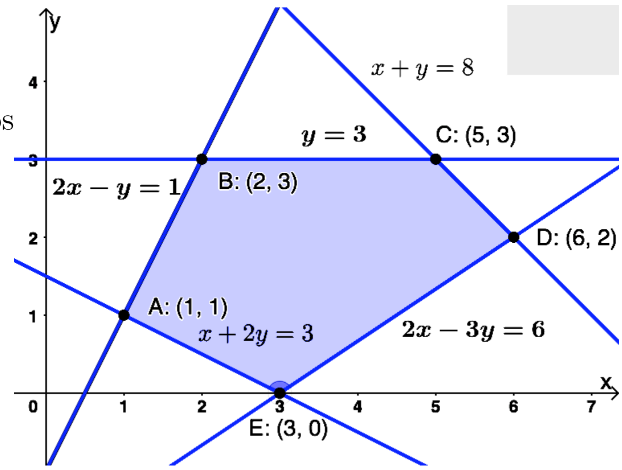
Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; 2x - y \geq 1 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (1/2, 0) \\ ② \; 2x - 3y \leq 6 & \rightarrow (0,-2) \quad \& \quad (3, 400) \\ ③ \; x + 2y \geq 3 & \rightarrow (0, 3/2) \quad \& \quad (3,0) \\ ④ \; x + y \leq 8 & \rightarrow (0,8) \quad \& \quad (8,0) \\ ④ \; y \leq 3 & \rightarrow (0{,}3) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 3x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	1	3
B	2	3	7
C	5	3	13
D	6	2	14
E	3	0	6

El valor *máximo* de la función objetivo se producen en el punto $D(6,2)$ y vale 14, mientras que el *mínimo* se produce en el punto $A(1,1)$ y vale 3.

Ejercicio 118 (2 *puntos*)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+6y \geq 6\,;\; 5x-2y \geq -2\,;\; x+3y \leq 20\,;\; 2x-y \leq 12\right\}$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x,y)$ en dichos puntos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 4x - 3y$$

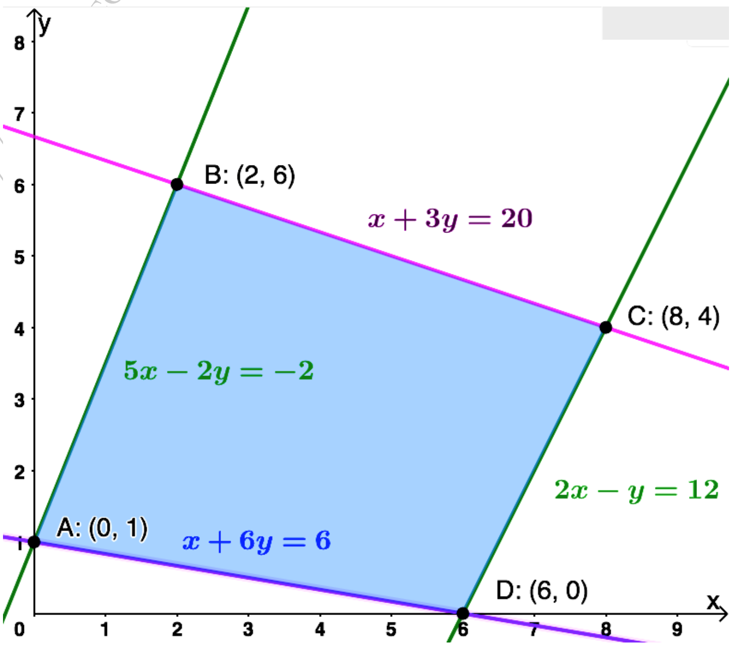
- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; x+6y \geq 6 & \to (0,1) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \; 5x-2y \geq -2 & \to (0,1) \quad \& \quad (-0{,}4,0) \\ ③ \; x+3y \leq 20 & \to (0,{}^{20}\!/\!_3) \quad \& \quad (20,0) \\ ④ \; 2x-y \leq 12 & \to (0,-12) \quad \& \quad (6,0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	f(x,y)
A	6	0	24
B	0	1	-3
C	2	6	-10
D	8	4	20



Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $A(6,0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $C(2,6)$ y vale -10.

Ejercicio 119 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 2;\ \ 2x - y \leq 4;\ \ 2y - x \leq 4;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x + 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

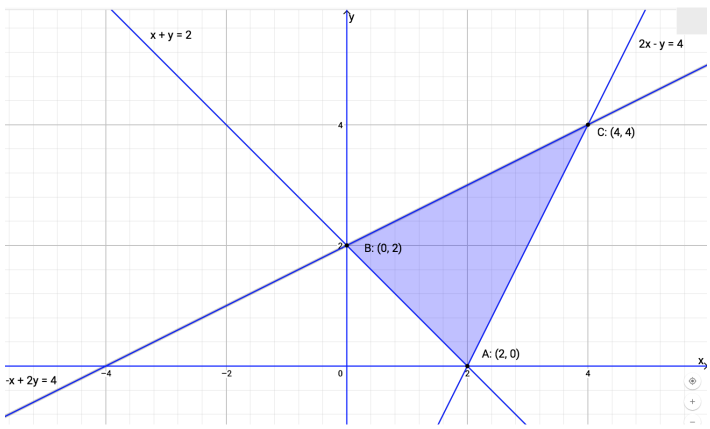
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = -5x + 3y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \ x + y \geq 2 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (2, 0) \\ ② \ 2x - y \leq 4 & \rightarrow (0, -4) \quad \& \quad (2, 0) \\ ③ \ 2y - x \leq 4 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (-4, 0) \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{cases}$$

  - `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



  - `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	0	-10
B	0	2	6
C	4	4	-8

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $B(0, 2)$ y vale 6, mientras que el *mínimo* se produce en $A(2, 0)$ y vale -10.

Ejercicio 120 (2 *puntos*)

Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5;\ 2 \leq y \leq 6;\ x - y \geq -4;\ 3x - y \leq 10$$

.

a) *Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Calcúlese los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región S y obténgase los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

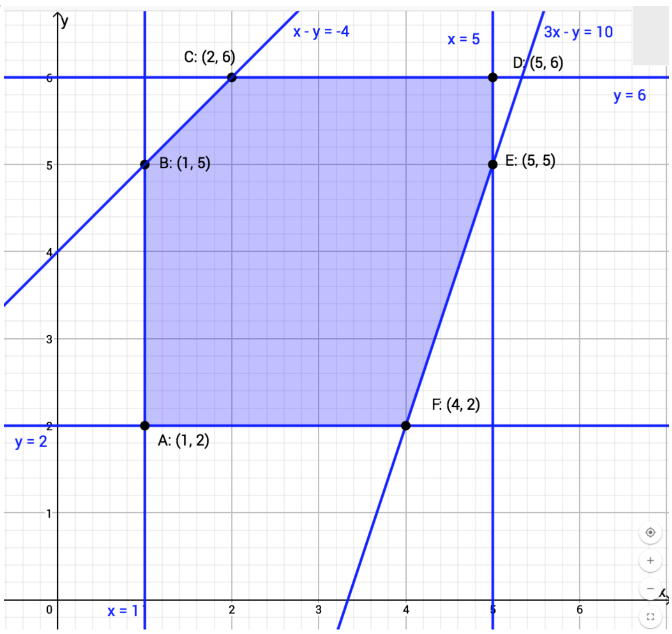
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = -200x + 600y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \ 1 \leq x \leq 5 & \to (1, 0) \quad \& \quad (5, 0) \\ ② \ 2 \leq y \leq 6 & \to (0, 2) \quad \& \quad (0{,}6) \\ ③ \ x - y \geq -4 & \to (0, 4) \quad \& \quad (-4, 0) \\ ④ \ 3x - y \leq 10 & \to (0, -10) \quad \& \quad (10/3, 0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	1	2	1000
B	1	5	2800
C	2	6	3200
D	5	6	2600
E	5	5	2000
F	4	2	400

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $C(2, 6)$ y vale 3200, mientras que el *mínimo* se produce en $F(4, 2)$ y vale 400.

Ejercicio 121 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \leq 16; \;\; x + y \leq 11; \;\; x + 2y \geq 6; \;\; x \geq 0; \;\; y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4, 4)$ a S?

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región S indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

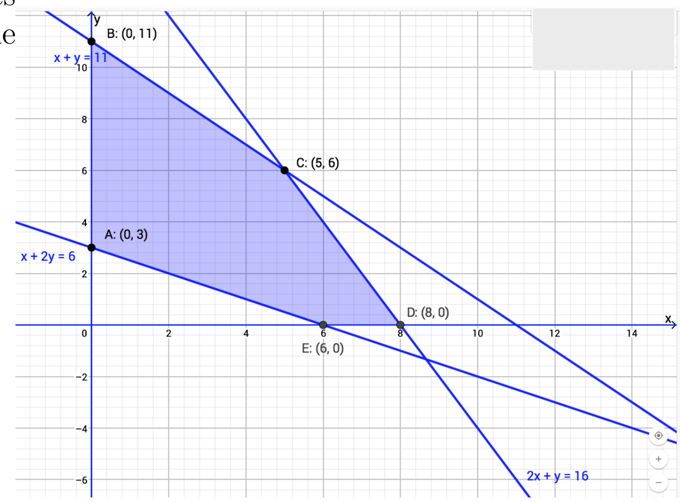
- `Función objetivo:`

$$f(x, y) = 3x + y$$

- `Región S:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; 2x + y \leq 16 & \rightarrow (0, 16) \quad \& \quad (8, 0) \\ ② \; x + y \leq 11 & \rightarrow (0, 11) \quad \& \quad (11, 0) \\ ③ \; x + 2y \geq 6 & \rightarrow (0, 3) \quad \& \quad (6, 0) \\ x, \, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Región factible:` Representamos S y calculamos los vértices de la misma. $(4, 4) \in S$ ya que cumple todas las restricciones.



- `Optimización de la fución objetivo:`

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	3	3
B	0	11	11
C	5	6	21
D	8	0	24
E	6	0	18

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $D(8, 0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $A(0, 3)$ y vale 3.

Ejercicio 122 (2 *puntos*)

Una bodega desea fijar el precio de venta al público de las 250 botellas de vino blanco y de las 500 de vino tinto que tiene en stock. Para no incurrir en pérdidas saben que el precio de venta al público de la botella de vino blanco debe ser como mínimo de 3 euros, de la misma manera el precio de venta al público de la botella de vino tinto debe ser de, como mínimo, 4 euros. Además saben que, para ser competitivos con esos precios de venta al público el coste de 2 botellas de vino blanco y una de tinto debería ser a lo sumo 15 euros. Por el mismo motivo, el coste total de una botella de vino blanco y una de tinto no debe sobrepasar los 10 euros.
Determínense los respectivos precios de venta al público por unidad de las botellas de vino blanco y de las de vino tinto, para que el ingreso total al vender el stock de 250 botellas de vino blanco y 500 de vino tinto sea máximo.

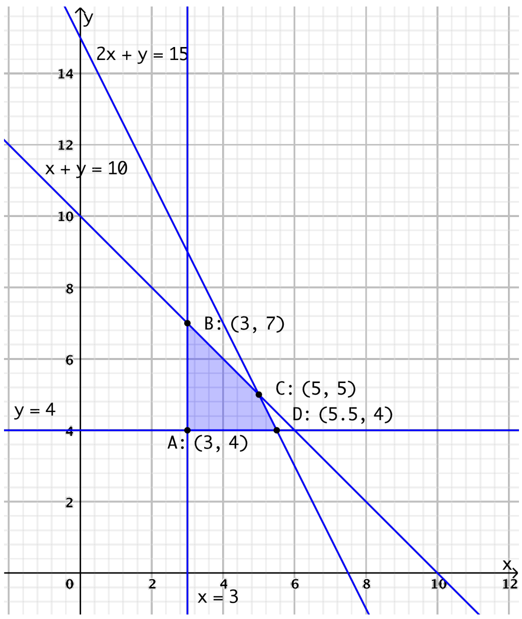
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Precio del vino blanco (€)"
  $y \equiv$ "Precio del vino tinto (€)"
- `Función objetivo` $f(x,y) = 250x + 500y$
- `Restricciones` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \geq 3 & \rightarrow (3,0) \\ ② \ y \geq 4 & \rightarrow (0,4) \\ ③ \ x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ④ \ 2x + y \leq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (7{,}5,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3	4	2750
B	3	7	4250
C	5	5	3750
D	5.5	4	3375

Luego el ingreso máximo de 4250€ se produce con un precio del vino blanco de 3€ y un precio de vino tinto de 7€

Ejercicio 123 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, \qquad 2x + y \leq 80, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

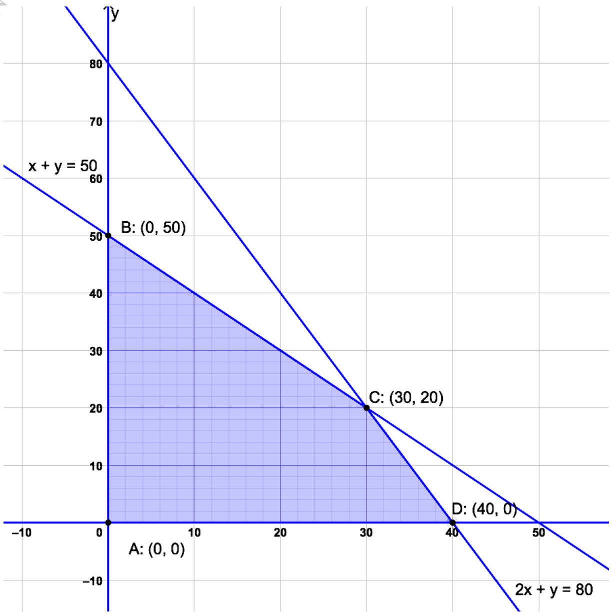
- `Restricciones` Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 50 & \rightarrow (0, 50) \quad \& \quad (50, 0) \\ ② \; 2x + y \leq 80 & \rightarrow (0, 80) \quad \& \quad (40, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	50	200
C	30	20	230
D	40	0	200



Luego el máximo de la función ese 230 que se produce en el punto $C(30, 20)$

Ejercicio 124 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x+y\leq 6\,;\quad 4x+y\leq 12\,;\quad x\geq 0\,;\quad y\geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y)=\dfrac{8x+3y}{5}$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y\leq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \ 4x+y\leq 12 & \rightarrow (0,12) \quad \& \quad (3,0) \\ x,y\geq 0 & \end{cases}$$

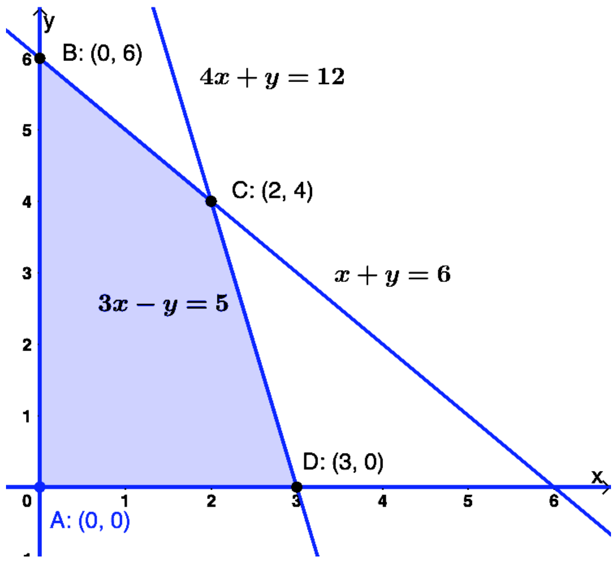
- `Función objetivo`

$$f(x,y)=\frac{8x+3y}{5}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	6	$^{18}/_{5}$
C	2	4	$^{28}/_{5}$
D	3	0	$^{24}/_{5}$



Por tanto el *máximo* es de $^{28}/_{5}$ y se produce en el punto $C(2,4)$, mientras que el *mínimo* es 0 y se alcanza en el punto $A(0,0)$.

Ejercicio 125 (2 *puntos*)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \geq 4;\; x + 2y \leq 12;\; x \leq 4;\; -x + 2y \leq 12\right\}$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

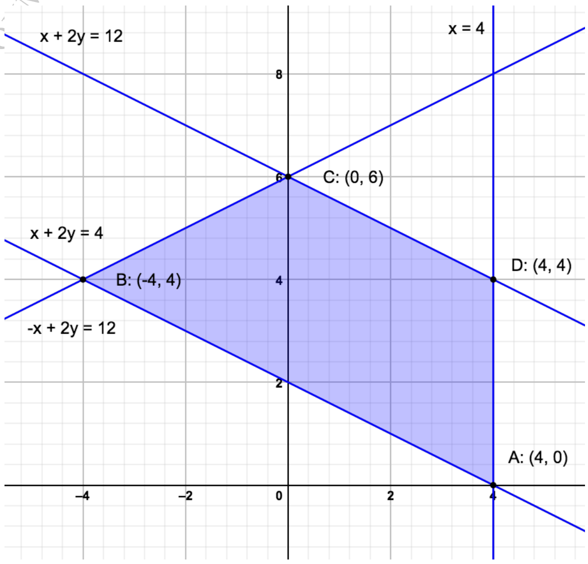
Solución.

- `Función objetivo:` $f(x, y) = 3x - y$
- `Región S:` Escribimos restricciones puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; x + 2y \geq 4 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (4, 0) \\ ② \; x + 2y \leq 12 & \rightarrow (0, 6) \quad \& \quad (12, 0) \\ ③ \; x \leq 4 & \rightarrow (4, 0) \\ ④ \; -x + 2y \leq 12 & \rightarrow (0, 6) \quad \& \quad (-12, 0) \end{cases}$$

- `Región factible:` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma
- `Optimización de la fución objetivo:` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	4	0	12
B	-4	4	-16
C	0	6	-6
D	4	4	8



Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $A(4, 0)$ y vale 12, mientras que el *mínimo* se produce en $B(-4, 4)$ y vale -16.

Ejercicio 126 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$-2x+3y\leq 4;\quad 2x+y\geq 4;\quad 2x-y\leq 4.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y)=0{,}5x+\frac{1}{3}y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

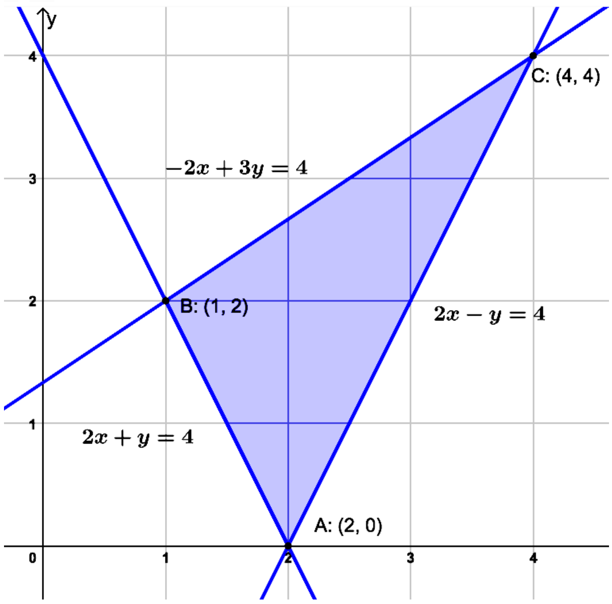
- `Función objetivo`

$$f(x,y)=0{,}5x+\frac{1}{3}y$$

- `Restricciones` Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ -2x+3y\leq 4 & \to (0,4/3) \quad \& \quad (-2,0) \\ ② \ 2x+y\geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (2,0) \\ ③ \ 2x-y\leq 4 & \to (0,-4) \quad \& \quad (2,0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	0	1
B	1	2	$7/6$
C	4	4	$10/3$

Luego la función objetivo tiene un *mínimo* en $A(2,0)$, que vale 1 y un *máximo* en $C(4,4)$ que vale $10/3$.

Ejercicio 127 (2 *puntos*)

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas.
Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene.
Para que haya suficiente para todos los asistentes tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

	Helado	Horchata	Restricción
h trabajo/litro	1	2	≤ 20
	≤ 15		

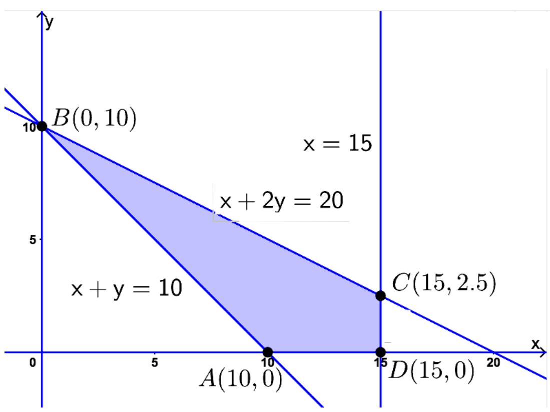
- **Incógnitas:** $x \equiv$ "Litros de helado"
  $y \equiv$ "Litros de horchata"

a) **Región factible** Restricciones y puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; x + 2y \leq 20 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (20,0) \\ ③ \; x \leq 15 & \rightarrow (15,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- **Región factible:**

- **Optimización de la f. objetivo:** Evaluamos la F.O. en los vértices de la Región Factible.



b) Función Objetivo $f(x) = 25x + 12y$

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	0	250
B	0	10	120
C	15	2.5	405
D	15	0	375

Por tanto el *máximo* beneficio se produce en el punto $C(15, 2{,}5)$ y vale 405 euros.

Ejercicio 128 (2 *puntos*)

Para el mantenimiento de las piscinas de cierto hotel se quiere utilizar cloro de disolución lenta CL y cloro estabilizado (CE). El hotel quiere que la cantidad de cloro que se use en la temporada de verano, sea como mucho 500 kg y la cantidad de cloro de disolución lenta sea mayor que la cantidad de cloro estabilizado al menos en 100 kg. No podrán utilizarse más de 350 kg de cloro de disolución lenta ni menos de 100 kg de cloro estabilizado. Cada kg de cloro de disolución lenta cuesta 30 euros, mientas que cada kg de cloro estabilizado cuesta el doble.

a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Se desea que el gasto, respetando las características anteriores, sea el mínimo posible. Determínense las cantidades de cloro de cada tipo que deben usarse para minimizar los costes. Obténgase el valor del coste mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Kg de cloro de disolución lenta (CL)"
  $y \equiv$ "Kg de cloro estabilizado (CE)"

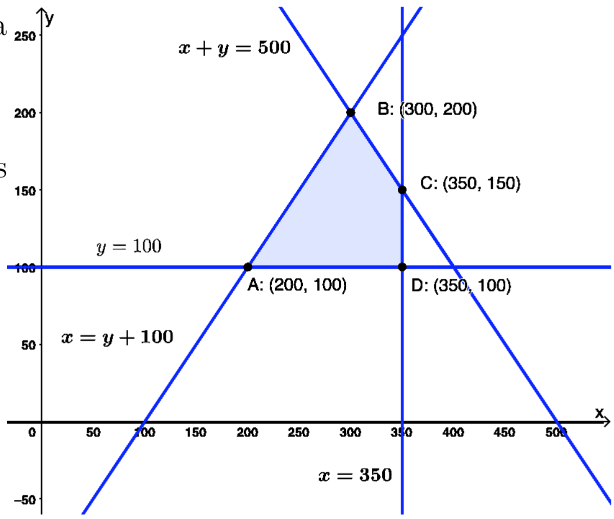
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 500 & \to (0, 500) \quad \& \quad (500, 0) \\ ② \; x \geq y + 100 & \to (0, 100) \quad \& \quad (300, 400) \\ ③ \; x \leq 350 & \to (350, 0) \\ ④ \; y \geq 100 & \to (0, 100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` Coste del cloro.

$$f(x, y) = 30x + 60y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	200	100	12000
B	300	200	21000
C	350	150	19500
D	350	100	16500

Por tanto el *coste mínimo* es de 12000 euros y se produce con un consumo de 200 kg de cloro de disolució lenta (CL) y 100 kg de cloro estabilizado (CE).

Ejercicio 129 (2 *puntos*)

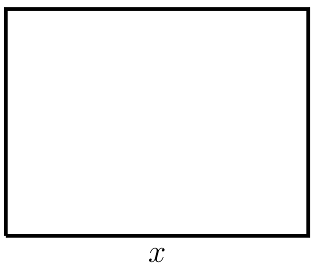
Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características.
El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) *Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensione del estanque.*

b) *Si se desea que el estanque, respetando esas características, tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

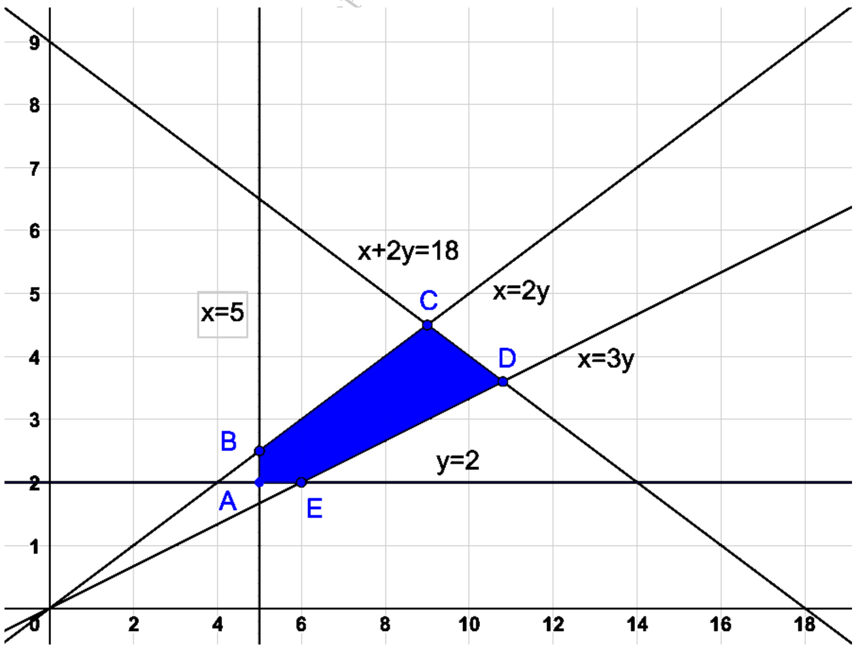
Solución.

a) 

REGIÓN FACTIBLE

$$\begin{cases} ① \ y \geq 2 & \to \quad (0,2) \\ ② \ x \geq 5 & \to \quad (5,0) \\ ③ \ x \geq 2y & \to \quad (0,0) \quad \& \quad (2,1) \\ ④ \ x \leq 3y & \to \quad (0,0) \quad \& \quad (3,1) \\ ⑤ \ x + 2y \leq 18 & \to \quad (18,0) \quad \& \quad (0,9) \\ x, \ y \geq 0 \end{cases}$$

La ec. ⑤ sale de: $1000y + 500x \leq 9000 \implies x + 2y \leq 18$



b) Si queremos la solución con mayor ancho ($y_{\text{máx}}$) hemos de coger el punto de la frontera de la región factible con mayor ordenada. En este caso $C(9, 4{,}5)$, cuyo coste es de 9000 euros pues se encuentra sobre la recta $⑤ \equiv x + 2y = 18$

Ejercicio 130 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$3x - y \geq 5\,; \quad 3y - x \geq 1\,; \quad y + x \leq 7$$

a) Represéntese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de la función $f(x, y) = x + 4y$ en S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Función objetivo:`

$$f(x, y) = x + 4y$$

- `Región S:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ①\ 3x - y \geq 5 & \rightarrow (0, -5) \quad \& \quad (5/3, 0) \\ ②\ 3y - x \geq 1 & \rightarrow (0, 1/3) \quad \& \quad (-1, 0) \\ ③\ y + x \leq 7 & \rightarrow (0, 7) \quad \& \quad (7, 0) \end{cases}$$

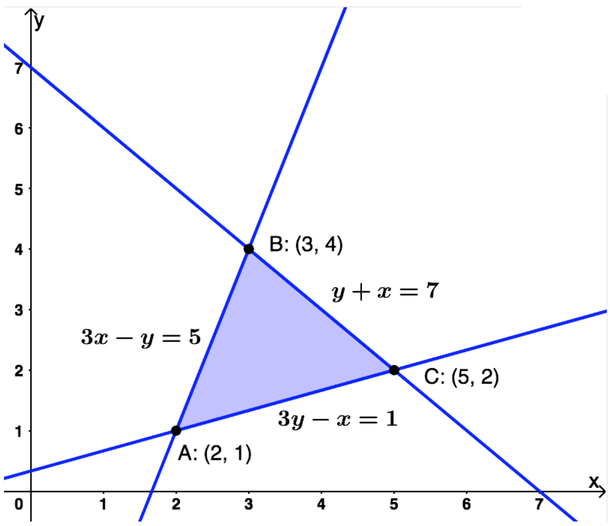
- `Función Objetivo:`

$$f(x, y) = x + 4y$$

- `Región factible:` Representamos S y calculamos los vértices de la misma.

- `Optimización de la fución objetivo:`

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	1	6
B	3	4	19
C	5	2	13



Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $B(3, 4)$ y vale 19.

Ejercicio 131 **(2** ***puntos*****)**

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 15 \quad \& \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \quad \& \quad y - x \leq 10 \quad \& \quad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

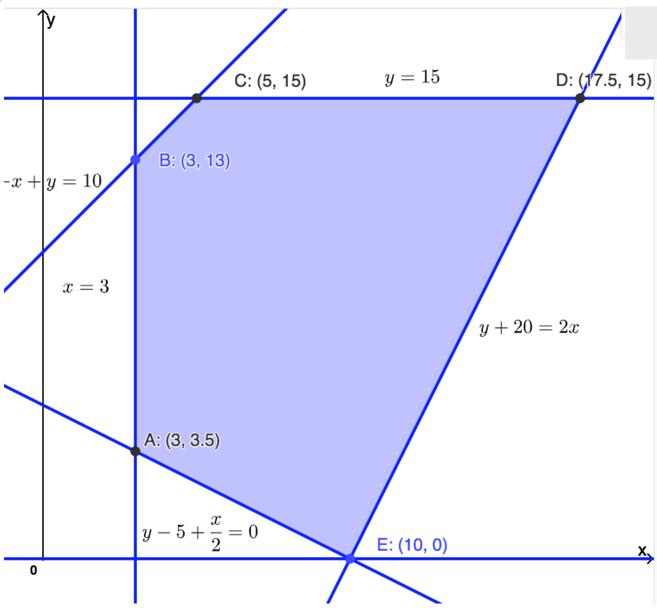
Solución.

- `Región Factible` Escribimos la región S y los puntos necesarios para su representación

$$S \equiv \begin{cases} ① \; x \geq 3 & \rightarrow (3,0) \\ ② \; 0 \leq y \leq 15 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (0,15) \\ ③ \; y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (10,0) \\ ④ \; y - x \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (5,15) \\ ⑤ \; y + 20 \geq 2x & \rightarrow (10,0) \quad \& \quad (15,10) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3	3,5	6,5
B	3	13	16
C	5	15	20
D	17,5	15	32,5
E	10	0	10

Por tanto $f(x)$ tiene un *mínimo* igual a 6,5 en $A(3, 3{,}5)$ y un *máximo* igual a 32,5 en $D(17{,}5, 15)$.

Ejercicio 132 (2 *puntos*)

> *Considere la región del plano S definida por:*
>
> $$x - y \geq 0, \qquad y + 2x \leq 8, \qquad 0 \leq y \leq 2$$
>
> *a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.*
>
> *b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)*

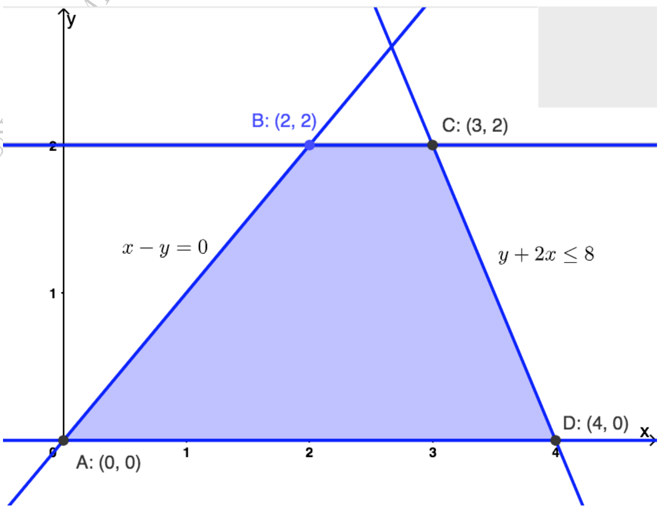
Solución.

- `Región Factible` Escribimos la región S y los puntos necesarios para su representación

$$S \equiv \begin{cases} ① \; x - y \geq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (4,4) \\ ② \; y + 2x \leq 8 & \rightarrow (0,8) \quad \& \quad (4,0) \\ ③ \; 0 \leq y \leq 2 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (0,2) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 4x - y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	2	2	6
C	3	2	10
D	4	0	16

Por tanto $f(x)$ tiene un *mínimo* igual a 0 en $A(0, 0)$ y un *máximo* igual a 16 en $D(4, 0)$.

Ejercicio 133 (2 *puntos*)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

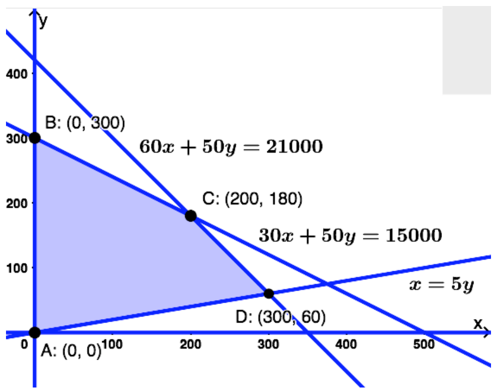
	Sustrato A	Sustrato B	Restricción
Tierra vegetal (kg/m^3)	60	50	< 21000
Horas de trabajo (h/m^3)	30	50	< 15000
Beneficio (£$/m^3$)	50	60	

- `Incógnitas` Llamamos x e y a los m^3 de cada tipo de sustrato.
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para representarlas

$$\begin{cases} ① \ 60x + 50y \leq 21000 & \rightarrow (0, 4420) \quad \& \quad (3683, 0) \\ ② \ 30x + 50y \leq 15000 & \rightarrow (0, 300) \quad \& \quad (500, 0) \\ ③ \ x \leq 5y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (500, 100) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` (Coste en €) $\qquad f(x, y) = 50x + 60y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice.

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	300	18000
C	200	180	20800
D	300	60	18600



El *coste máximo* es de 20800 €, elaborando 200 m^3 del sustrato tipo A y 180 m^3 del B.

Ejercicio 134 (2 *puntos*)

Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factble, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

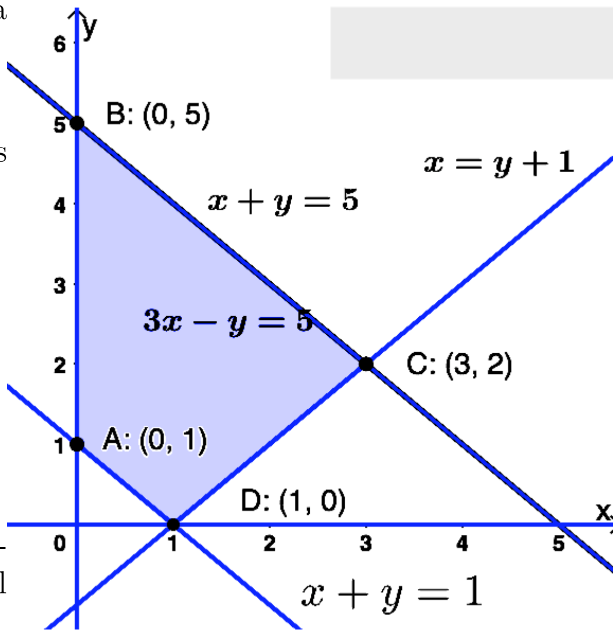
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Hectáreas dedicadas al cultivo de trigo"
  $y \equiv$ "Hectáreas dedicadas al cultivo de cebada"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; x + y \geq 1 & \rightarrow (0,1) \quad \& \quad (1,0) \\ ③ \; x \leq y + 1 & \rightarrow (5,4) \quad \& \quad (1,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 200x + 60y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	1	60
B	0	5	300
C	3	2	720
D	1	0	200

Por tanto el *beneficio máximo* es de 720 euros y se produce destinando 3 hectáreas al cultivo de trigo y 2 al de cebada.

Ejercicio 135 (2 *puntos*)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

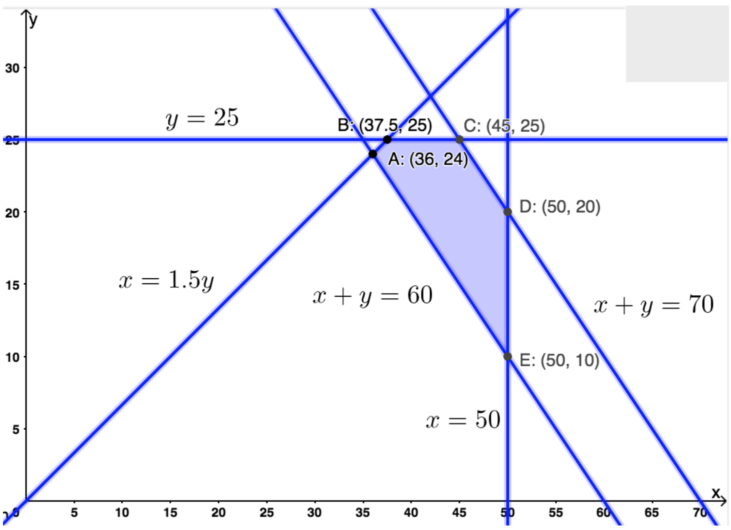
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Kg de almendras en la mezcla"
  $y \equiv$ "Kg de avellanas en la mezcla"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x \geq 1{,}5y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (40,60) \\ ② \; x + y \geq 60 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (60,0) \\ ③ \; x + y \leq 70 & \rightarrow (0,70) \quad \& \quad (70,0) \\ ④ \; x \leq 50 & \rightarrow (50,0) \\ ⑤ \; y \leq 25 & \rightarrow (0,25) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + 2y$

- `Región factible`
  Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.`
  Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	36	24	84
B	37,5	25	87,5
C	45	25	95
D	50	20	90
E	50	10	70

Por tanto el *máximo beneficio* será de 95 euros y se produce con una mezcla de 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.

Ejercicio 136 (2 *puntos*)

a) (1 punto) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x + y \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 \quad \& \quad x + y \leq 3 \quad \& \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.
Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ -2x + y \leq 1 & \rightarrow (0,1) \quad \& \quad (2,5) \\ ② \ 0 \leq y \leq 2 & \rightarrow (0,2) \\ ③ \ x + y \leq 3 & \rightarrow (0,3) \quad \& \quad (3,0) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

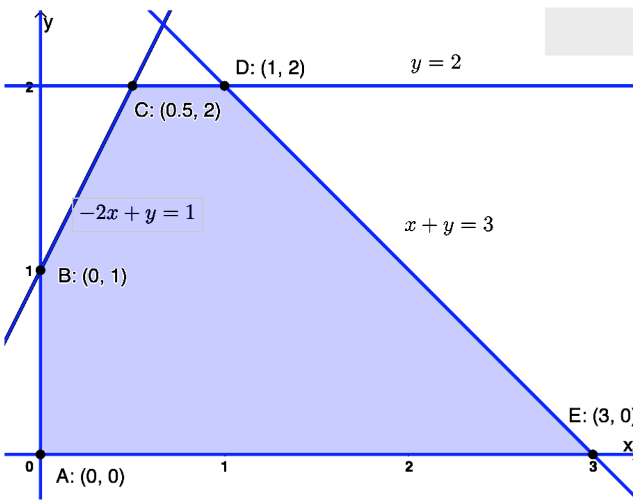
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = x + y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	1	1
C	0,5	2	2,5
D	1	2	3
E	3	0	3



Por tanto el *mínimo* de $f(x, y)$ se produce en $A(0, 0)$ y vale 0, mientras que el *máximo* se produce en los puntos $D(1, 2)$ y $E(3, 0)$ y vale 3.

Ejercicio 137 (2 *puntos*)

> *Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.*
>
> *a) (1 punto) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.*
>
> *b) (1 punto) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)*

Solución.
Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "m de cable A2020"
  $y \equiv$ "m de cable B2020"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

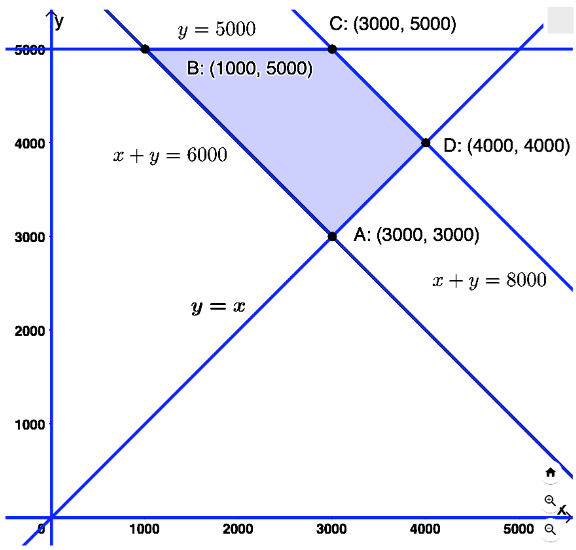
$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 6000 & \to (0, 6000) \quad \& \quad (6000, 0) \\ ② \ y \leq 5000 & \to (0, 5000) \\ ③ \ x + y \leq 8000 & \to (8000, 0) \quad \& \quad (8000, 0) \\ ④ \ y \geq x & \to (0, 0) \quad \& \quad (5000, 5000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 2x + 0{,}5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	3000	3000	7500
B	1000	5000	4500
C	3000	5000	8500
D	4000	4000	10000



Por tanto el *coste mínimo* es de 4500 euros y se produce con una producción de 1000 m de A2020 y 5000 m de B2020.

Ejercicio 138 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x+y \geq 3 \quad \& \quad 2x+y \leq 8 \quad \& \quad x+2y \leq 10 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obtenga el valor máximo de la función $f(x,y) = 2x+3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

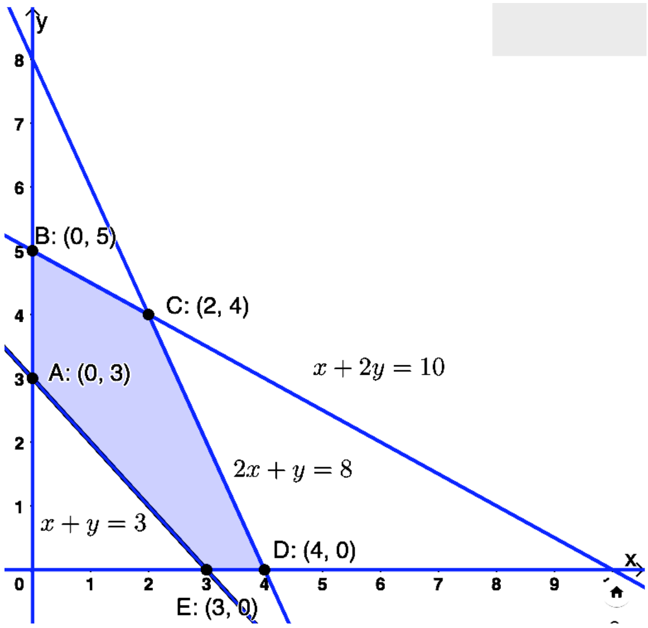
$$\begin{cases} ① \ x+y \geq 3 & \to (0,3) \quad \& \quad (3,0) \\ ② \ 2x+y \leq 8 & \to (0,8) \quad \& \quad (4,0) \\ ③ \ x+2y \leq 10 & \to (0,5) \quad \& \quad (10,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 2x+3y$

- `Región factible` Representamos S y hallamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	3	9
B	0	5	15
C	2	4	16
D	4	0	8
E	3	0	6



Por tanto la *función factible* $f(x,y)$ tiene un valor máximo igual a 16 que se produce en el punto $C(2,4)$.

Ejercicio 139 (2 *puntos*)

El dueño de una empresa que organia fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1 euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcular el beneficio que se obtiene.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de leche en la mezcla (litros)"
  $y \equiv$ "Cantidad de chocolate líquido en la mezcla (litros)"

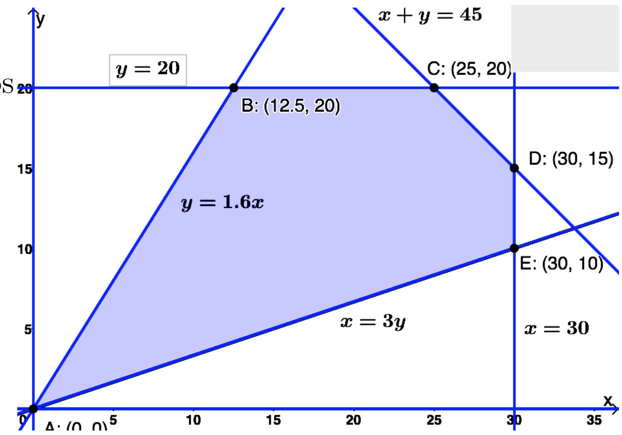
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x \leq 3y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,10) \\ ② \; y \leq 1{,}6x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,16) \\ ③ \; x+y \leq 45 & \rightarrow (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ ④ \; x \leq 30 & \rightarrow (30,0) \\ ⑤ \; y \leq 20 & \rightarrow (0,20) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	12,5	20	52,5
C	25	20	65
D	30	15	60
E	30	10	50

El *beneficio máximo* es de 65 euros y se produce mezclando 25 litros de leche y 20 de chocolate líquido.

Ejercicio 140 (2 *puntos*)

Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 *kg de peso y con capacidad para* 10 *kg de peso. Solo tiene* 180 *sacos de capacidad* 10 *kg. Debe poner a la venta como mucho* 2000 *kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada* 3 *sacos de* 10 *kg puede vender como mucho* 2 *sacos de* 5 *kg, y como mínimo tiene que poner a la venta* 20 *sacos de* 5 *kg y* 60 *de* 10 *kg. Por cada saco de* 10 *kg obtiene un beneficio de* 5€ *y por cada saco de* 5 *kg obtiene un beneficio de* 2€. *Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de sacos de 5 kg"
  $y \equiv$ "N1 de sacos de 10 kg"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

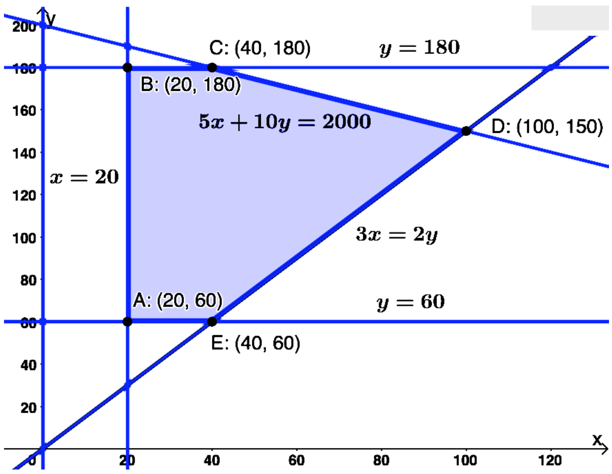
$$\begin{cases} ①\ 60 \leq y \leq 180 & \rightarrow (0, 60) \quad \& \quad (0, 180) \\ ②\ 5x + 10y \leq 2000 & \rightarrow (0, 200) \quad \& \quad (400, 0) \\ ③\ 3x \leq 2y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (20, 30) \\ ④\ x \geq 20 & \rightarrow (20, 0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + 5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	20	60	340
B	20	180	940
C	40	180	980
D	100	150	950
E	40	60	380



El *máximo beneficio* es de 980€ que se obtiene vendiendo 40 sacos de 5 kg y 180 de 10 kg.

Ejercicio 141 (2 *puntos*)

> *Sea S la región del plano definida por*
>
> $$7y - 8x \leq 3400 \;\;\&\;\; 3x - 8y \leq 2000 \;\;\&\;\; 11x + 14y \geq 9500 \;\;\&\;\; x \leq 1200 \;\;\&\;\; y \leq 1000$$
>
> *a) (1 punto) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.*
>
> *b) (1 punto) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)*

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

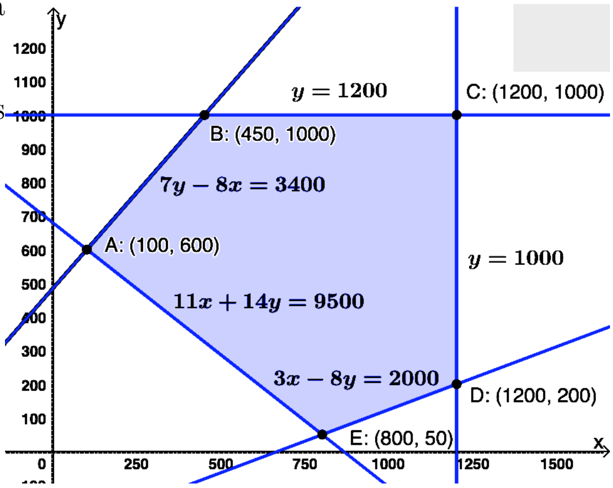
$$\begin{cases} ① \; 7y - 8x \leq 3400 & \rightarrow (100, 600) \;\;\&\;\; (-425, 0) \\ ② \; 3x - 8y \leq 2000 & \rightarrow (0, -250) \;\;\&\;\; (800, 50) \\ ③ \; 11x + 14y \geq 9500 & \rightarrow (0, 678{,}5) \;\;\&\;\; (863{,}6, 0) \\ ④ \; x \leq 1200 \;\;\&\;\; y \leq 1000 & \rightarrow (0, 1000) \\ ⑤ \; y \leq 1000 & \rightarrow (1200, 0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	100	600	800
B	450	1000	1900
C	1200	1000	3400
D	1200	200	2600
E	800	50	1650



El *mínimo* de $f(x, y)$ es de 800 y se produce en el punto $E : (100, 600)$.

Ejercicio 142 (2 *puntos*)

La plataforma digital Plusfix *va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre* 600 *y* 900 *minutos, debe tener al menos* 200 *minutos de cine y como mucho* 500 *minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene* 15€ *de beneficio por cada minuto de emisión de cine y* 10€ *de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo dedicado al cine (minutos)"
  $y \equiv$ "Tiempo dedicado al deporte (minutos)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

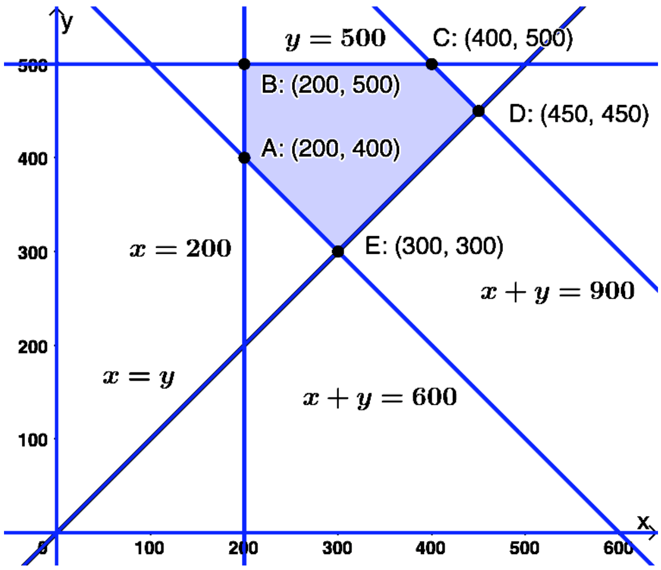
$$\begin{cases} ① \ x \leq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (500,500) \\ ② \ x+y \geq 600 & \rightarrow (0,600) \quad \& \quad (600,0) \\ ③ \ x+y \leq 900 & \rightarrow (0,900) \quad \& \quad (900,0) \\ ④ \ x \geq 200 & \rightarrow (200,0) \\ ⑤ \ y \leq 500 & \rightarrow (0,500) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 15x + 10y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	200	400	7000
B	200	500	8000
C	400	500	11000
D	450	450	11250
E	300	300	7500



La propuesta que supone un *beneficio máximo* es la de 450 minutos de cine y 450 minutos de deporte y reportará 11250€.

Ejercicio 143 (2 *puntos*)

Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.
Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Distancia recorrida por la furgoneta grande (miles de km)”}$$
$$y \equiv \text{“Distancia recorrida por la furgoneta mediana (miles de km)”}$$

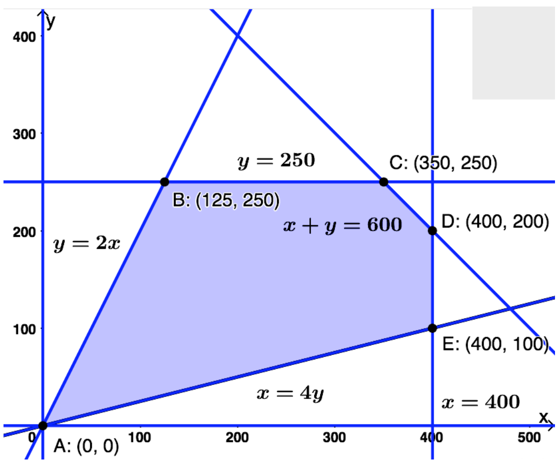
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x \leq 400 & \rightarrow (400, 0) \\ ② \; y \leq 250 & \rightarrow (0, 250) \\ ③ \; x + y \leq 600 & \rightarrow (0, 600) \quad \& \quad (600, 0) \\ ④ \; y \leq 2x & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (300, 6000) \\ ⑤ \; x \leq 4y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (150, 600) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}05y \quad$ (en miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	125	250	25
C	350	250	47,5
D	400	200	50
E	400	100	45

El *máximo beneficio* es de 50000 €, cuando la furgoneta grande recorre 400000 km y la mediana 100000 km.

Ejercicio 144 (2 *puntos*)

Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 *litros de azul y* 0,7 *litros de amarilla, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita* 0,5 *litros de azul y* 0,5 *litros de amarillo. Actualmente se dispone de* 20 *litros de azul y* 28 *litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de* 1 *euro, y por litro de pintura VERDE2 es de* 1,2 *euros. No se pueden producir más de* 30 *litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

	VERDE1	VERDE2	Restricciones
Azul (ℓ)	0,3	0,5	20
Amarillo (ℓ)	0,7	0,5	28
	≤ 30		

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "ℓ de pintura VERDE1"
  $y \equiv$ "ℓ de pintura VERDE2"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; 0{,}3x + 0{,}5y \leq 20 \\ ② \; 0{,}7x + 0{,}5y \leq 28 \\ ③ \; x \leq 30 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; 3x + 5y \leq 200 & \rightarrow (0, 40) \quad \& \quad (66{,}7, 0) \\ ② \; 7x + 5y \leq 280 & \rightarrow (0, 56) \quad \& \quad (40, 0) \\ ③ \; x \leq 30 & \rightarrow (30, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

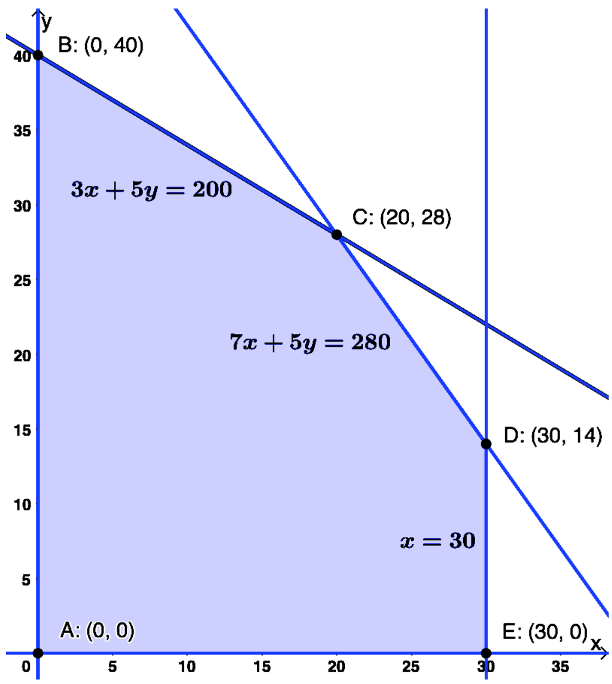
- `Función objetivo` $f(x, y) = x + 1{,}2y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	40	48
C	20	28	53,6
D	30	14	46,8
E	30	0	30

El *beneficio máximo* es de 53,6 €, vendiendo 20 ℓ de VERDE1 y 28 ℓ de VERDE2.



Ejercicio 145 (2 *puntos*)

> *En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de aceite de girasol (litros)"
  $y \equiv$ "Cantidad de aceite de oliva (litros)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ y \geq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (10,20) \\ ② \ x \geq 10 & \to (10,0) \\ ③ \ y \geq 24 & \to (0,24) \\ ④ \ x+y \leq 75 & \to (0,75) \quad \& \quad (75,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

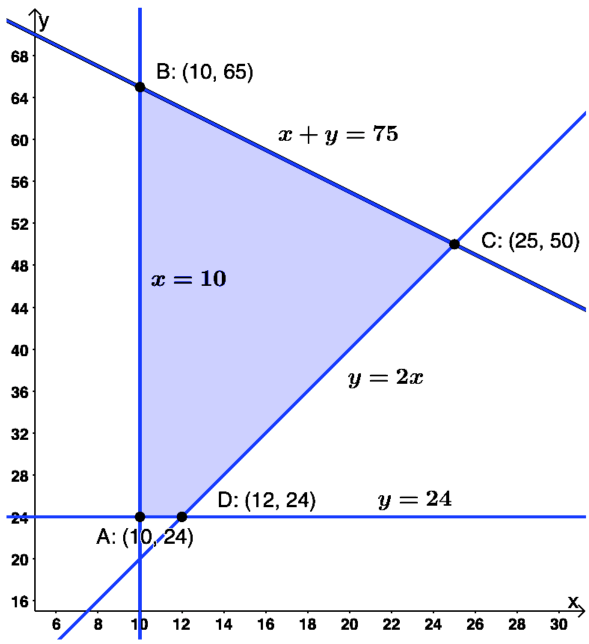
$$f(x,y) = x + 3y \text{ (euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	24	82
B	10	65	205
C	25	50	175
D	12	24	84

El *beneficio máximo* es de 205 €, produciendo 10 litros de aceite de girasol y 65 de oliva.



Ejercicio 146 (2 *puntos*)

Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 *y* 60 *minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos* 20 *minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo de entrenamiento de fuerza (min) "
  $y \equiv$ "Tiempo de entrenamiento de cardio (min)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

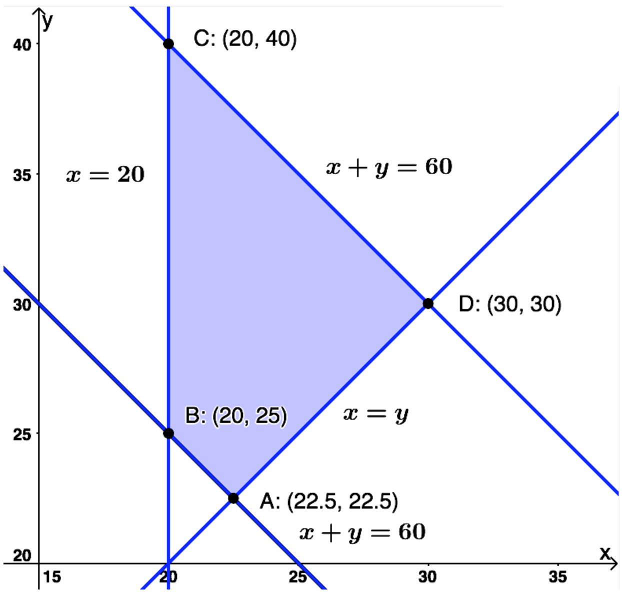
$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 45 & \rightarrow (0, 45) \quad \& \quad (45, 0) \\ ② \; x + y \leq 60 & \rightarrow (0, 60) \quad \& \quad (60, 0) \\ ③ \; x \leq y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (60, 60) \\ ④ \; x \geq 20 & \rightarrow (20, 0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	22,5	22,5	67,5
B	20	25	70
C	20	40	100
D	30	30	90



La rutina *más beneficiosa* se obtiene con 20 minutos de fuerza y 40 de cardio , con una puntuación de 100, mientras que la *menos beneficiosa* se obtiene con 22,5 minutos de fuerza y otros tantos de cardio y da una puntuación de 67,5.

Ejercicio 147 (2 *puntos*)

Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Largo de la piscina (m)"
  $y \equiv$ "Ancho de la piscina (m)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

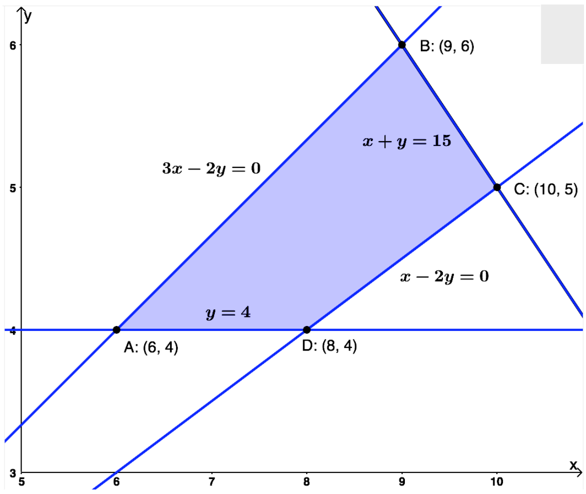
$$\begin{cases} ① \; x \leq 2y \\ ② \; 3y \leq 2x \\ ③ \; 2x + 2y \leq 30 \\ ④ \; y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x - 2y \leq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (6,3) \\ ② \; 3y - 2x \leq 0 & \rightarrow (0,) \quad \& \quad (3,2) \\ ③ \; x + y \leq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ④ \; y \geq 4 & \rightarrow (0,5) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

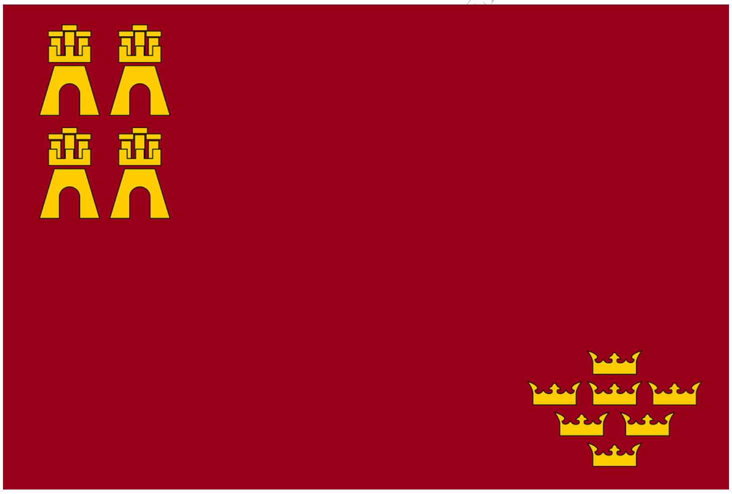
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	4	6
B	9	6	9
C	10	5	10
D	8	4	8



La *piscina más larga* que cumple las restricciones pedidas medirá 10 m de largo por 5 de ancho.

Murcia



Ejercicio 148 (2,5 *puntos*)

La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnicas y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 € y cada casual de 4 €, calcule, justificando la respuesta:

a) (2 puntos) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio.

b) (0.5 puntos) El valor de dicho beneficio máximo.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Camiseta técnica	Camiseta casual	Restricción
algodón orgánico (g)	70	60	≤ 4200
lino (g)	20	10	≤ 800

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de camisetas técnicas"
  $y \equiv$ "Nº de camisetas casual"

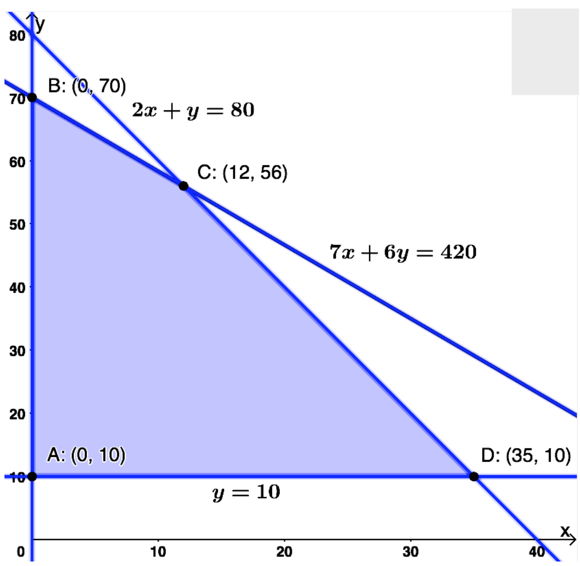
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 70x + 60y \leq 4200 \\ ② \ 20x + 10y \leq 800 \\ ③ \ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 7x + 6y \leq 420 & \to (0,70) \quad \& \quad (60,0) \\ ② \ 2x + y \leq 80 & \to (0,80) \quad \& \quad (40,0) \\ ③ \ y \geq 10 & \to (0,10) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 5x + 4y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	10	40
B	0	70	280
C	12	56	284
D	35	10	215

El *máximo beneficio* es de 284 €, vendiendo 12 camisetas técnicas y 56 casual.

Ejercicio 149 (2,5 *puntos*)

Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Respresente la región S y calcule sus vértices.

b) (0.5 puntos) Determine el punto de la región factible donde la función $f(x, y) = -x + 2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

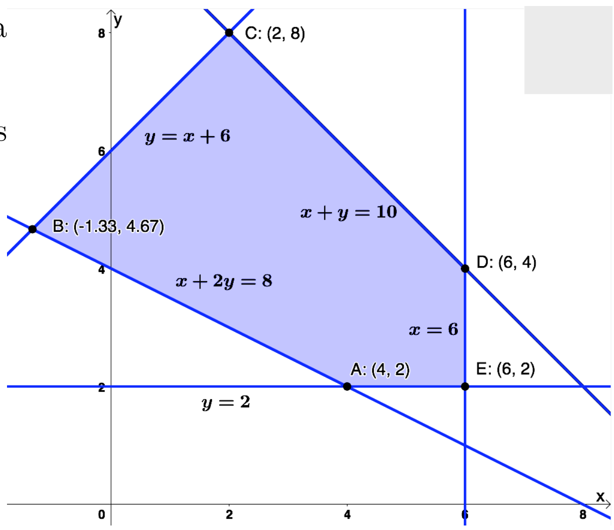
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 10 & \rightarrow (0, 10) \quad \& \quad (10, 0) \\ ② \; x + 2y \geq 8 & \rightarrow (0, 4) \quad \& \quad (8, 0) \\ ③ \; y \leq x + 6 & \rightarrow (0, 6) \quad \& \quad (-6, 0) \\ ④ \; y \geq 2 & \rightarrow (0, 2) \\ ⑤ \; x \leq 6 & \rightarrow (6, 0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = -x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	4	2	0
B	$-1/3$	$14/3$	$29/3$
C	2	8	14
D	6	4	2
E	6	2	-2



El *mínimo* de $f(x, y)$ es de -2 y se produce en el punto $E : (6, 2)$.

Ejercicio 150 (2,5 *puntos*)

Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.

a) (1.5 puntos) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices.

b) (1 punto) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo?

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

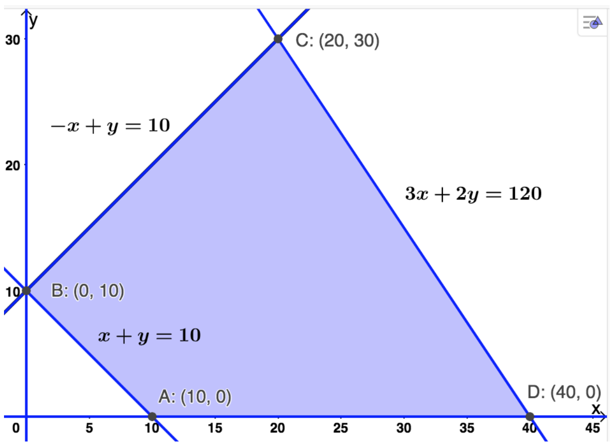
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de smartwathces tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de smartwathces tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y \geq 10 \\ ② \ y \leq x+10 \\ ③ \ 150x+100y \leq 6000 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \ -x+y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (-10,0) \\ ③ \ 3x+2y \leq 120 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (40,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 130x + 140y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	0	1300
B	0	10	1400
C	20	30	6800
D	40	0	5200

El *máximo beneficio* es de 6800 € y se obtiene produciendo y vendiendo 20 smartwatches del tipo A y 30 del tipo B.

Ejercicio 151 (2,5 *puntos*)

> *Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:*
>
> $$\begin{cases} 3x+2y \geq 2 \\ x-y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$$
>
> *a) (2 puntos) Represente la región S y calcule sus vértices.*
>
> *b) (0.5 puntos) Determine los puntos de la región factible donde la función $f(x,y) = 4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores.*
>
> *(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

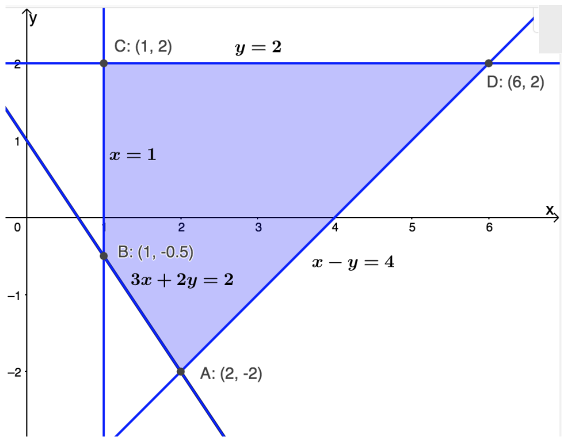
Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$S \equiv \begin{cases} ① \; 3x+2y \geq 2 & \rightarrow (0,1) \quad \& \quad (2,-2) \\ ② \; x-y \leq 4 & \rightarrow (0,-4) \quad \& \quad (4,0) \\ ③ \; x \geq 1 & \rightarrow (1,0) \\ ④ \; y \leq 2 & \rightarrow (0,2) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 4x-5y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	-2	18
B	1	$-0{,}5$	6,5
C	1	2	-6
D	6	2	14



El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -6 y se produce en el punto $C:(1,2)$, mientras que el *máximo* es de 18 y se produce en punto $A:(2,-2)$.

Navarra

Ejercicio 152 (3,33 *puntos*)

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 *euros y* 1800 *euros, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere* 3 *horas de proceso en la linea de producción y* 2 *unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere* 1 *hora de proceso en la linea de producción y* 4 *unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de* 195 *unidades de materia prima y de* 90 *horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos* 40 *toneladas de biocombustible.*

I) (4 puntos) Plantee el problema.

II) (4 puntos) Resuélvalo gráficamente.

III) (2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 *unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce* 10 *unidades de contaminación.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Julio 2020)

Solución.

	Biocombustible T1	Biocombustible T1	Restricciones
Tiempo de proceso (h/ton)	3	1	≤ 90
Materia prima (ud/ton)	2	4	≤ 195
Precio venta (€/ton)	2000	1800	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de biocuombustible T1 (toneladas/semana)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de biocuombustible T2 (toneladas/semana)”}$$

- `Restricciones`: Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

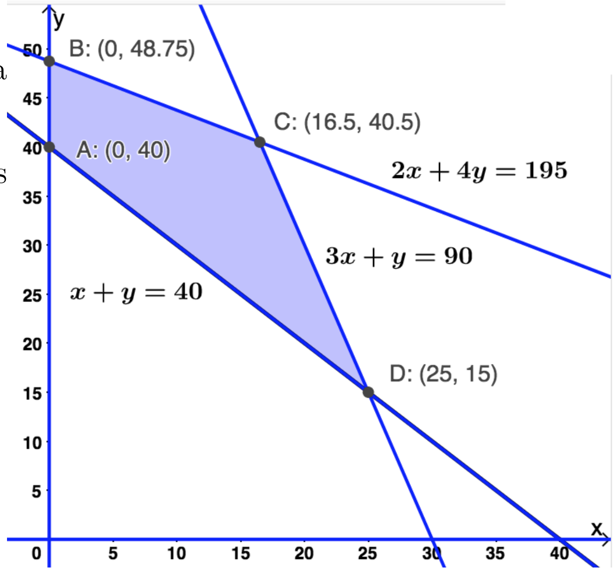
$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 40 & \to (0, 40) \quad \& \quad (40, 0) \\ ② \ 3x + y \leq 90 & \to (0, 22{,}5) \quad \& \quad (45, 0) \\ ③ \ 2x + 4y \leq 195 & \to (0, 195) \quad \& \quad (65, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2000x + 1800y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	40	72000
B	0	48,75	87750
C	16,5	40,5	105900
D	25	15	77000



El *beneficio máximo* es de 105900 €, y se obtiene produciendo 16,5 toneladas de biocombustible T1 y 40,5 de biocombustible T2.

III) Las restricciones se mantienen (y por tanto la región factible), mientras que la función objetivo pasa a ser el nivel de contaminación que se desea minimizar:

$$f(x,y) = 5x + 10y$$

Evaluamos la nueva función objetivo en los vértices de la región factible:

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	40	400
B	0	48,75	487,5
C	16,5	40,5	487,5
D	25	15	275

El *nivel de contaminación mínimo* es de 275 unidades y se consigue produciendo 25 toneladas de biocombustible T1 y 15 de biocombustible T2.

Ejercicio 153 (3,33 *puntos*)

Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m^2 y 100 euros/m^2, respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m^2 de telas. Para elaborar un m^2 de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m^2 de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m^2 de cada tipo de tela es 15 y 10 euros, respectivamente?

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m^2 de tela T1 que de tela T2.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020)

Solución.

	Tela T1	Tela T2	Disponibilidad
Tiempo de máquina (h/m^2)	2	4	≤ 80
Carretes de hilo (ud/m^2)	6	3	≤ 150
Precio venta (€/m^2)	60	100	
Precio coste (€/m^2)	15	10	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{"Cantidad de tela tipo T1 } (m^2)\text{"}$$
$$y \equiv \text{"Cantidad de tela tipo T2 } (m^2)\text{"}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

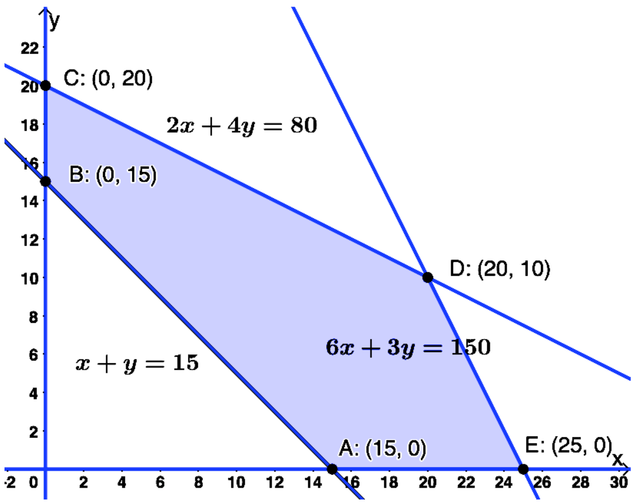
$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ② \; 2x + 4y \leq 80 & \rightarrow (0,20) \quad \& \quad (40,0) \\ ③ \; 6x + 3y \leq 150 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (25,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$B(x,y) = V(x) - C(x) = 60x + 100y - (15x + 10y) = 45x + 90y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$B(x, y)$
A	15	0	675
B	0	15	1350
C	0	20	1800
D	20	10	1800
E	25	0	1125

El *beneficio máximo* es de 1800€ y se obtiene en cualquier punto del segmento que une los puntos C:(0,20) y $D : (20, 10)$. Se pueden obtener las infinitas soluciones dando valores a x comprendidos entre $[0, 20]$ y despejando la y en la ecuación $2x + 4y = 80$.

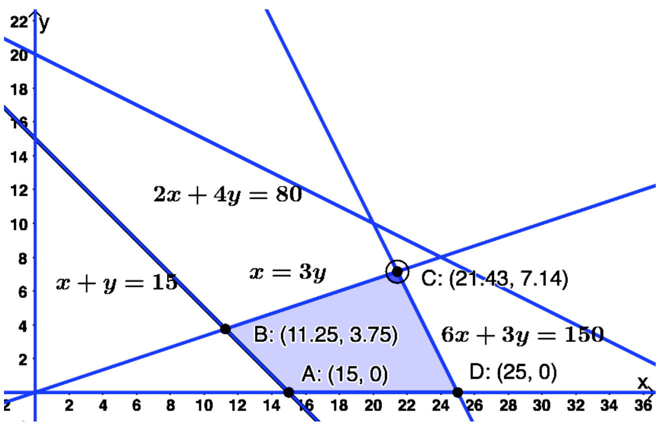
III) Si queremos elaborar al menos el triple de tela T1 que de tela T2 hemos de añadir la restricción: $x \geq 3y$. Rehacemos la región factible y recalculamos el beneficio en los vértices de la misma:

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 15 & \rightarrow (0, 15) \quad \& \quad (15, 0) \\ ② \ 2x + 4y \leq 80 & \rightarrow (0, 20) \quad \& \quad (40, 0) \\ ③ \ 6x + 3y \leq 150 & \rightarrow (0, 50) \quad \& \quad (25, 0) \\ ④ \ x \geq 3y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (60, 20) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$B(x, y)$
A	15	0	675
B	11,25	3,75	843, 85
C	21,43	7,14	1606,95
D	25	0	1125

El *beneficio máximo* es aproximadamente 1607€ y se obtiene vendiendo 21,43 m^2 de tela T1 y 7,14 m^2 de tela T2.

Ejercicio 154 (3,33 *puntos*)

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborables a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

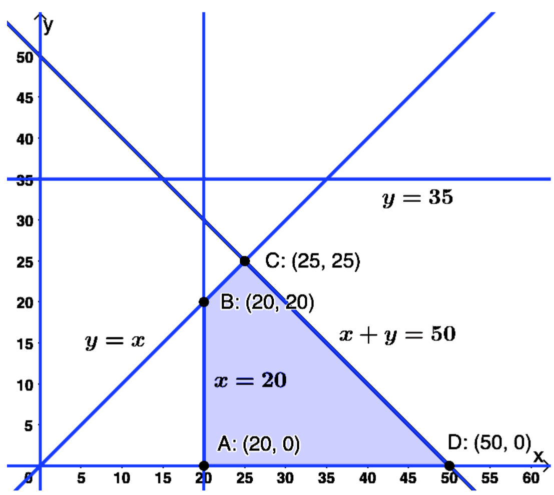
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Duración del curso F1 (horas)"
  $y \equiv$ "Duración del curso F2 (horas)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 50 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (50,0) \\ ② \; x \geq 20 & \rightarrow (20,0) \\ ③ \; y \leq 35 & \rightarrow (0,35) \\ ④ \; x \geq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,30) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0{,}01x + 0{,}02y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	0	0,2
B	20	20	0,6
C	25	25	0,75
D	50	0	0,5

El aumento de productividad tendrá un *máximo* de 75 % dedicando 25 horas a cada curso.

III) Modificamos la restricción ③ y recalculamos la región factible

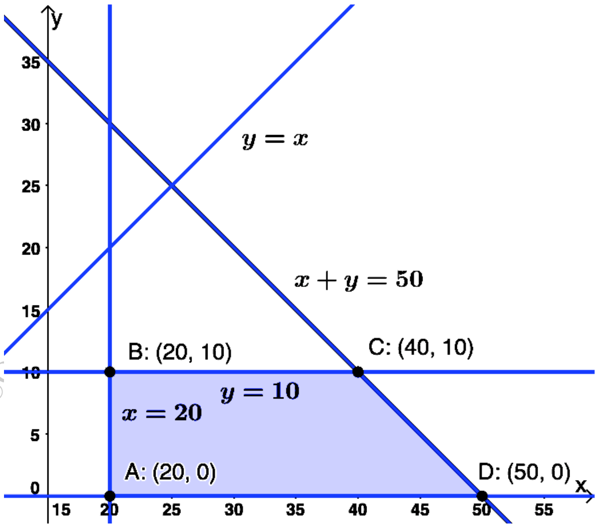
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x+y \leq 50 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (50,0) \\ ② \; x \geq 20 & \rightarrow (20,0) \\ ③ \; y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \\ ④ \; x \geq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,30) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 0{,}01x + 0{,}02y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	0	0,2
B	20	10	0,4
C	40	10	0,60
D	50	0	0,5

El aumento de productividad tendrá un *máximo* de 60 % dedicando 40 horas al curso F1 y 10 al curso F2.

Ejercicio 155 (3,33 *puntos*)

Se están considerando dos alimentos (A y B) que contienen tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0,1 kg de grasas, 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0,2 kg de grasas, 0,3 kg de hidratos de carbono y 0,5 kg de proteínas. El precio de un kg de alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea además no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si se desea maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1,5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Julio 2021)

Solución.

	Alimento A	Alimento B	Restricción
kg de grasas	0,1	0,2	≤ 10
kg de hidratos de carbono	0,6	0,3	≥ 18
kg de proteínas	0,3	0,5	≥ 15
Coste alimento (€/kg)	10	30	
	≤ 75		

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de alimento } A \text{ (kg)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de alimento } B \text{ (kg)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 0{,}1x + 0{,}2y \leq 10 \\ ② \ 0{,}6x + 0{,}3y \geq 18 \\ ③ \ 0{,}3x + 0{,}5y \leq 15 \\ ④ \ x \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + 2y \leq 100 & \to (0,50) & \& & (100,0) \\ ② \ 2x + y \geq 60 & \to (0,60) & \& & (30,0) \\ ③ \ 3x + 5y \geq 150 & \to (0,30) & \& & (50,0) \\ ④ \ x \leq 75 & \to (75,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

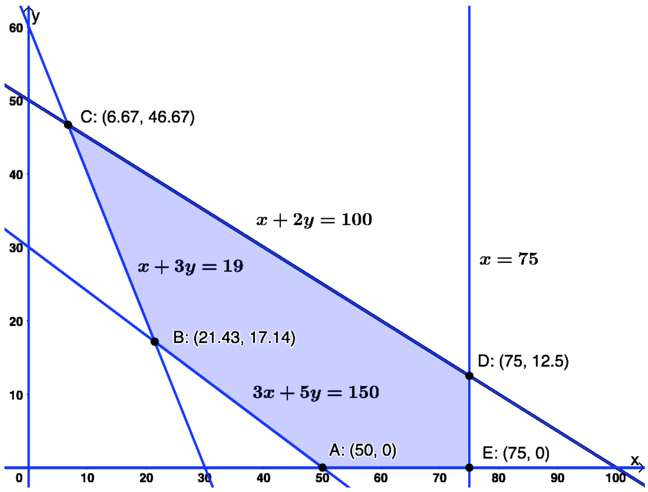
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 10x + 30y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	50	0	500
B	21,43	17,14	728,57
C	6,67	46,67	1466,67
D	75	12,5	1125
E	75	0	750



El *mínimo coste* es de 500 € y se obtiene comprando 50 kg del alimento A.

III) En el caso de querer maximizar una vitamina, las restricciones no varían y por tanto la región factible, mientras que la función objetivo pasa a ser:

$$f(x, y) = 1{,}5x + 2y$$

Volvemos a calcular el valor de la misma en los vértices de la región factible:

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	50	0	75
B	21,43	17,14	66,43
C	6,67	46,67	103,33
D	75	12,5	137,5
E	75	0	112,5

Y por tanto la *cantidad máxima* de dicha vitamina es de 137,5 unidades y se obtendría con 75 kg del alimento A y 12,5 kg del alimento B.

Ejercicio 156 (3,33 *puntos*)

Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz, y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera C1.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Importe invertido en la cartera C1 (miles de €)"
  $y \equiv$ "Importe invertido en la cartera C2 (miles de €)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

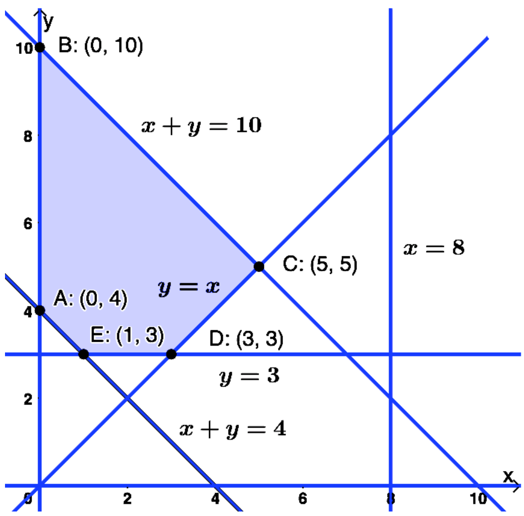
$$\begin{cases} \textcircled{1}\ x+y \geq 0{,}2\cdot 20 \\ \textcircled{2}\ x+y \leq 0{,}5\cdot 20 \\ \textcircled{3}\ x \leq 8 \\ \textcircled{4}\ y \geq 3 \\ \textcircled{5}\ y \geq x \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \textcircled{1}\ x+y \geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (4,0) \\ \textcircled{2}\ x+y \leq 10 & \to (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ \textcircled{3}\ x \leq 8 & \to (8,0) \\ \textcircled{4}\ y \geq 3 & \to (0,3) \\ \textcircled{5}\ y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (3,3) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y$ (en miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	4	0,16
B	0	10	0,4
C	5	5	0,55
D	3	3	0,33
E	1	3	0,19



La máxima rentabilidad es de 550€ y se consigue invirtiendo 5000€ en cada cartera.

- **Restricciones:** Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

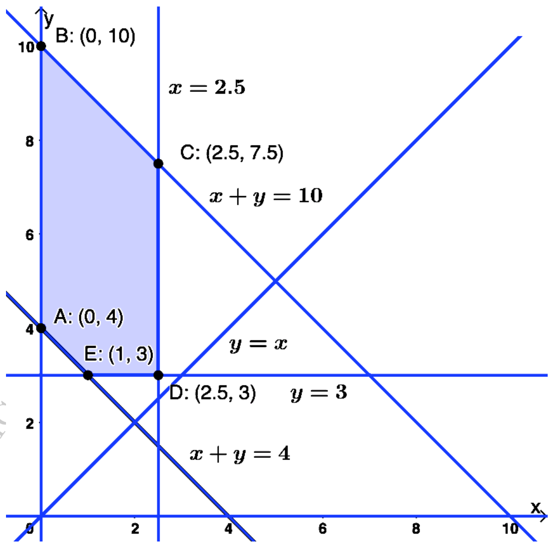
$$\begin{cases} ① \; x+y \geq 4 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (4,0) \\ ② \; x+y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ③ \; x \leq 2{,}5 & \rightarrow (2{,}5,0) \\ ④ \; y \geq 3 & \rightarrow (0,3) \\ ⑤ \; y \geq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (3,3) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

- **Función objetivo** $\quad f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y$ (en miles de €)

- **Región factible** Representamos la región y calculamos los vértices.

- **Optimización de F.O.** Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	4	0,16
B	0	10	0,4
C	2,5	7,5	0,475
D	2,5	3	0,295
E	1	3	0,19



La máxima rentabilidad es de 475€ y se consigue invirtiendo 2500€ en la cartera C1 y 7500€ en la cartera C2.

Ejercicio 157 (3,33 *puntos*)

Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	*P*1	*P*2	*Disponibilidad semanal*
*R*1	*6*	*3*	*180*
*R*2	*4*	*5*	*200*
*R*3	*1*	*1.5*	*70*

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si la fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Producción semanal de P1 (kg)"
  $y \equiv$ "Producción semanal de P2 (kg)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

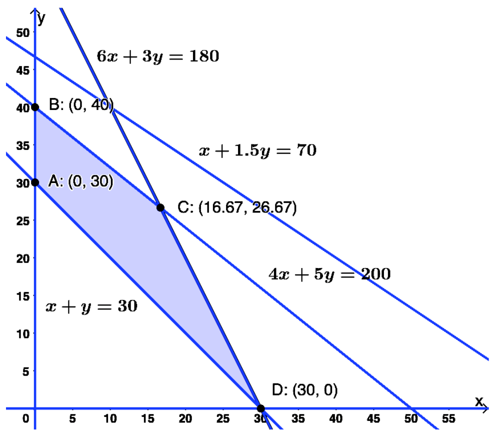
$$\begin{cases} ① \ 6x + 3y \leq 180 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (30,0) \\ ② \ 4x + 5y \leq 200 & \rightarrow (0,40) \quad \& \quad (50,0) \\ ③ \ x + 1{,}5y \leq 70 & \rightarrow (40,20) \quad \& \quad (70,0) \\ ④ \ x + y \geq 30 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (30,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 20x + 15y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	30	450
B	0	40	600
C	16,67	36,67	733,33
D	30	0	600



El *coste mínimo* es de 450€, produciendo únicamente 30 kg semanales del producto P2.

i) Recalculamos el coste en cada uno de los vértices de la región factible, ya que las restricciones no han variado

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	30	600
B	0	40	800
C	16,67	36,67	1066,66
D	30	0	600

El *coste mínimo* es de 600€ y se produce en cualquier punto del segmento que une los puntos $A:(0,30)$ y $D:(30,0)$

Ejercicio 158 (3,33 *puntos*)

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.
Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75 % de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.
Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.*

IV) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20000 euros/tonelada.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad destinada al mercado nacional (ton)"
  $y \equiv$ "Cantidad destinadal al mercado internacional (ton)"

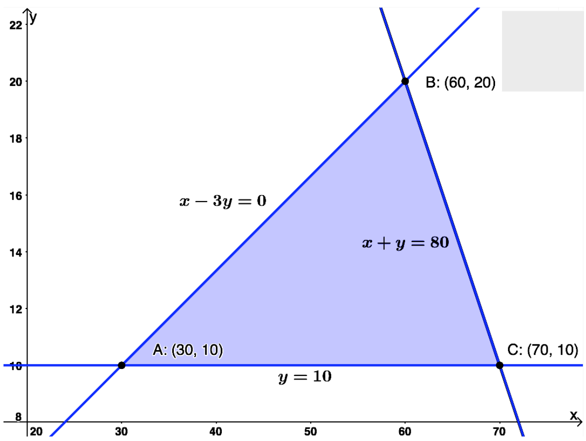
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y \leq 80 \\ ② \ x \geq 0{,}75 \cdot (x+y) \\ ③ \ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ① \ x+y \leq 80 & \rightarrow (0,80) \quad \& \quad (80,0) \\ ② \ x-3y \geq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,30) \\ ③ \ y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 10x + 20y$ (miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	30	10	500
B	60	20	1000
C	70	10	900

III) El *máximo beneficio* es de 1000000 €, destinando 60 toneladas al mercado nacional y 20 al internacional.

IV) Si el beneficio en el mercado nacional se incrementa a 20000 euros y, si se mantiene el beneficio del mercado internacional, la función objetivo sería:

$$f(x, y) = 20x + 20y \text{ (miles de €)}$$

Evaluamos los la función objetivo en los vértices de la región factible que permanece inalterada.

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	30	10	800
B	60	20	1600
C	70	10	1600

El *máximo beneficio* es de 1600000 € y se produce en cualquier punto del segmento que une los puntos $B : (60, 20)$ y $C : (70, 10)$.

Ejercicio 159 (3,33 *puntos*)

Una empresa utiliza dos máquinas distintas ($M1$ y $M2$) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máquina $M1$ fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lamina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina $M2$ fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas $M1$ y $M2$ tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

	Máquina $M1$	Máquina $M2$	Restricción
Lámina rayada (m/h)	10	40	≥ 240
Lámina lisa (m/h)	50	20	≥ 300
Lámina doble rayado (m/h)	10	10	≥ 120

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de horas de máquina $M1$"
  $y \equiv$ "Nº de horas de máquina $M2$"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación.

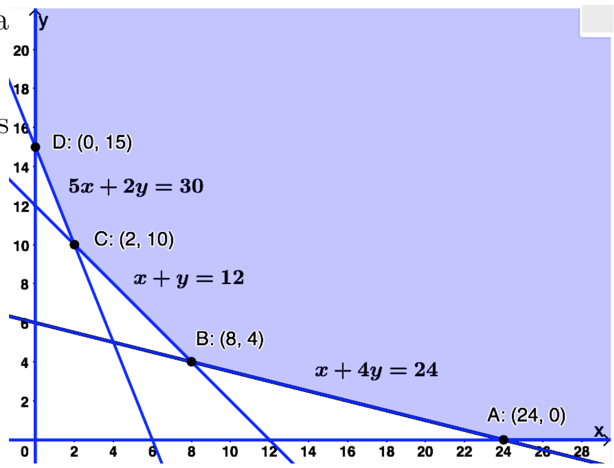
$$\begin{cases} ① \ 10x + 40y \geq 240 \\ ② \ 50x + 20y \geq 300 \\ ③ \ 10x + 10y \geq 120 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + 4y \geq 24 & \rightarrow (0,6) \ \& \ (24,0) \\ ② \ 5x + 2y \geq 30 & \rightarrow (0,15) \ \& \ (6,0) \\ ③ \ x + y \geq 12 & \rightarrow (0,12) \ \& \ (12,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 800x + 100y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	24	0	19200
B	8	4	6800
C	2	10	2600
D	0	15	1500



II) El *coste mínimo* es de 1500 euros dedicando tan solo 15 horas de la máquina $M2$.

III) Si se modifica la demanda de la lámina rayada se modifica la restricción ② de la región factible.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación.

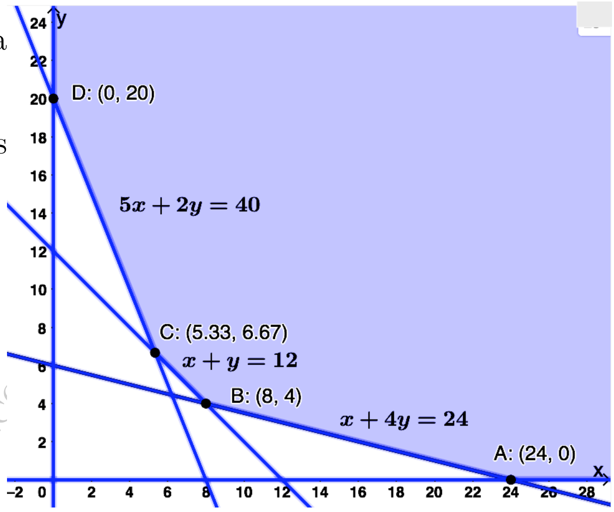
$$\begin{cases} ① \ 10x+40y \geq 240 \\ ② \ 50x+20y \geq 400 \\ ③ \ 10x+10y \geq 120 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+4y \geq 24 & \to (0,6) \quad \& \quad (24,0) \\ ② \ 5x+2y \geq 40 & \to (0,20) \quad \& \quad (8,0) \\ ③ \ x+y \geq 12 & \to (0,12) \quad \& \quad (12,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 800x + 100y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

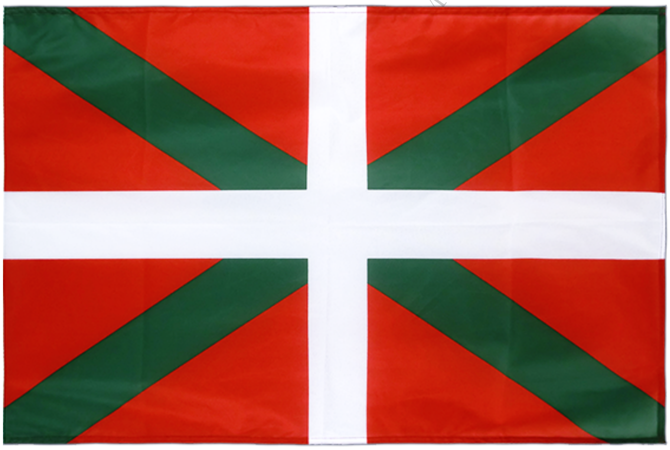
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	24	0	19200
B	8	4	6800
C	5,33	6,67	4933,33
D	0	20	2000



El *coste mínimo* es de 2000 euros dedicando tan solo 20 horas de la máquina $M2$.

País Vasco



Ejercicio 160 (2,5 *puntos*)

El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 *viviendas, de dos tipos* A *y* B*.*
Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 *millones de euros. El coste de construcción de la vivienda de tipo* A *es* 100000 €*, y el de la del tipo* B 300000 €*. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo* A *asciende a* 20000 € *y por una de tipo* B *a* 40000 €*.*

	Coste de construcción	*Beneficio*
A	100000 €	20000 €
B	300000 €	40000 €

a) *(2.2 puntos) ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?*

b) *(0.3 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?*

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de viviendas de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de viviendas de tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

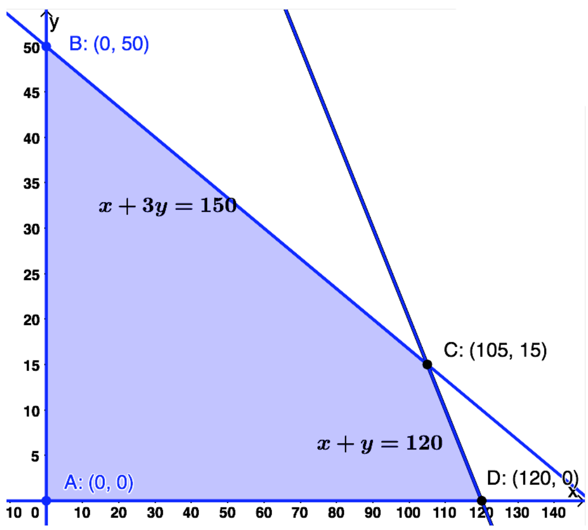
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 120 \\ ② \ 0{,}1x + 0{,}3y \leq 15 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 120 & \rightarrow (0,120) \quad \& \quad (120,0) \\ ② \ x + 3y \leq 150 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (150,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 20x + 40y$ (miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	50	2000
C	105	15	2700
D	120	0	2400



El *beneficio máximo* asciende a 2700000 € y se obtiene construyendo 105 casas tipo A y 15 tipo B.

Ejercicio 161 (2,5 *puntos*)

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$y - x \leq 4 \quad \& \quad y + 2x \geq 7 \quad \& \quad -2x - y + 13 \geq 0 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Representa el recinto mencionado.

b) (1.5 puntos) Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque Álgebra)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

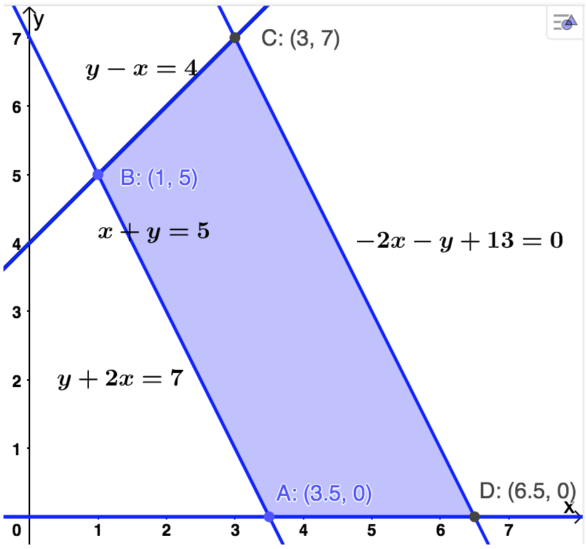
$$\begin{cases} ①\ y - x \leq 4 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (8,4) \\ ②\ y + 2x \geq 7 & \rightarrow (0,7) \quad \& \quad (2,3) \\ ③\ -2x - y + 13 \geq 0 & \rightarrow (0,13) \quad \& \quad (5,3) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 4x + 2y - 1$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3,5	0	13
B	1	5	13
C	3	7	25
D	6,5	0	25



El *mínimo* de $f(x, y)$ es de 13 y se produce en cualquier punto del segmento que une $A : (3{,}5, 0)$ y $B : (1, 5)$, mientras que el *máximo* de $f(x, y)$ es de 25 y se produce en cualquier punto del segmento que une $C : (3, 7)$ y $D : (6{,}5, 0)$.

Ejercicio 162 (2,5 *puntos*)

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar los ingresos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- *El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.*
- *Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.*
- *El material utilizado en cada mesa cuesta 4 € y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.*

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

a) *(2.1 puntos) Plantea y resuelve el problema de maximización.*

b) *(0.4 puntos) Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviee a la empresa.*

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque Algebra)

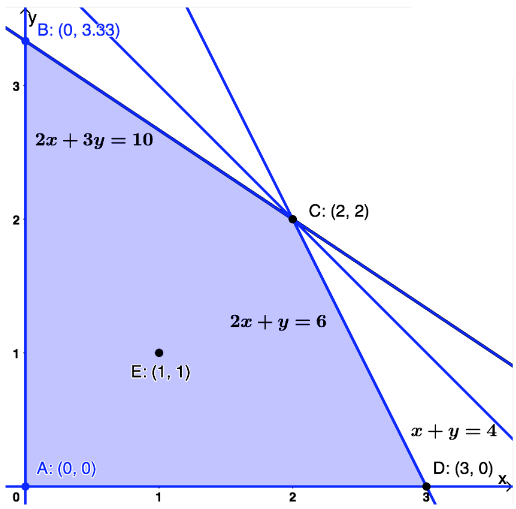
Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y\le 4 \\ ② \ 2x+3y\le 10 \\ ③ \ 4x+2y\le 12 \\ x,y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+y\le 4 & \rightarrow (0,4) & \& & (4,0) \\ ② \ 2x+3y\le 10 & \rightarrow (2,2) & \& & (5,0) \\ ③ \ 2x+y\le 6 & \rightarrow (0,6) & \& & (3,0) \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y)=20x+30y$

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	$10/3$	100
C	2	2	100
D	3	0	60



Los *ingresos máximos* son de 100 € y se producen en cualquier punto de coordenadas enteras del segmento $\overline{BC}$. El único posible sería $C:(2,2)$, luego habría que vender 2 mesas y 2 sillas.
Es factible vender 1 mesa y 1 silla, pero el beneficio $f(1,1)=50$ € sería menor.

Ejercicio 163 (2,5 *puntos*)

> *Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y.*
> *Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.*
> *¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?*
>
> *(La Rioja - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque Algebra)*

Solución.

	Técnica A	Técnica B	Restricción
Cobre (gr/h)	8	4	≥ 80
Zinc (gr/h)	3	6	≥ 60
Níquel (gr/h)	1	12	≥ 60

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo de uso de la técnica A (h)"
  $y \equiv$ "Tiempo de uso de la técnica B (h)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

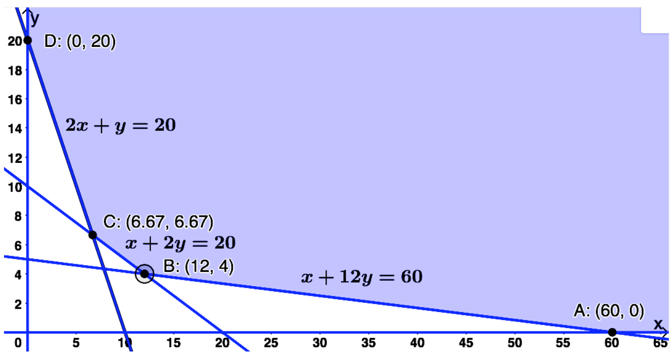
$$\begin{cases} ①\ 8x+4y \geq 80 \\ ②\ 3x+6y \geq 60 \\ ③\ x+12y \geq 60 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ①\ 2x+y \geq 20 & \to (0,20) \quad \& \quad (10,0) \\ ②\ x+2y \geq 20 & \to (0,10) \quad \& \quad (20,0) \\ ③\ x+12y \geq 60 & \to (0,5) \quad \& \quad (60,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x+y$ (horas)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

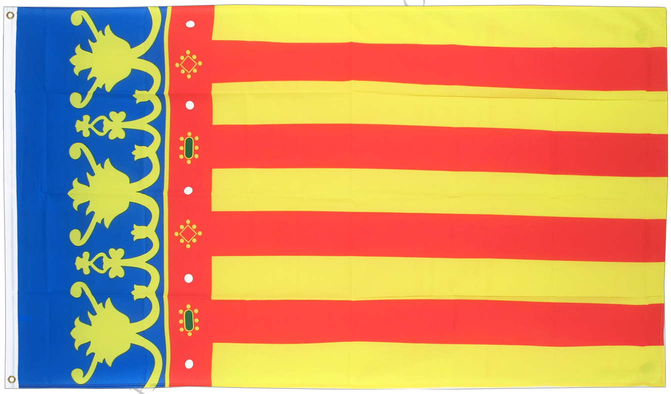
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	60	0	60
B	12	4	16
C	6,67	6,67	13,33
D	0	20	20



El *mínimo tiempo* es de 13,33 horas, utilizando 6,67 horas cada una de las dos técnicas disponibles.

Comunidad Valenciana



Ejercicio 164 (3,33 *puntos*)

Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7 % y la del producto B del 6,3 %.

a) (8 puntos) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) (2 puntos) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2021)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Inversión en el producto tipo } A \text{ (€)”}$$
$$y \equiv \text{“Inversión en el producto tipo } B \text{ (€)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 9000 & \to (0, 9000) \quad \& \quad (9000, 0) \\ ② \ x \geq 5000 & \to (5000, 0) \\ ③ \ x \geq 2y & \to (0, 0) \quad \& \quad (2000, 1000) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

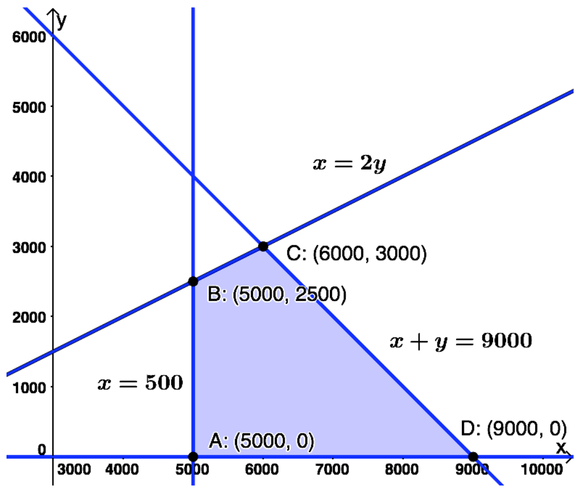
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 0{,}027x + 0{,}063y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	5000	0	135
B	5000	2500	292,5
C	6000	3000	351
D	9000	0	243



a) La *máxima rentabilidad* se obtiene invirtiendo 6000€ en el producto A y 3000€ en el producto B.

b) La *máxima rentabilidad* obtenida es de 351€, con la inversión del apartado anterior.

Ejercicio 165 (3,33 *puntos*)

En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegeal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) (8 puntos) ¿Cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste?

b) (2 puntos) ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

Pienso animal mínimo $= 100 \cdot 7 \cdot 5 = 3500\ kg$
Pienso vegetal mínimo $= 100 \cdot 7 \cdot 3 = 2100\ kg$

	Sacos marca A	Sacos marca B	Restricción
Pienso animal (kg)	7	6	≥ 3500
Pienso vegetal (kg)	3	4	≥ 2100

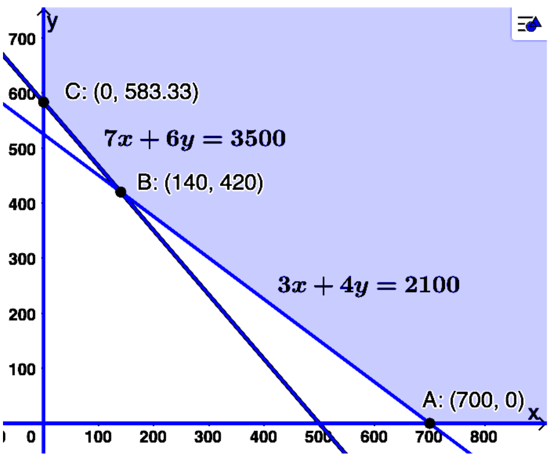
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de sacos de la marca A"
  $y \equiv$ "Nº de sacos de la marca B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 7x + 6y \geq 3500 & \rightarrow (0, 583{,}3) \quad \& \quad (500, 0) \\ ② \ 3x + 4y \geq 2100 & \rightarrow (0, 525) \quad \& \quad (700, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 12x + 11y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	700	0	8400
B	140	420	6300
C	0	583,3	6416,63

El *coste mínimo* es de 6300€, comprando 140 sacos de la marca A y 420 de B.

Ejercicio 166 (3,33 *puntos*)

Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) (8 puntos) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo?

b) (2 puntos) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Caja tipo A	Caja tipo B	Almacén
Miel de romero (tarros)	2	1	280
Miel de azahar (tarros)	2	2	300
Miel multifloral (tarros)	1	2	250

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de cajas de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de cajas de tipo B"

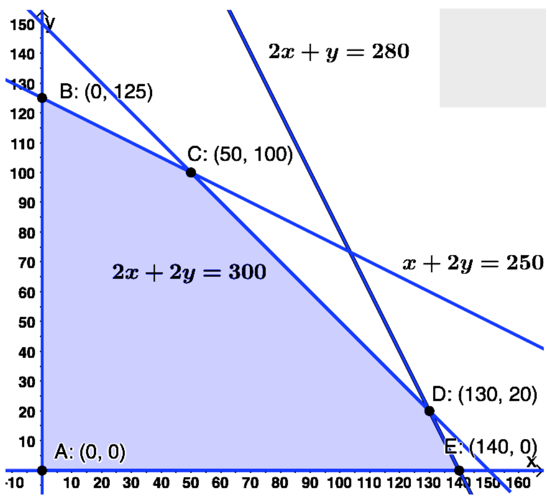
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 2x + y \leq 280 & \rightarrow (0, 280) \quad \& \quad (140, 0) \\ ② \ 2x + 2y \leq 300 & \rightarrow (0, 150) \quad \& \quad (150, 0) \\ ③ \ x + 2y \leq 250 & \rightarrow (0, 125) \quad \& \quad (250, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 7x + 5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	125	625
C	50	100	850
D	130	20	1010
E	140	0	980

Debe comercializar 130 cajas tipo A y 20 tipo B para obtener un *beneficio máximo* de 1010€.

Ejercicio 167 (3,33 *puntos*)

Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) (8 puntos) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo.

b) (2 puntos) ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

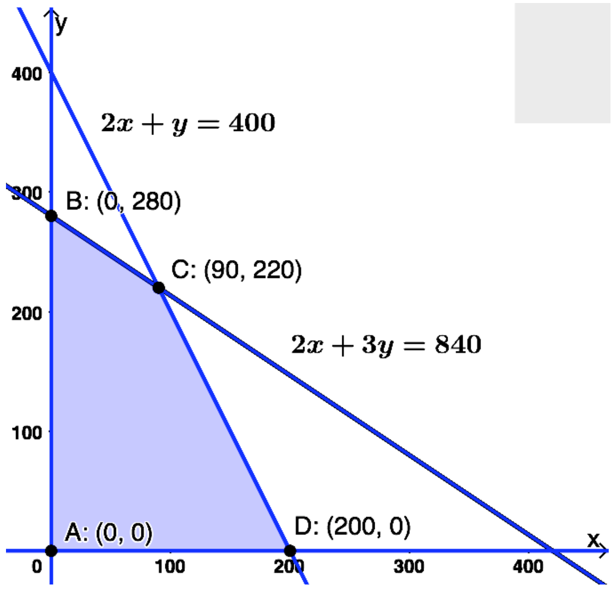
Solución.

	Mezcla tipo A	Mezcla tipo B	Almacén
Kg café brasileño/Kg mezcla	1/2	3/4	210
Kg café colombiano/ Kg mezcla	1/2	1/4	100

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Kg de mezcla tipo A (a partes iguales)"
  $y \equiv$ "Kg de mezcla de tipo B (1 colombia - 3 brasil)"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3y}{4} \leq 210 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ① \; 2x + 3y \leq 840 & \to (0, 280) \quad \& \quad (420, 0) \\ ② \; 2x + y \leq 400 & \to (0, 400) \quad \& \quad (200, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 15x + 10y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	280	2800
C	90	220	3550
D	200	0	3000

El *ingreso máximo* es de 3550€ y se obtiene vendiendo 90 kg de mezcla tipo A y 220 kg de mezcla tipo B.

Ejercicio 168 (3,33 *puntos*)

El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) (8 puntos) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio?

b) (2 puntos) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

	Comida A	Comida B	Restricción
Hidratos de carbono (ud/lata)	4	2	≥ 8
Proteínas (ud/lata)	6	20	≥ 46
Grasas (ud/lata)	1	12	≥ 12

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Latas de comida A (uds.)"
  $y \equiv$ "Latas de comida B (uds.)"

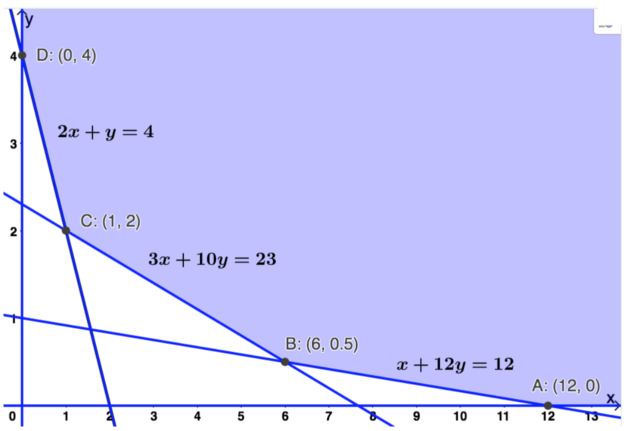
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ 4x+2y \geq 8 \\ \textcircled{2}\ 6x+20y \geq 46 \\ \textcircled{3}\ x+12y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \textcircled{1}\ 2x+y \geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (2,0) \\ \textcircled{2}\ 3x+10y \geq 23 & \to (1,2) \quad \& \quad (-9,5) \\ \textcircled{3}\ x+12y \geq 12 & \to (0,1) \quad \& \quad (12,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 10x + 16y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	12	0	120
B	6	0,5	68
C	1	2	42
D	0	4	64



El *coste mínimo* es de 42 €, que se oobtiene mezclando 1 lata de A y 2 de B.