MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU 2014 - 2023
Por convocatoria

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Índice general

2014

Curso 2013/14

Modelo 2014

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto) Hállense los valore de a y b para los que se cumple $A + B + AB = C$.*

b) *(1 punto) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$, determínese la matriz X que verifica $BX - A = I$, donde I es la matriz identidad.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

a) $A + B + AB = C$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3b \\ -2a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4b \\ -a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -5 = -5 \checkmark \\ 4b = 4 \Longrightarrow \boxed{b = 1} \\ -a = 1 \Longrightarrow \boxed{a = -1} \\ -2 = ab - 1 \Longrightarrow -2 = -1 \cdot 1 - 1 \checkmark \end{cases}$$

b) $BX - A = I \Rightarrow BX = I + A \Rightarrow \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} X = B^{-1} \cdot (I + A) \Rightarrow X = B^{-1} \cdot (I + A)$

$$X = \underbrace{\frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

	Pesqueros	Yates	Restricción
Tiempo reparación (h)	100	50	≤ 1600
	$x \leq 12$	$y \geq 16$	

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de pesqueros reparados"
  $y \equiv$ "Nº de yates reparados"

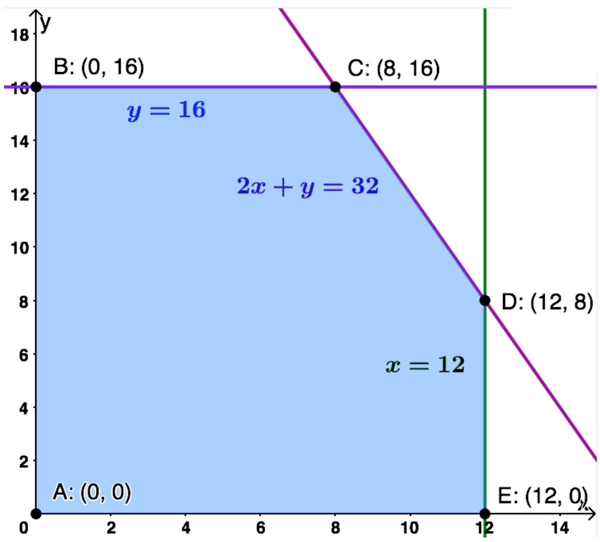
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ 100x + 50y \leq 1600 \\ (2)\ x \leq 12 \\ (3)\ y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ 2x + y \leq 320 & \to (0,320) \quad \& \quad (160,0) \\ (2)\ x \leq 12 & \to (12,0) \\ (3)\ y \leq 16 & \to (0,16) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 50000x + 10000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	16	160000
C	8	16	560000
D	12	8	680000
E	12	0	600000

Por tanto el *ingreso máximo* es de 680000 euros reparando 12 barcos pesqueros y 8 yates.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{x+2} - 1 & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense las asíntotas de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) (1 punto) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

Reescribimos la función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-6}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) `Corte con los ejes`

$$\text{Eje OX: } y = 0 \implies \begin{cases} \dfrac{-x-6}{x+2} = 0 \Rightarrow -x-6 = 0 \Rightarrow x = -6 \leq 0 \Rightarrow (-6, 0) \\ \dfrac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

$$\text{Eje OY: } x = 0 \implies y = \frac{-4}{0+2} - 1 = -3 \implies (0, -3)$$

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

$$f_1(x) \to x + 2 = 0 \implies x = -2 \leq 0 \checkmark$$
$$f_2(x) \to x + 1 = 0 \implies \cancel{x = -1} < 0$$

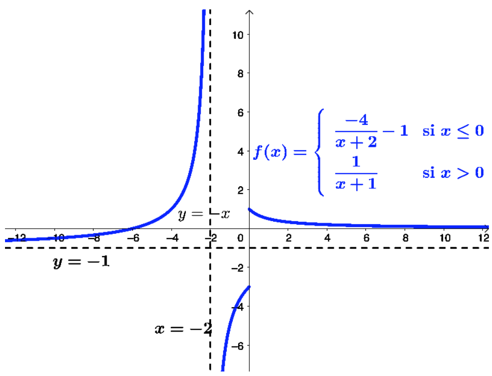
$$\lim_{x \to -2} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1 \Rightarrow \underset{x \to -\infty}{A.H.} \text{ en } y = -1$$

$$y = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow \underset{x \to -\infty}{A.H.} \text{ en } y = 0$$

- `A. Oblicua` Como hay $\underset{x \to \pm\infty}{A.H.} \implies \nexists \underset{x \to \pm\infty}{A.O.}$



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{-4}{x+2}-1\right)dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x+1}\,dx = -4\ln|x+2|-x]_{-1}^{0} + \ln|x+1|\Big|_{0}^{1}$$
$$= (-4\ln 2 - 0) - \left(-4\cancelto{0}{\ln 1}+1\right) + \ln 2 - \cancelto{0}{\ln 1} = -4\ln 2 - 1 + \ln 2$$
$$= 1 - 3\ln 2 = 1 - \ln 8$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que no ocurra B es 0.6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0.4 y si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0.25. Calcúlese:

a) (0.5 puntos) $P(B)$

b) (0.5 puntos) $P(A \cap B)$

c) (0.5 puntos) $P(A)$

d) (0.5 puntos) $P(A \cup B)$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

Del enunciado sabemos que:

$$P(\overline{B}) = 0.6 \qquad \& \qquad P(A \mid B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(B \mid A) = 0.25$$

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$

b) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \implies P(A\cap B) = P(A \mid B)\cdot P(B) = 0.4\cdot 0.4 = 0.16$

c) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \implies P(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B \mid A)} = \dfrac{0.16}{0.25} = 0.64$

d) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.64 + 0.4 - 0.16 = 0.88$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0.5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Contenido en alquitrán (mg)"} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 4)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 22$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{20}} = 1.47$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (20.53; 23.47)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{n}} < 0.5 \implies n > \left(1.645 \cdot \dfrac{4}{0.5}\right)^2 = 173.18 \implies \boxed{n = 174}$

Modelo 2014
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+ay+4z=1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a=0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & a & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a+3 = 0 \implies a=-3$$

- Si $a \neq -3$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

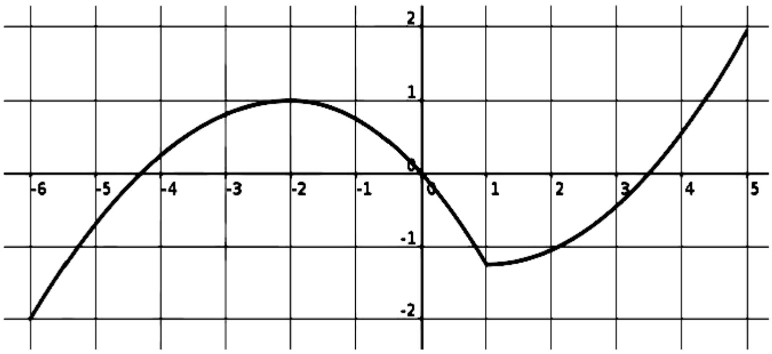
b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 2 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y + 5 \cdot 2 = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 7 \\ z = 2 \\ y = -8/3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

La figura representa la gráfica de una función $f : [-6, 5] \to \mathbb{R}$. Contéstese razonadamente a las preguntas planteadas.



a) *(0.5 puntos) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?*

b) *(0.5 puntos) ¿En qué puntos del intervalo $[-6, 5]$ f alcanza sus extremos relativos?*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuál es el signo de $\int_2^4 f(x)\,dx$?*

d) *(0.5 puntos) ¿En qué valores de $(-6, 5)$ f no es derivable?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) > 0$ en el intervalo $(-6, -2) \cup (1, 5)$, ya que es en este intervalo en donde la función es creciente.

b) En $x = 1$ hay un mínimo relativo, mientras que en $x = -2$ hay un máximo relativo. El mínimo absoluto se encuentra en $x = -6$ y el máximo absoluto en $x = 5$.

c) El signo de $\int_2^4 f(x)\,dx$ es < 0, ya que el área limitada por la gráfica de la función y las rectas $x = 2$ y $x = 4$ que está situada por debajo del eje OX es mayor que la situada por encima del mismo.

d) La función f no es derivable en $x = 1$ ya que en ese punto la función hace un pico (la pendiente de la recta tangente a uno y otro lado del punto es distinta).

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & si\ x \le 1 \\ -x^2 + 3x - b & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínense los valores de a y b que hacen que f sea continua en $x = 1$ y que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.*

b) *(1 punto) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 4$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

a)
- Si $f\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \implies -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) - b = \dfrac{1}{4} \implies \boxed{b = 2}$
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - ax + 1) = 3 - a$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + 3x - 2) = 0$
  - $f(1) = 2 \cdot 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 3 - a$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \implies 3 - a = 0 \implies \boxed{a = 3}$$

b) Para $a = 1$ y $b = 4$ la función será:

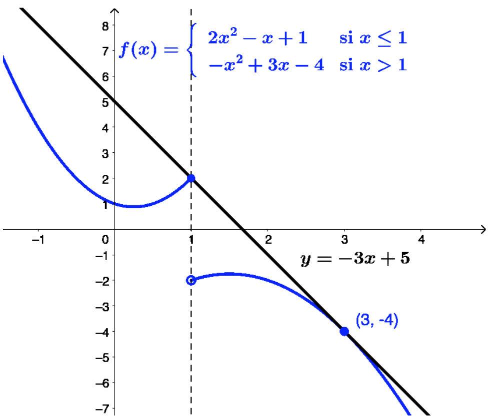
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 3x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 3 \implies y_0 = f(x_0) = f_2(3) = -4$$
$$\implies (x_0, y_0) = (3, -4)$$

$$f_2'(x) = -2x + 3$$

$$m_r = f'(x_0) = f_2'(3) = -3$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y + 4 = -3 \cdot (x - 3)$$
$$r \equiv y = -3x + 5$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) (1 punto) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“La dieta tiene supervisión médica”}$$
$$A \equiv \text{“El cliente abandona la dieta antes del primer mes”}$$

1ª Forma: Tabla de Contingencia

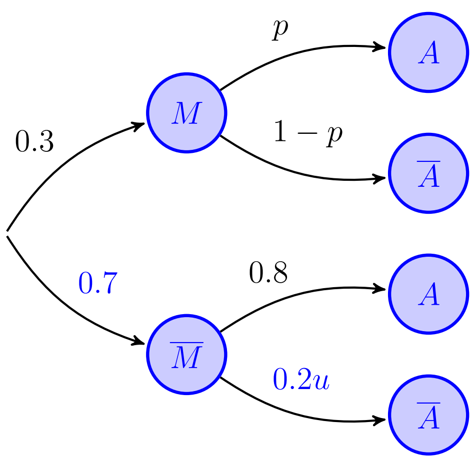
	M	$\overline{M}$	Total
A	0.56	0.56	0.6
$\overline{A}$	0.26	0.14	0.4
Total	0.3	0.7	1

a) $P(A \mid \overline{M}) = \dfrac{P(A \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} \Rightarrow P(A\cap\overline{M}) = P(\overline{M})\cdot P(A \mid \overline{M})$

$\Longrightarrow P(A \cap \overline{M}) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(A \mid M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0.04}{0.3} = 0.133$

2ª Forma: Diagrama de Arbol



a) $P(A \cap \overline{M}) = P(\overline{M} \cap A) = P(\overline{M}) \cdot P(A \mid \overline{M})$
$= 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(\overline{A}) = P\big((M \cap \overline{A}) \cup (\overline{M} \cap \overline{A})\big)$
$= P(M \cap \overline{A}) + P(\overline{M} \cap \overline{A})$
$= P(M) \cdot P(\overline{A} \mid M) + P(\overline{M}) \cdot P(\overline{A} \mid \overline{M})$
$\Longrightarrow 0.4 = 0.3\cdot(1-p)+0.7\cdot0.2 \Longrightarrow p = 0.133$
$\Longrightarrow P(A \mid M) = 0.133$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El número de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transporte se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) (1 punto) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

40 28 41 102 95 33 108 20 64

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) (1 punto) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 %, construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrida por un conductor (km/día)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 30) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = \dfrac{40+28+41+102+95+33+108+20+64}{9} = 59$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{9}} = 19.6$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (39.4; 78.6)}$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 50) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{50}{\sqrt{4}} = 25\right)$

$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{4}} = 41.125$

Junio 2014
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlese $\left(A^\top B\right)^{-1}$*, donde* $A^\top$ *denota a la traspuesta de la matriz* A*.*

b) (1 punto) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

a) $$\left(A^\top B\right)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_2 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$$
$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + 5F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow y = -2 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = -2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función $f(x,y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \leq 0 \quad \& \quad x + y \leq 6 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \leq 3$$

a) *(1 punto) Represéntese la región S.*

b) *(1 punto) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S, indicando los puntos donde se alcanzan.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

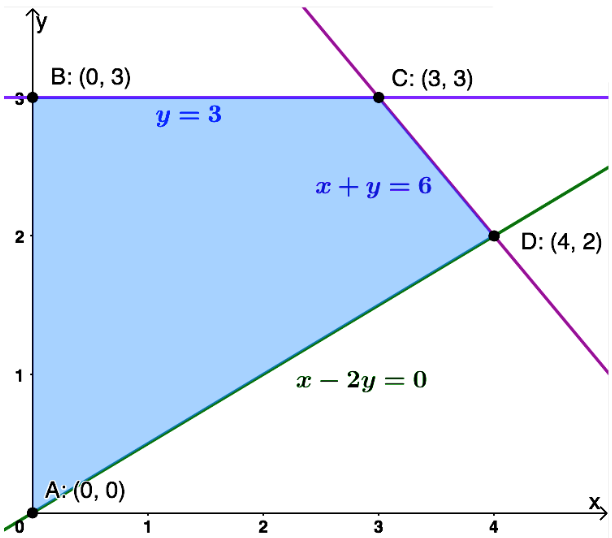
$$\begin{cases} ① \; x - 2y \leq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (6,3) \\ ② \; x + y \leq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ③ \; y \leq 3 & \rightarrow (3,0) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 5x - 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	3	−6
C	3	3	9
D	4	2	16



El *mínimo* de la función $f(x,y)$ es igual a -6 y se produce en el punto $B : (0,3)$.
El *máximo* de la función $f(x,y)$ es igual a 16 y se produce en el punto $D : (4,2)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & si\ x < 1 \\ x^2 - 2 & si\ 1 \leq x \leq 3 \\ x + b & si\ x > 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcúlese $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x < 1,\ f(x) = x + a$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio.
- Si $1 < x < 3,\ f(x) = x^2 - 2$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio.
- Si $x > 3,\ f(x) = x + 3$, que es continua en $\mathbb{R}$ porque es un polinomio.
- Si $x = 1$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x + a) = 1 + a$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 - 2) = -1$
  - $f(1) = 1^2 - 2 = -1$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$

  $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies 1 + a = -1 \implies \boxed{a = -2}$
- Si $x = 3$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 2) = 7$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(x + b) = 3 + b$
  - $f(3) = 3 + b$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$

  $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \implies 3 + b = 7 \implies \boxed{b = 4}$

b) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = (9 - 6) - \left(\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{14}{3}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que:

$$P(A) = 0.4 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.5 \quad \& \quad P(B \mid A) = 0.5$$

Calcúlense:

a) *(1 punto)* $P(B)$

b) *(1 punto)* $P(A \mid \overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

a) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{0.4} = 0.5 \implies P(A \cap B) = 0.2$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\implies P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0.5 + 0.2 - 0.4 \implies P(B) = 0.3$

b) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0.4 - 0.2}{1 - 0.3} = 0.286$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud de los gusanos (mm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=48} \overline{x} = 36 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{48}} = 0.849$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (35.151; 36.849)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 24.35 \implies \boxed{n = 25}$$

Junio 2014
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a - 3 = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=-1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3-F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x-2-(-1)=2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y+5\cdot(-1)=-7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z=4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real $f(x)=4x^3-3x^2-2x$.

a) (1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

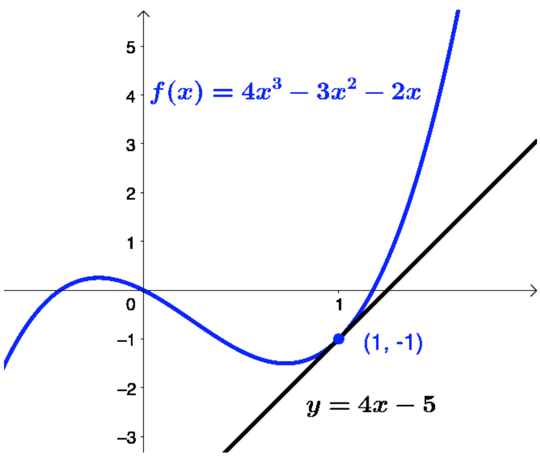
b) (1 punto) Calcúlese $\int_2^3 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

$$\begin{aligned} x_0=1 &\implies y_0=f(x_0)=f(1)=-1 \\ &\implies (x_0,y_0)=(1,-1) \\ f'(x) &= 12x^2-6x-2 \\ m_r &= f'(x_0)=f'(1)=4 \\ r &\equiv y-y_0=m_r\cdot(x-x_0) \\ & \quad y+1=4\cdot(x-1) \\ r &\equiv y=4x-5 \end{aligned}$$



b) $$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 (4x^3-3x^2-2x)\,dx = x^4-x^3-x^2\Big]_2^3$$

$$=(81-27-9)-(16-8-4)=41$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

a) *(1 punto) Determínense sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists \ A.H.$$

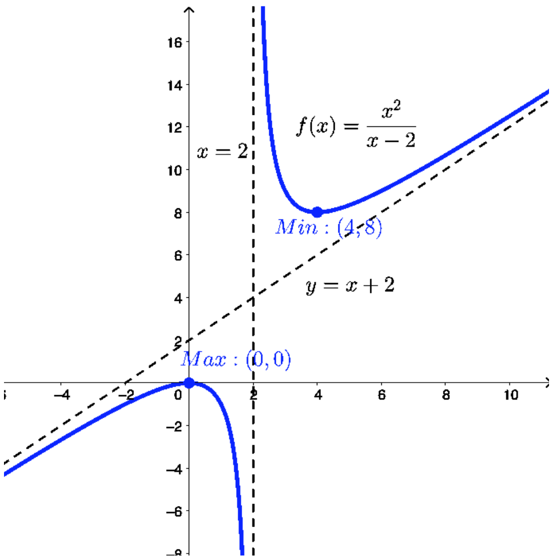
- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x + 2$.



b) $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \implies x^2 - 4x = 0 \implies x = \{0, 4\}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 4)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(4, 8)$ y un *máximo relativo* en $(0, 0)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) (1 punto) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

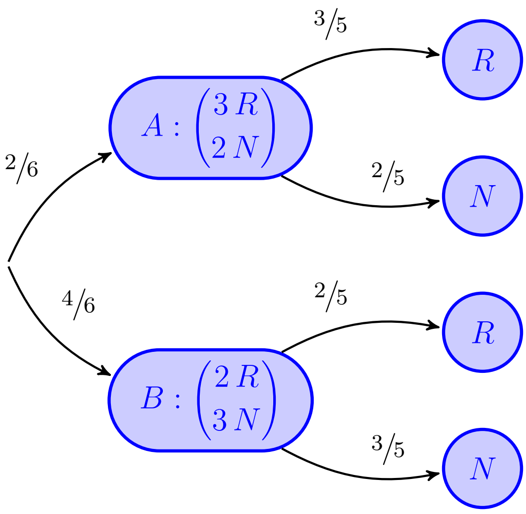
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "Sacar 1 ó 2 en el dado" $\qquad B \equiv$ "Sacar más de 2 en el dado"

$R \equiv$ "Extraer bola roja" $\qquad N \equiv$ "Extraer bola negra"



a) $P(R) = P\big((A \cap R) \cup (B \cap R)\big)$

$$= P(A \cap R) + P(B \cap R)$$
$$= P(A) \cdot P(R \mid A) + P(B) \cdot P(R \mid B)$$
$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b) $P(A \mid R) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(A) \cdot P(R \mid A)}{P(R)}$

$$= \frac{2/6 \cdot 3/5}{7/15} = \frac{3}{7}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

> *El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.*
>
> a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16.33; 19.27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.*
>
> b) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo mensual de leche (litros)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=?} I.C._{95\,\%}(16.33; 19.27)$

$$\overline{x} = \frac{16.33 + 19.27}{2} \implies \boxed{\overline{x} = 17.8}$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = \frac{19.27 - 16.33}{2} = 1.47 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1.47 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{3}{\sqrt{64}}\right) \approx \mathcal{N}(\mu, 0.375) \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{64}} = 0.735$$

Junio 2014
Opción A (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlese A^{-1}.

b) (1 punto) Determínese la matriz X *tal que* $AX = A^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 2 \quad \& \quad \mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b) $AX = A^{-1} \Longrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot A^{-1} \Longrightarrow X = (A^{-1})^2$

$$X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x - 2y \leq 0 \quad \& \quad x - y \leq 1 \quad \& \quad x + y \leq 5 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

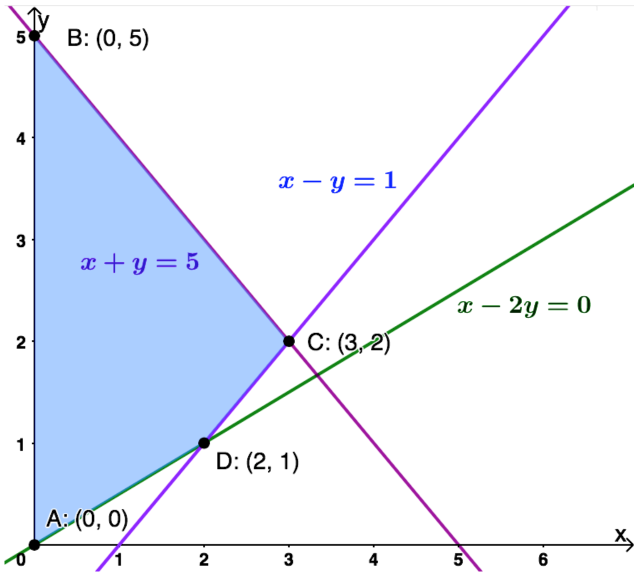
$$\begin{cases} ① \; x - 2y \leq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (2,1) \\ ② \; x - y \leq 1 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (1,0) \\ ③ \; x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x - y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	5	-5
C	3	2	1
D	2	1	1



El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -5 y se produce en el punto $B : (0,5)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de 1 y se produce en cualquier punto del segmento que une los puntos $C : (3,2)$ y $D : (2,1)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

a) *(1 punto)Hállense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si es que existen.*

b) *(1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies \nexists$ `A. Vertical`
- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

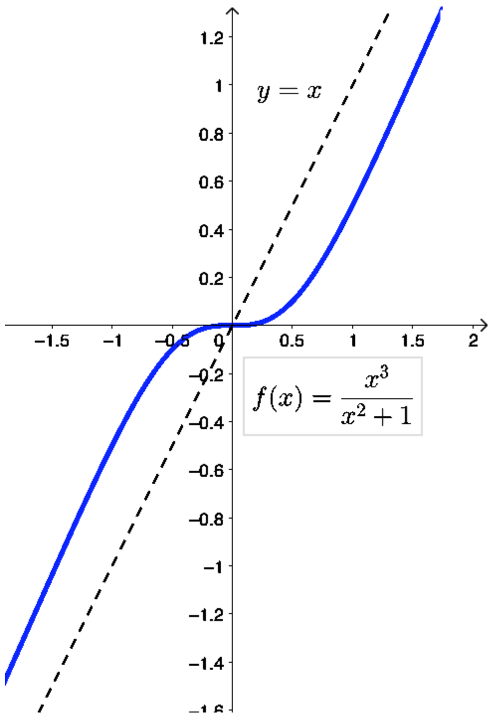
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x$.



b) $f'(x) = \dfrac{3x^2\cdot(x^2+1) - x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\mathbb{R}$ y tiene un *punto de inflexión* en $(0, 0)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Todos los trabajadores de una determinada empresa tienen como mínimo conocimientos de Inglés o de Alemán. El 75 % de los empleados tienen conocimientos de Inglés y el 46 % conocimientos de Alemán. Calcúlese la probabilidad de que un empleado elegido al azar:

a) (1 punto) Tenga conocimientos de Inglés y de Alemán.

b) (1 punto) Tenga conocimientos de Inglés si sabemos que tiene conocimientos de Alemán.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“El trabajador tiene conocimiento de inglés”}$$
$$A \equiv \text{“El trabajador tiene conocimiento de alemán”}$$

Del enunciado tenemos que:

$$P(I \cup A) = 1 \qquad \& \qquad P(I) = 0.75 \qquad \& \qquad P(A) = 0.46$$

a) $P(I \cap A) = P(I) + P(A) - P(I \cup A) = 0.75 + 0.46 - 1 = 0.21$

b) $P(I \mid A) = \dfrac{P(I \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.21}{0.46} = 0.457$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La cantidad de azúcar, en gramos, del contenido de las botellas de un litro de una conocida bebida refrescante se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 2 gramos.

a) *(1 punto) Se ha realizado un análisis de control de los contenidos de una muestral aleatoria simple de 100 de esas botellas y se ha obtenido una cantidad media de azúcar igual a 70 gramos. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 2 gramos?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de azúcar (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 70 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{100}} = 0.39$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (69.61; 70.39)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 2 \implies E \leq 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \dfrac{2}{1}\right)^2 = 10.82 \implies \boxed{n = 11}$

Junio 2014
Opción B (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 12a - 12 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).
- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y - \frac{3}{2} = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 9 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 1/4 \\ z = 3/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si\ x > 0 \\ \dfrac{mx - 6}{x - 3} & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcúlese la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{mx - 6}{x - 3} = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 2) = 2$
  - $f(0) = \dfrac{0 - 6}{0 - 3} = 2$

  Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \implies f(x)$ es continua en $x = 0\ \forall m \in \mathbb{R}$

b) Hallamos la recta tangente a $f(x)$ en $x = 5$, donde $f(x) = x^2 + 2$

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\implies y_0 = f(x_0) = f(5) = 27 \\ &\implies (x_0, y_0) = (5, 27) \\ f'(x) &= 2x \\ m_r &= f'(x_0) = f'(5) = 10 \\ r &\equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \\ y - 27 &= 10 \cdot (x - 5) \\ r &\equiv y = 10x - 23 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Para la función real de variable real $f(x) = \dfrac{(5x+7)^{10}}{2}$

a) (1 punto) Calcúlese su función derivada.

b) (1 punto) Calcúlese $\int f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot (5x+7)^9 \cdot 5 = 25 \cdot (5x+7)^{10}$

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{(5x+7)^{10}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \underbrace{5}_{u'} \cdot \underbrace{(5x+7)^{10}}_{u^{10}}\,dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}\cdot(5x+7)^{11} + C$

$$= \frac{1}{110}\cdot(5x+7)^{11} + C$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un estudio de arquitectura de Madrid trabajan personas de diferentes nacionalidades. El 80 % de las personas que trabajan en el estudio son españolas. El 40 % de los empleados del estudio son mujeres, de las cuales un 90 % son españolas. Calcúlese la probabilidad de que tomando a un empleado del estudio de arquitectura al azar:

a) (1 punto) Sea mujer y extranjera.

b) (1 punto) Sea español sabiendo que no es mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“El trabajador es español”}$$
$$M \equiv \text{“El trabajador es mujer”}$$
$$H \equiv \text{‘Èl trabajador es hombre”}$$

a) $P(E \mid M) = \dfrac{P(E\cap M)}{P(M)} \implies P(E\cap M) = P(E\mid M)\cdot P(M) = 0.4\cdot 0.9 = 0.36$

$P(\overline{E}\cap M) = P(M) - P(E\cap M) = 0.4 - 0.36 = 0.04$

b) $P(E \mid \overline{M}) = \dfrac{P(E\cap\overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{P(E) - P(E\cap M)}{1 - P(M)} = \dfrac{0.8 - 0.36}{1 - 0.4} = 0.73$

Otra Forma: Tabla de Contingencia

$$P(E \mid M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} \implies P(E \cap M) = P(E \mid M) \cdot P(M) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36$$

	E	$\overline{E}$	Total
M	0.36	0.04	0.4
$\overline{M}$	0.44	0.16	0.6
Total	0.8	0.2	1

a) $P(\overline{E} \cap M) = 0.04$

b) $P(E \mid \overline{M}) = \dfrac{P(E \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0.44}{0.6} = 0.73$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en gramos, del contenido de las cajas de una conocida marca de cereales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 20 de esas cajas de cereales para realizar un estudio y la media de los pesos de sus contenidos ha sido $\overline{x} = 500$. Calcúlese un interval de confianza del 95 % para μ.

b) (1 punto) Si sabemos que $\mu = 500$, calcúlese la probabilidad de que la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 cajas sea inferior a 495 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las cajas de cereales (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 500 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4.38$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (495.62; 504.38)}$

b) $X : \mathcal{N}(500, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(495, \dfrac{10}{\sqrt{20}}\right) \approx \mathcal{N}(2.236)$

$P(\overline{X} < 495) = P\left(Z < \dfrac{495 - 500}{2.236}\right) = P(Z < -2.24) = P(Z > 2.24)$

$= 1 - P(Z < 2.24) = 1 - 0.9875 = 0.0125$

Septiembre 2014
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.*

b) *(1 punto) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

a) Vamos a discutir el sistema por el método de Gauss, para lo cual escribiremos el mismo en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda - 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda - 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto para que el sistema sea incompatible: $3\lambda - 3 \neq 0 \implies \boxed{\lambda \neq 1}$

b) Para $\lambda = 1$ el sistema queda:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - \lambda + \mu = -1 \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\lambda - \mu - 1}{2} \\ \quad y = \lambda \qquad , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \quad z = \mu \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x \cdot (x-2)}$$

a) *(1 punto) Determínense las asíntotas de f.*

b) *(1 punto) Estúdiese si la función f es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

a)
- `A. Horizontal`

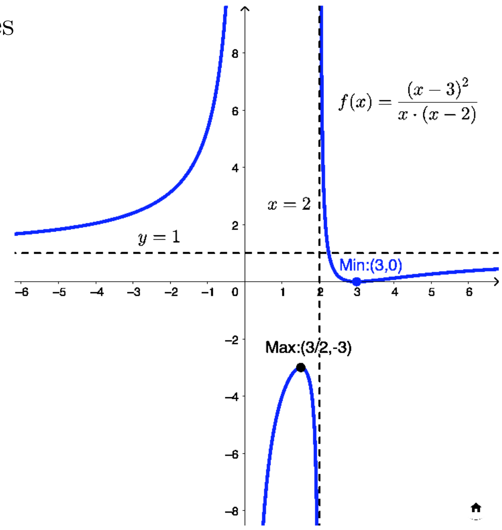
$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x \cdot (x-2)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1 \implies \textit{A.H.} \text{ en } y = 1$$

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre los puntos que no pertenecen a Dom(f).

$$x \cdot (x-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{9}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \left[\dfrac{9}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left[\dfrac{9}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- $$\lim_{x\to 2} f(x) = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



b) $$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-3) \cdot x \cdot (x-2) - (x-3)^2 \cdot (2x-2)}{x^2 \cdot (x-2)^2} = \frac{2\cancel{x} \cdot (x-3) \cdot (2x-3)}{x^{\cancel{2}} \cdot (x-2)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (x-3) \cdot (2x-3)}{x \cdot (x-2)^2} = 0 \implies 2 \cdot (x-3) \cdot (2x-3) = 0 \implies x = \{3/2, 3\}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3/2)$	$(3/2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (0, 3/2) \cup (3, +\infty)$ y *decreciente* en $(3/2, 2) \cup (2, 3)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(3, 0)$ y un *máximo relativo* en $(3/2, -3)$.

Como $f'(4) = \dfrac{5}{8} > 0$, en un entorno de $x = 4$ la función $f(x)$ es *creciente.*

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

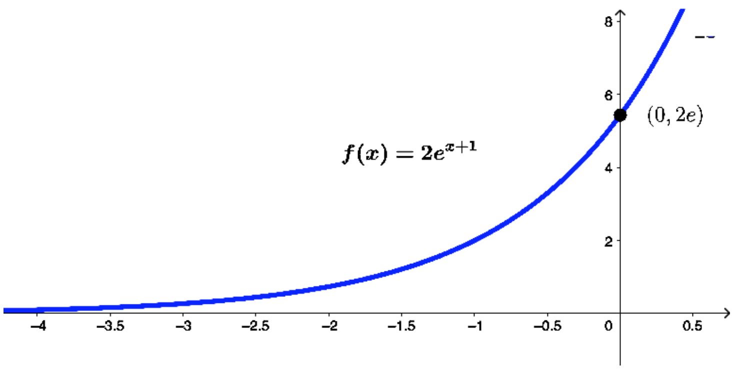
a) *(1 punto) Esbócese la gráfica de la función f.*

b) *(1 punto) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- El único punto de corte con los ejes es $(0, 2e)$.
- $\nexists$ $A.V.$ y la única $A.H.$ es $y = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x+1} = 0 \implies \underset{x\to-\infty}{A.H.}$ en $y = 0$.
- $f'(x) = 2e^{x+1} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es *creciente* en su dominio.



b) $f(x) = 2e^{x+1} = 0 \implies \nexists$ puntos de corte con OX. lo que define un único recinto de integración $(0, 1)$.

$$Area = \int_0^1 2e^{x+1}\,dx = 2e^{x+1}\Big]_0^1 = 2e^2 - 2e \simeq 9.34\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En la representación de navidad de los alumnos de 3º de primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3 de personas y 12 de árboles. Los papeles se asignan al azar, los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les ha correspondido.

a) *(1 punto) Calcúlese la probabilidad de que a los dos primeros alumnos les toque el mismo tipo de papel.*

b) *(1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \text{“El alumno } i \text{ tiene un papel de animal”} \\ P_i &\equiv \text{“El alumno } i \text{ tiene un papel de persona”} \\ T_i &\equiv \text{“El alumno } i \text{ tiene un papel de árbol”} \\ M &\equiv \text{“A los dos primeros alumnos les toca el mismo papel”} \end{aligned}$$

a) $$\begin{aligned} P(M) &= P\Big((A_1 \cap A_2) \cup (P_1 \cap P_2) \cup (T_1 \cap T_2)\Big) = P(A_1 \cap A_2) + P(P_1 \cap P_2) + P(T_1 \cap T_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) + P(P_1) \cdot P(P_2 \mid P_1) + P(T_1) \cdot P(T_2 \mid T_1) \\ &= \frac{7}{22} \cdot \frac{6}{21} + \frac{3}{22} \cdot \frac{2}{21} + \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} = \frac{30}{77} = 0.3896 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap P_3) &= P(\overline{P}_1) \cdot P(\overline{P}_2 \mid \overline{P}_1) \cdot P\Big(P_3 \mid (\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2)\Big) = \frac{19}{22} \cdot \frac{18}{21} \cdot \frac{3}{20} \\ &= \frac{171}{1540} \simeq 0.111 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) *(1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estatura de los varones (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=625} \overline{x} = 169 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.98$

$$1-\alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.01 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{16}{\sqrt{625}} = 1.488$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (167.512; 170.5)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 4 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{n}} < 4 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{16}{4}\right)^2 = 43.29 \implies \boxed{n = 44}$$

Septiembre 2014
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcúlese $\left(A \cdot A^{\top}\right)^{200}$.

b) (1 punto) Calcúlese $\left(A \cdot A^{\top} - 3I\right)^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

a) $A \cdot A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A \cdot A^{\top}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{\top}$$

$$\left(A \cdot A^{\top}\right)^{200} = A \cdot A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot A^{\top} - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(A \cdot A^{\top} - 3I\right)^{-1} \overset{\odot}{=} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\odot$*Nota:* Sea la matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x - 4 \quad \& \quad y \leq x - 1 \quad \& \quad 2y \geq x \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlene las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténgase los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

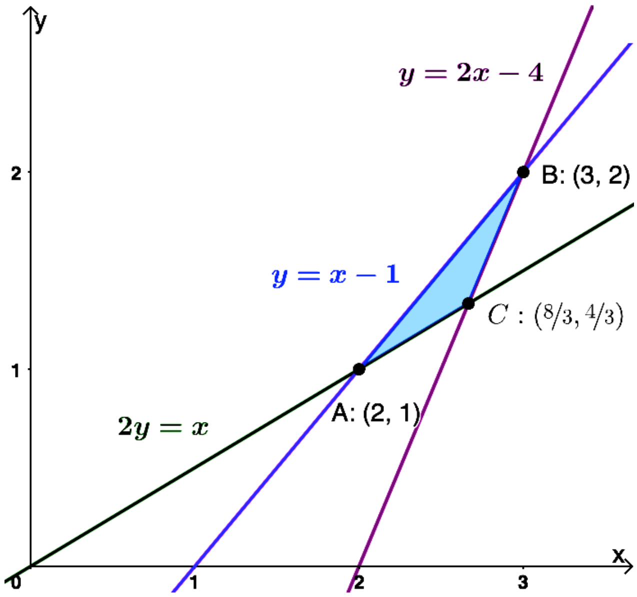
$$\begin{cases} ① \; y \leq 2x - 4 & \rightarrow (0, -4) \quad \& \quad (2, 0) \\ ② \; y \leq x - 1 & \rightarrow (0, -1) \quad \& \quad (1, 0) \\ ③ \; 2y \geq x & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (4, 2) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = x - 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	1	-1
B	3	2	-3
C	$8/3$	$4/3$	$-4/3$



El *mínimo* de $f(x, y)$ es de -3 y se produce en el punto $B : (3, 2)$.
El *máximo* de $f(x, y)$ es de -1 y se produce en el punto $A : (2, 1)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

b) (1 punto) Calcúlese $\int_0^2 f(x)\,dx$ para $\lambda = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

a)
- Sea $s \equiv y = 2x - 3$. Como $r \parallel s \implies m_r = m_s = 2$
- $f'(x) = \dfrac{\lambda \cdot (4 + x^2) - \lambda x \cdot 2x}{(4 + x^2)^2} = \dfrac{\lambda \cdot (4 - x^2)}{(4 + x^2)^2}$
- $m_r = f'(x_0) = f'(-1) \implies 2 = \dfrac{3\lambda}{25} \implies \boxed{\lambda = {}^{50}\!/_{3}}$

b) $$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{4 + x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \underbrace{\frac{2x}{4 + x^2}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(4 + x^2\right)\Big]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln 8 - \ln 4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{8}{4} = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln \sqrt{2} \simeq 0.3466$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan, sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

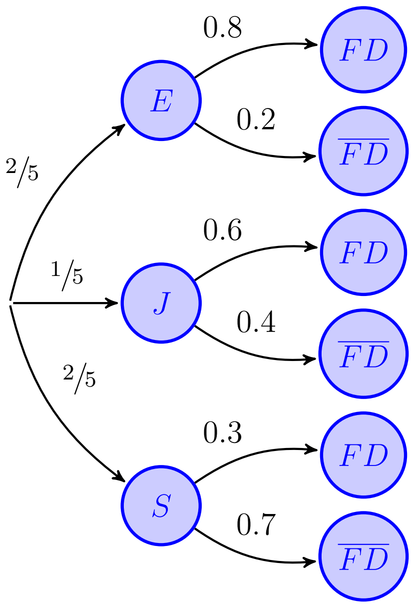
b) (1 punto) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Educación”}$$
$$J \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Justicia”}$$
$$S \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Sanidad”}$$
$$FD \equiv \text{“Al trabajador le hacen una fiesta de despedida”}$$



Sean: $\quad P(J) = p \quad \& \quad P(E) = P(S) = 2p$

$P(E) + P(S) + P(J) = 2p + 2p + p = 1 \implies p = 1/5$

a) $P(FD) = P\Big((E\cap FD)\cup(J\cap FD)\cup(S\cap FD)\Big)$
$= P(E\cap FD)+P(J\cap FD)+P(S\cap FD)$
$= P(E)\cdot P(FD \mid E)+P(J)\cdot P(FD \mid J)$
$+ P(S)\cdot P(FD \mid S) = \dfrac{2}{5}\cdot 0.8 + \dfrac{1}{5}\cdot 0.6$
$+ \dfrac{2}{5}\cdot 0.3 = 0.56$

b) $P(S \mid \overline{FD}) = \dfrac{P(S\cap \overline{FD})}{P(\overline{FD})} = \dfrac{P(S)\cdot P(\overline{FD}\mid S)}{1 - P(FD)}$
$= \dfrac{2/5 \cdot 0.7}{1 - 0.56} = 0.6363$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3.290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7.840.
Exprésense los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.
Nota: Utilícese $z_{0.05} = 1.645$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

a) $n_1 =? \quad \& \quad E = 3.29 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.9 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$

$n_2 = n_1 - 7500 \quad \& \quad E = 7.84 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \left(1.645 \cdot \dfrac{\sigma}{3.29}\right)^2 \implies \boxed{n_1 = 0.25\sigma^2} \\ n_2 = \left(1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{7.84}\right)^2 \implies \boxed{n_2 = 0.0625\sigma^2} \end{cases}$$

$$n_2 = n_1 - 7500 \implies 0.0625\sigma^2 = 0.25\sigma^2 - 7500 \implies \sigma^2 = \frac{7500}{0.24375} \implies \boxed{\sigma = 200}$$

$$n_1 = 0.25 \cdot 200^2 \implies \boxed{n_1 = 1000} \qquad \& \qquad n_2 = 0.0625 \cdot 200^2 \implies \boxed{n_2 = 2500}$$

Septiembre 2014 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlese B^{31}.

b) (1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = B \implies B^{31} = B$

b) $|A^{-1} \cdot B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| = \dfrac{1}{1} \cdot 0 = 0$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

> *Una industria química elabora plásticos de dos calidades diferentes. Para ellos tiene 2 máquinas, A y B. Es necesario que fabrique un mínimo de 20 toneladas de plástico superior y 13 de plástico medio. Cada hora que trabaja la máquina A, fabrica 7 toneladas de plástico superior y 2 de plástico medio, mientras que la máquina B produce 2 y 3 toneladas, respectivamente. Además, la máquina A no puede trabajar más de 9 horas, ni más de 10 horas la máquina B. El coste de funcionamiento de las máquinas es de 800 euros/hora para A y de 600 euros/hora para B. Calcúlese cuántas horas debe funcionar cada máquina para que el coste total de funcionamiento sea mínimo y cuál es ese coste mínimo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

	Envase pequeño	Envase grande	Restricción
Plástico superior (ton/h)	7	2	≥ 20
Plástico medio (ton/h)	2	3	≥ 13
	≤ 9	≤ 10	

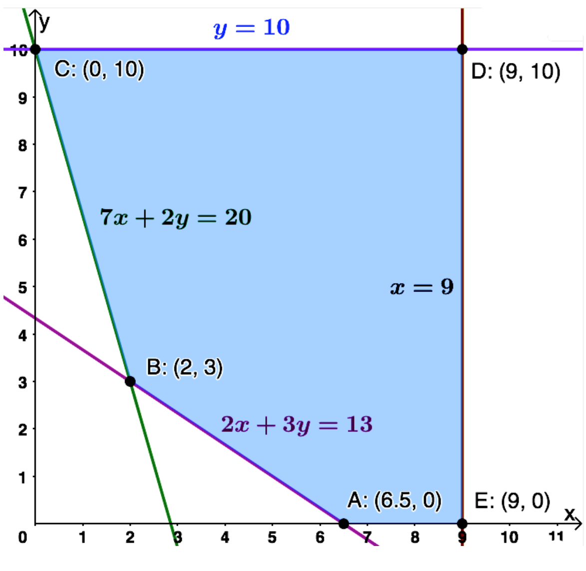
- `Incógnitas` $x \equiv$ "Tiempo de funcionamiento máquina A (h)"
  $y \equiv$ "Tiempo de funcionamiento máquina B (h)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 7x + 2y \geq 20 & \rightarrow (0, 10) \quad \& \quad (^{20}/_7, 0) \\ ② \ 2x + 3y \geq 13 & \rightarrow (0, ^{13}/_3) \quad \& \quad (^{13}/_2, 0) \\ ③ \ x \leq 9 & \rightarrow (9, 0) \\ ④ \ y \leq 10 & \rightarrow (10, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 800x + 600y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	6.5	0	5200
B	2	3	3400
C	0	10	6000
D	9	10	13200
E	9	0	7200

Por lo tanto el *coste mínimo* es de 3400 euros y se produce con 2 horas de trabajo de la máquina A y 3 horas de la B.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^3 + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínese el valor de la constante a para que sea una función continua en todo su dominio.*

b) *(1 punto) Para $a = 0$, calcúlese el valor de la integral $\int_1^5 f(x)\,dx$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- Si $x < 1$, $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, luego continua si $x < 1$.
- Si $x > 1$, $f(x) = (x-1)^3 + a$, que es continua en $\mathbb{R}$ porque es un polinomio.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(3x+1)\cdot \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^3 + a = a$
  - $f(1) = (1-1)^3 + a = a$

  $f(x)$ es continua en $x = 1$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies \boxed{a = 4}$

b) $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (x-1)^3\,dx = \left.\frac{(x-1)^4}{4}\right]_1^5 = 4^3 - 0 = 64$

f

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = P(A \mid B) = 0.25 \qquad \& \qquad P(B \mid A) = 0.5$$

a) (1 punto) Estúdiese si los sucesos son independientes.

b) (1 punto) Calcúlese $P(A \cup B)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \mid B)} = \frac{0.125}{0.25} = 0.5$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125 \\ P(A \cap B) = 0.125 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ son independientes} \end{array}\right.$$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.5 - 0.125 = 0.625$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La capacidad vital forzada es una medida para calcular el volumen de los pulmones de las personas adultas que se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica 1 litro.

a) (1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 144 personas adultas que dieron una media de capacidad vital forzada de 4 litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) (1 punto) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral obtenido a partir de una muestra de tamaño 81, con un nivel de confianza del 99 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Capacidad vital de una persona (litros)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1) \xrightarrow{n=144} \overline{x} = 4 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{144}} = 0.163$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (3.837; 4.163)}$$

b) $n = 81 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{81}} \implies \boxed{E = 0.286}$$

Septiembre 2014 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - ay = 4 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -a & 4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a - 2 = 0 \implies a = -2$$

- Si $a \neq -2$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $|1| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 1$

  $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 4 = 8 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y = -12 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 4 \\ y = 4 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, *contéstese razonadamente a las preguntas:*

a) (1 punto) Calcúlense su dominio de definición, los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Hállense las asíntotas, si las tuviere, y esbócese la gráfica de la función f.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- Corte OX: $y = 0 \implies \dfrac{x+1}{x-2} = 0 \implies x+1 = 0 \implies x = -1 \implies (-1, 0)$

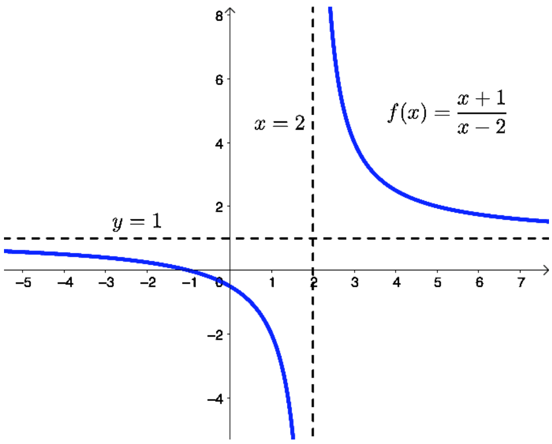
  Corte OY: $x = 0 \implies y = \dfrac{0+1}{0-2} = -\dfrac{1}{2} \implies (0, -1/2)$
- $f'(x) = \dfrac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-3}{(x-2)^2} < 0 \; \forall x \in \text{Dom}(f)$, luego la función f no tiene extremos relativos y es *decreciente* en todo su dominio.

b)
- `A. Horizontal`

  $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1 \implies \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y = 1$

- `A. Vertical` Buscamos las A.V. entre las raíces del denominador $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 - ax + 1$

a) (1 punto) Determínese el valor de a para que la función tenga un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

b) (1 punto) Para el caso en el que $a = 48$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B - Coincidentes)

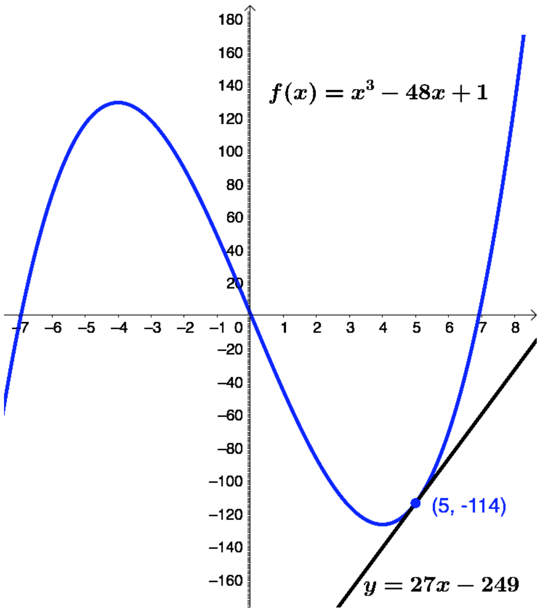
Solución.

a) $f'(x) = 3x^2 - a \quad \& \quad f''(x) = 6x$

- $Max : x = -2 \implies \begin{cases} f'(-2) = 0 \implies 3 \cdot (-2)^2 - a = 0 \implies \boxed{a = 12} \\ f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0 \checkmark \end{cases}$
- $Min : x = 2 \implies \begin{cases} f'(2) = 0 \implies 3 \cdot (2)^2 - a = 0 \implies \boxed{a = 12} \\ f''(2) = 6 \cdot (2) = 12 > 0 \checkmark \end{cases}$

b) Para $a = 48 \implies f(x) = x^3 - 48x + 1$

$$x_0 = 5 \implies y_0 = f(x_0) = f(5) = -114$$
$$\implies (x_0, y_0) = (5, -114)$$
$$f'(x) = 3x^2 - 48$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(5) = 27$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y + 114 = 27 \cdot (x - 5)$$
$$r \equiv y = 27x - 249$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se ha cometido un delito. La probabilidad de que lo haya cometido un varón es el doble de que lo haya cometido una mujer. Por otra parte, la probabilidad de que al examinar un área determinada de la huella dactilar de un varón se encuentren 15 *crestas es* 0.26*, mientras que en una mujer es* 0.04*.*

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que una huella encontrada en la escena del delito tenga 15 *crestas en el recuento de dicha área.*

b) (1 punto) Se ha encontrado en la escena del delito una huella dactilar con 15 *crestas en esa área determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha huella pertenezca a un varón?*

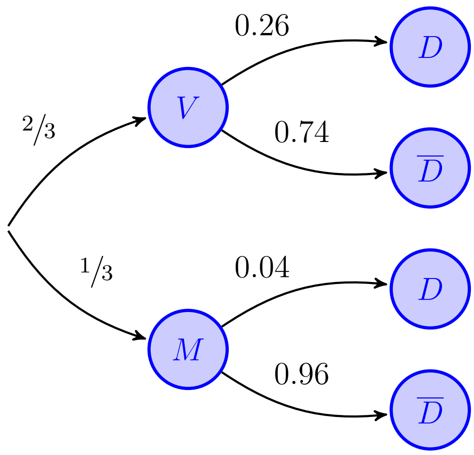
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} V &\equiv \text{“El delito ha sido cometido por un varón”} \\ M &\equiv \text{“El delito ha sido cometido por una mujer”} \\ D &\equiv \text{“La huella dactilar tiene 15 crestas”} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{P(V)=2P(M)} \\ \text{P(V)+P(M)=1} \end{array}\right\} \Longrightarrow 2P(M)+P(M)=1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{P(M)=}{}^1\!/_3 \\ P(V)={}^2\!/_3 \end{array}\right.$$



a) $$\begin{aligned} P(D) &= P\Big((V\cap D)\cup(M\cap D)\Big) \\ &= P(V\cap D)+P(M\cap D) \\ &= P(V)\cdot P(D\mid V)+P(M)\cdot P(D\mid M) \\ &= \frac{2}{3}\cdot 0.26+\frac{1}{3}\cdot 0.04 = 0.1867 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(V\mid D) &= \frac{P(V\cap D)}{P(D)} = \frac{P(V)\cdot P(D\mid V)}{P(D)} \\ &= \frac{{}^2\!/_3\cdot 0.26}{0.1867} = 0.9284 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos de la cabeza humana en adultos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 0.75 kilogramos.

a) *(1 punto) Una muestra aleatoria simple de 16 individuos a los que se les ha realizado una densitometría, prueba diagnóstica que permite medir el peso de la cabeza, proporcionó una media muestral de 5.137 kilogramos. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Cuántas densitometrías como mínimo deben realizarse para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 100 gramos, con el mismo nivel de confianza del 98 %?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de la cabeza humana (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.75)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.75) \xrightarrow{n=16} \overline{x} = 5.137 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.98$

$1-\alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1-\alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{0.75}{\sqrt{16}} = 0.436$

$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (4.701; 5.573)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.98$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.325 \cdot \dfrac{0.75}{\sqrt{n}} < 0.1 \implies n > \left(2.325 \cdot \dfrac{0.75}{0.1}\right)^2 = 304.07 \Rightarrow \boxed{n = 305}$

2015

Curso 2014/15

Modelo 2015
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2 euros, mientras que producir un litro de bebida B cuesta 0.5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar mas de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifíquense las respuestas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Cantidad de bebida A (millones de litros)"
  $y \equiv$ "Cantidad de bebida B (millones de litros)"

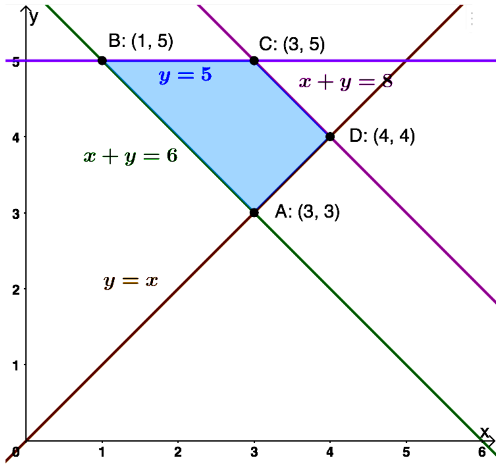
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \; x + y \leq 8 & \rightarrow (0,8) \quad \& \quad (8,0) \\ ③ \; y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \\ ④ \; y \geq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (5,5) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2x + 0.5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	3	3	7.5
B	1	5	4.5
C	3	5	8.5
D	4	4	10



El *coste mínimo* es de 4.5 millones de euros y se produce vendiendo 1 millón de litros de la bebida A y 5 de la bebida B.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlese A^{-1}.

b) (1 punto) Calcúlese $A^{\top} \cdot A$.

Nota*:* $A^{\top}$ *denota la traspuesta de la matiz* A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $A^{\top} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

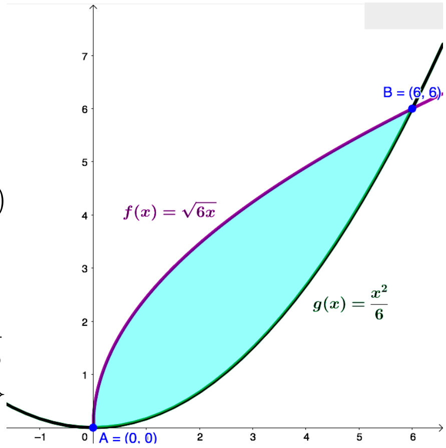
a) *(1 punto) Dibújese de una manera esquemática, la región acotada del plano limitada por las gráficas de las curvas*

$$y = \sqrt{6x} \qquad \& \qquad y = \frac{x^2}{6}$$

b) *(1 punto) Calcúlese el área de la región descrita en el apartado anterior.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.



Sean $f(x) = \sqrt{6x}$ & $g(x) = \dfrac{x^2}{6}$

a)
- $f(x)$ raíz cuadrada que pasa por $A : (0, 0)$
- $g(x)$ parábola convexa con vértice en $V : (0, 0)$
- $f(x) = g(x) \Rightarrow$ corte en $A : (0, 0)$ & $B : (6, 6)$

b) $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{6x} - \dfrac{x^2}{6} = 0 \implies 6x = \dfrac{x^4}{36}$
$\Rightarrow x^4 - 216x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^3 - 216) = 0 \Rightarrow x = \{0, 6\}$

Lo que define un único recinto de integración $A_1 = (0, 6)$

$$A_1 = \int_0^6 h(x)\,dx = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \int_0^6 \left[(6x)^{1/2} - \frac{x^2}{6}\right] dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot (6x)^{3/2} - \frac{x^3}{18}\Bigg]_0^6$$

$$= \frac{\sqrt{(6x)^3}}{9} - \frac{x^3}{18}\Bigg]_0^6 = (24 - 12) - (0) = 12$$

$Area = |A_1| = 12\ u^2$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos incompatibles A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$. Calcúlese:

a) (1 punto) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) (1 punto) $P(B \cap \overline{A})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

Vamos a reunir los datos que nos dan en el enunciado:

$$P(A) = 0.4 \qquad \& \qquad P(B) = 0.3 \qquad \& \qquad A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left[P(A) + P(B) - \cancelto{0}{P(A \cap B)}\right]$

$= 1 - (0.4 + 0.3) = 0.3$

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - \cancelto{0}{P(A \cap B)} = 0.3$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1.2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) *(1 punto) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW, si $\mu = 6.3$ kW.*

b) *(1 punto) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6.1; 6.9)$ para la media del consumo familiar diario.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

$$X : \text{“Consumo familiar diario de electricidad (kW)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1.2)$$

a) $X : \mathcal{N}(6.3, 1.2) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6.3, \dfrac{1.2}{\sqrt{50}} = 0.17\right)$

$$\begin{aligned} P\left(6 \leq \overline{X} \leq 6.6\right) &= P\left(\frac{6-6.3}{0.17} \leq Z \leq \frac{6.6-6.3}{0.17}\right) = P(-1.77 \leq Z \leq 1.77) \\ &= P(Z \leq 1.77) - P(Z \leq -1.77) = P(Z \leq 1.77) - P(Z \geq 1.77) \\ &= P(Z \leq 1.77) - \left[1 - P(Z \leq 1.77)\right] = 2P(Z \leq 1.77) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9616 - 1 = 0.9232 \end{aligned}$$

b) $I.C. = (6.1; 6.9) \implies E = \dfrac{6.9-6.1}{2} = 0.4$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 0.4 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1.2}{\sqrt{50}} \implies z_{\alpha/2} = 2.36 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.9909$$

$$\implies \alpha/2 = 0.0091 \implies \alpha = 0.0182 \implies 1 - \alpha = 0.9818 = 98.18\,\%$$

Modelo 2015
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + 4ay + z = 2a \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -4a^2 + 6a - 2 = 0 \implies a = \{1/2, 1\}$$

- Si $a \neq \{1/2, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Indeter. (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$$

$$\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche} \text{Sist. Incompatible (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{1/2, 1\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3/4 \\ y = 1/2 \\ z = -3/4 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$$

a) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

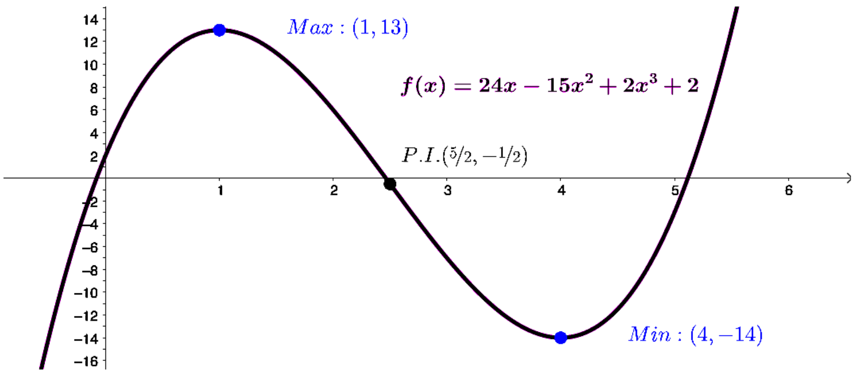
a) $f'(x) = 24 - 30x + 6x^2 = 0 \implies x = \{1, 4\}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ y *decreciente* en $(1, 4)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(4, -14)$ y un *máximo relativo* en $(1, 13)$

$f''(x) = -30 + 12x = 0 \implies x = 5/2$ & $f'''(x) = 12 \neq 0 \implies f(x)$ tiene un *punto de inflexión* en $(5/2, -1/2)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

a) *(1 punto) Determínense sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1.5$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

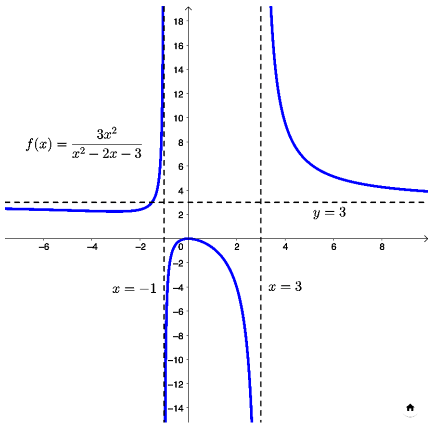
Solución.

a)
- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = \{-1, 3\}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

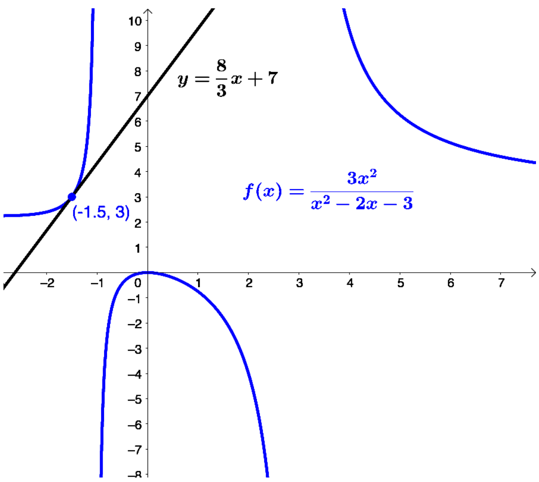
$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{27}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \left[\dfrac{27}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \left[\dfrac{27}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



- `A. Horizontal` $y = 3$

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 3$$

$$x_0 = -1.5 \implies y_0 = f(x_0) = f(-1.5) = 3$$
$$\implies (x_0, y_0) = (-1.5, 3)$$
$$f'(x) = \frac{6x\cdot(x+3)}{(x^2-2x-3)^2}$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(-1.5) = \frac{8}{3}$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y - 3 = \frac{8}{3}\cdot(x + 1.5)$$
$$r \equiv y = \frac{8}{3}x + 7$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

a) (1 punto) Del mismo color.

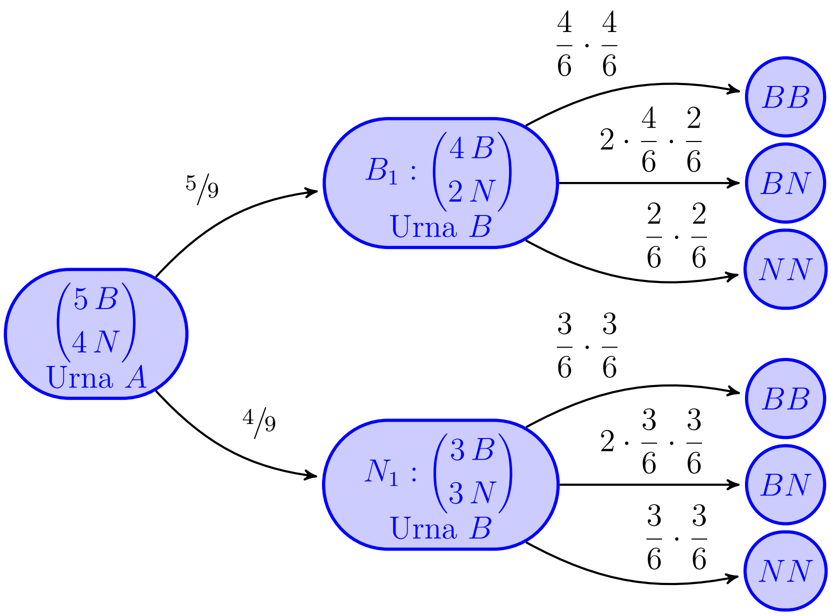
b) (1 punto) De distinto color.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned}
B_1 &\equiv \text{“Pasar una bola blanca de la Urna } A \text{ a la } B\text{”}\\
N_1 &\equiv \text{“Pasar una bola negra de la Urna } A \text{ a la } B\text{”}\\
BB &\equiv \text{“Extraer dos bolas blancas de la urna } B\text{”}\\
BN &\equiv \text{“Extraer una bola blanca y otra negra de la urna } B\text{”}\\
NN &\equiv \text{“Extraer dos bolas negras de la urna } B\text{”}
\end{aligned}$$



a) $P(\text{mismo color}) = P(BB \cup NN) = P(BB) + P(NN) = P\Big((B_1 \cap BB) \cup (N_1 \cap BB)\Big)$

$$+ P\Big((B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN)\Big) = P(B_1 \cap BB) + P(N_1 \cap BB)$$
$$+ P(B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN) = P(B_1) \cdot P(BB \mid B_1)$$
$$+ P(N_1) \cdot P(BB \mid N_1) + P(B_1) \cdot P(NN \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(NN \mid N_1)$$
$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{43}{81}$$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34.5 días.

a) (1 punto) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

a) X : “Nº de días de tratamiento contra el insomnio”

$$X : \mathcal{N}(\mu, 34.5) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \tfrac{290+275+290+325+285+365+375+310+290+300}{10} = 310.5$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{34.5}{\sqrt{10}} = 21.38$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (289.12; 331.88)}$$

b) $n = ?$ & $E < 10$ & $1 - \alpha = 0.95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{34.5}{\sqrt{n}} < 10 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{34.5}{10}\right)^2 = 45.72 \implies \boxed{n = 46}$$

Junio 2015
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a - 4 = 0 \implies a = -2$$

- Si $a \neq -2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos para $a = 1$ por el método de Gauss, sabiendo estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + y - 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 4 \cdot (-1) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) *(1 punto) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.*

b) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

a)
- $f'(x) = 3x^2 + 2x \implies f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(3x^2 + 2x\right) dx = x^3 + x^2 + C$
- Pasa por $(1, 4) \implies f(1) = 4 \implies f(1) = 1^3 + 1^2 + C = 4 \implies C = 2$

Por lo tanto $\boxed{f(x) = x^3 + x^2 + 2}$

b) $(x_0, y_0) = (1, 4)$

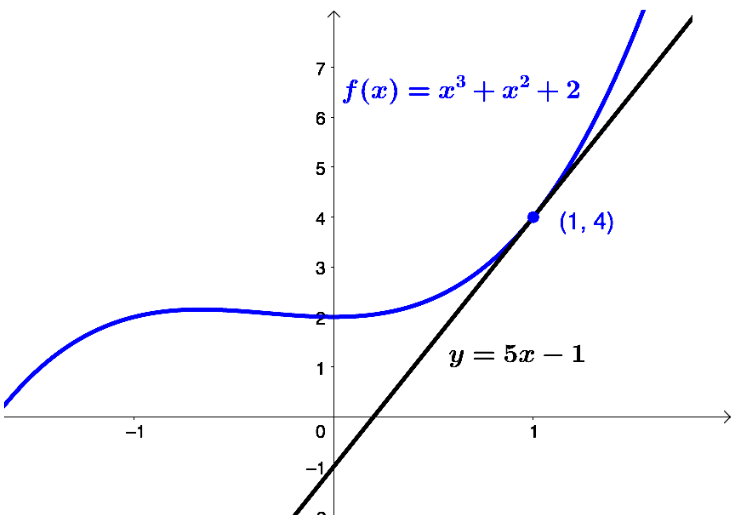
$f'(x) = 3x^2 + 2x$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 5$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - 4 = 5 \cdot (x - 1)$

$\boxed{r \equiv y = 5x - 1}$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sean las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - 6x \qquad \& \qquad g(x) = x - 10$$

a) *(1 punto) Represéntense gráficamente las funciones f y g.*

b) *(1 punto) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de las funciones f y g.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

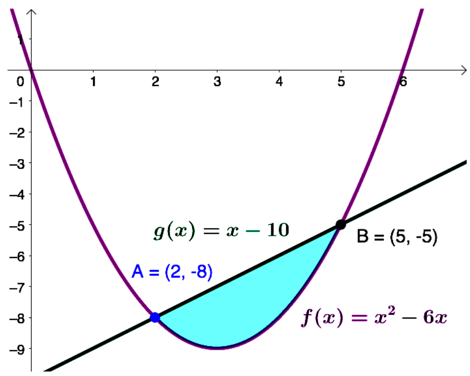
Solución.

a)
- $f(x)$ es una parábola convexa que corta al eje de abscisas en los puntos $x = 0$ y $x = 6$ y cuyo vértice es $x_v = -\dfrac{-6}{2} = 3 \Longrightarrow y_v = f(3) = -9$
- $g(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(0, -10)$ y $(10, 0)$

b) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 6x - (x - 10) = x^2 - 7x + 10 = 0 \Longrightarrow x = \{2, 5\}$, lo que determina un único recinto de integración $A_1 = (2, 5)$

$$A_1 = \int_2^5 h(x)\,dx = \int_2^5 \left(x^2 - 7x + 10\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x \Big]_2^5 = \left(\frac{125}{3} - \frac{175}{2} + 50\right)$$
$$- \left(\frac{8}{3} - 14 + 20\right) = -\frac{9}{2}$$

$$Area = |A_1| = \frac{9}{2}\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas.
Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Las dos bolas sean del mismo color.

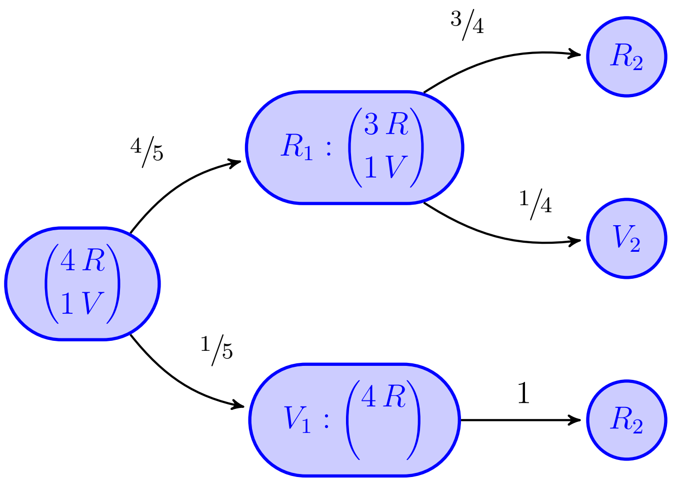
b) (1 punto) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{roja} \text{ en la extracción } i\text{”}$$
$$V_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{verde} \text{ en la extracción } i\text{”}$$



a) $P(\text{mismo color}) = P\Big((R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)\Big) = P(R_1 \cap R_2) + \cancelto{0}{P(V_1 \cap V_2)}$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

b) $P(V_1 \mid R_2) = \dfrac{P(V_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap R_2)}$

$$= \frac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) + P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 1}{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de reacción } (ms)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 250)$$

a) $$I.C. = (701; 799) \implies \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{701 + 799}{2} = 750 \\ E = \dfrac{799 - 701}{2} = 49 \end{cases}$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{250}{49}\right)^2 = 100$$

b) $E = ?$ & $n = 25$ & $1 - \alpha = 0.8$

$$1 - \alpha = 0.8 \implies \alpha = 0.2 \implies \alpha/2 = 0.1 \implies 1 - \alpha/2 = 0.9 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.285$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.285 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 64.25$$

Junio 2015
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho 6 toneladas de pienso del tipo A y como máximo 4 toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

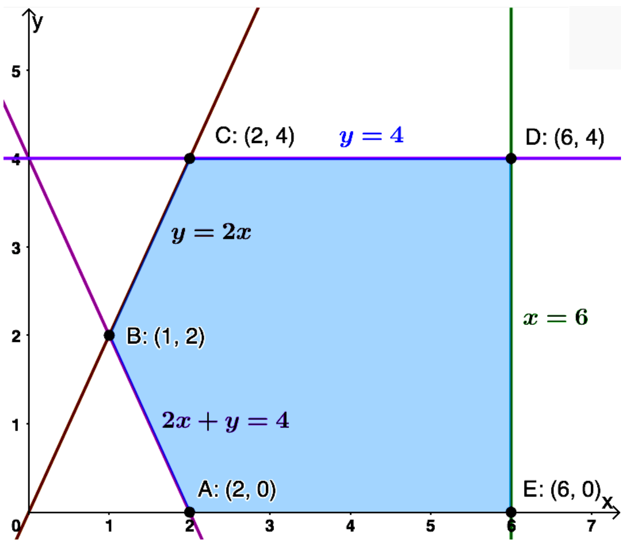
- `Incógnitas` $x \equiv$ "Producción diaria de pienso tipo A (ton.)"
  $y \equiv$ "Producción diaria de pienso tipo A (ton.)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \leq 6 & \to (6,0) \\ ② \ y \leq 4 & \to (0,4) \\ ③ \ y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (2,4) \\ ④ \ 2x + y \geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (2,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 1000x + 2000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	0	2000
B	1	2	5000
C	2	4	10000
D	6	4	14000
E	6	0	6000

El *coste mínimo* es de 2000 euros y se obtiene produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna de B.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.

b) (1 punto) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

a) $|A| = 8 - 4k = 0 \implies k = 2$

- Si $k \neq 2 \implies \operatorname{ran}(A) = 3$
- Si $k = 2 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

b) Para $k = 3$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 8 - 4 \cdot 3 = -4 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$

$$\mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x < 2 \\ 3x + m & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcúlese $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

a)

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot \cancel{(x-2)}} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-3}$
$= \dfrac{4}{-1} = -4$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(3x + m) = 6 + m$
- $f(2) = 3 \cdot 2 + m = 6 + m$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2 \implies \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, luego

$$-4 = 6 + m \implies \boxed{m = -10}$$

b)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x + m) = +\infty$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A \cap B) = 0.3 \qquad \& \qquad P(A \cap \overline{B}) = 0.2 \qquad \& \qquad P(B) = 0.7$$

Calcúlense:

a) *(1 punto) $P(A \cup B)$*

b) *(1 punto) $P(B \mid \overline{A})$*

Nota: *$\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \implies P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0.2 + 0.3 = 0.5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0.7 - 0.3}{1 - 0.5} = 0.8$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) *(1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100$ h?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración componente (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 8000$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1000}{\sqrt{81}} = 286.11$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (7713.89; 8286.11)}$$

b) $X : \mathcal{N}(8100, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8100, \frac{1000}{\sqrt{100}} = 100\right)$

$$\begin{aligned} P(7904 \le \overline{X} \le 8296) &= P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \le \frac{8296 - 8100}{100}\right) = P(-1.96 \le Z \le 1.96) \\ &= P(Z \le 1.96) - P(Z \le -1.96) \\ &= P(Z \le 1.96) - P(Z \ge 1.96) \\ &= P(Z \le 1.96) - \left[1 - P(Z \le 1.96)\right] \\ &= 2 \cdot P(Z \le 1.96) - 1 = 2 \cdot 0.9750 - 1 = 0.95 \end{aligned}$$

Junio 2015
Opción A (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+2z=1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a=1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - 3a + 2 = 0 \implies a = \{1, 2\}$$

- Si $a \neq \{1,2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 3 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche} \text{Sist. Incompatible (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión del sistema.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda + 0 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \qquad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real a, sabiendo que la función alcanza un extremo relativo en $x = -1$. Compruébese que se trata de un máximo.

b) (1 punto) Para a=1 calcúlese $\int_{-1}^{0} (x - 1) \cdot f(x)\, dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Si la función $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = -1 \implies f'(-1) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x - 1) - (x^2 + a)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - a}{(x - 1)^2}$$

$$\implies f'(-1) = 0 \implies \frac{3 - a}{4} = 0 \implies \boxed{a = 3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = \{-1, 3\}$$

Por lo tanto hay un *máximo relativo* en $x = -1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

b) Para $a=1$

$$\int_{-1}^{0}(x-1)\cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\cancel{(x-1)}\cdot\frac{x^2+1}{\cancel{x-1}}\,dx = \int_{0}^{-1}(x^2+1)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}+x\right]_0^{-1}$$

$$= (0) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{4}{3}$$

—————— ○ ——————

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se sabe que la derivada de cierta función real de variable real f es

$$f'(x) = x^2\cdot(x^2-2x-15)$$

a) (1 punto) Determínese los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Determínense los extremos relativos de f, indicando si se trata de máximos o mínimos relativos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = x^2\cdot(x^2-2x-15) = 0 \implies x = \{-3,0,5\}$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,5)$	$(5,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en el intervalo $(-3,5)$ y *creciente* en $(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $x=-3$ y un *mínimo relativo* en $x=5$.

—————— ○ ——————

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determínese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.

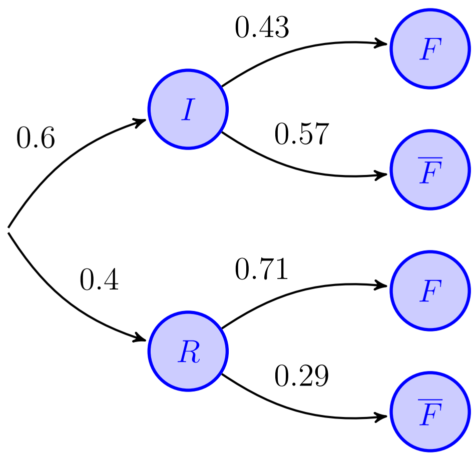
b) (1 punto) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$I \equiv$ "El paciente es tratado con interferón"
$R \equiv$ "El paciente es tratado con ribavirina más interferón"
$F \equiv$ "El tratameinto tiene resultados favorables"



a) $$\begin{aligned} P(F) &= P\big((I \cap F) \cup (R \cap F)\big) \\ &= P(I \cap F) + P(R \cap F) \\ &= P(I) \cdot P(F \mid I) + P(R) \cdot P(F \mid R) \\ &= 0.6 \cdot 0.43 + 0.4 \cdot 0.71 = 0.542 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(I \mid F) &= \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{P(I) \cdot P(F \mid I)}{P(F)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.43}{0.542} = 0.476 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo de agua, medido en litros, en una ducha puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ litros.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 duchas, obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 100$ litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar μ mediante la media muestral, el error cometido sea menor que 2 litros, con un nivel de confianza del 99 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de agua } (\ell)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 100$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} = 3.92$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (96.08; 103.92)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2.575 \cdot \frac{10}{2}\right)^2 = 165.77 \implies \boxed{n = 166}$$

Junio 2015
Opción B (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices dependientes del parámetro real a

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determínense los valores de a para los que la matriz $A \cdot B$ admite inversa.

b) (1 punto) Para $a = 0$, resuélvase la ecuación matricial $(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 2a+4 & 2 \end{pmatrix}$

$|A \cdot B| = 2a^2 - 2a - 4 = 0 \implies a = \{-1, 2\} \implies \exists (A \cdot B)^{-1} \; \forall a \neq \{-1, 2\}$

b) Para $a = 1$ $\quad A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \& \quad |A \cdot B| = -4 \quad \& \quad (A{\cdot}B)^{-1} = -\frac{1}{4}{\cdot}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \underbrace{(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B)}_{I} \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un banco oferta dos productos financieros, A y B. El banco garantiza para el producto A un beneficio anual del $5\,\%$ de la cantidad invertida, y para el producto B un beneficio del $2\,\%$ anual de la cantidad invertida. Una persona desea invertir en ambos productos a lo sumo 10000 euros, con la condición de que la cantidad invertida en el producto A no supere el triple de la cantidad invertida en el producto B y que la inversión en el producto B sea de 6000 euros como máximo.
Determínese qué cantidad debe invertir en cada producto para obtener, al cabo de un año, un beneficio máximo y obténgase este beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } A \text{ (euros)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } B \text{ (euros)”}$$

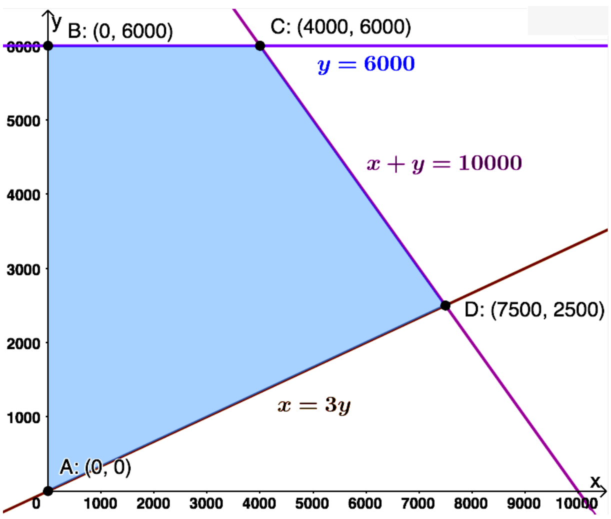
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 10000 & \rightarrow (0, 10000) \quad \& \quad (10000, 0) \\ ② \; x \leq 3y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (3000, 9000) \\ ③ \; y \leq 6000 & \rightarrow (0, 6000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 0.05x + 0.02y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	6000	120
C	4000	6000	320
D	7500	2500	425

El *máximo beneficio* es de 425 euros invirtiendo 7500 euros en el producto A y 2500 en el producto B.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ x^2 + a & si\ 0 < x < 2 \\ bx + 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que f sea continua en toda la recta real.

b) (1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, luego continua en $x < 0$
- Si $0 < x < 2$, $f(x) = x^2 + a$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 2$, $f(x) = bx + 1$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x = 0$

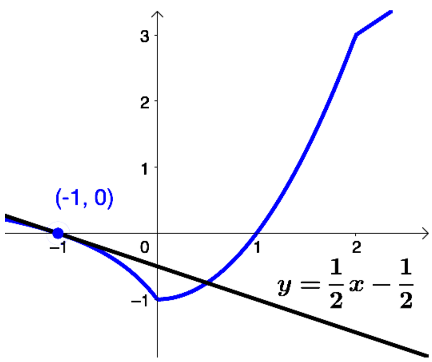
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x-1} = -1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+a) = a \\ \bullet\ f(0) = 0^2 + a = a \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\ \boxed{a = -1} \end{array}$$

- Si $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+a) = 4 + a \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(bx+1) = 2b + 1 \\ \bullet\ f(2) = 2b + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \\ 4 + a = 2b + 1 \implies 4 - 1 = 2b + 1 \\ \boxed{b = 1} \end{array}$$

b) En $x = -1$ la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$\begin{aligned} x_0 = -1 &\implies y_0 = f(x_0) = f(-1) = 0 \\ f'(x) &= \frac{-2}{(x-1)^2} \\ m_r &= f'(x_0) = f'(-1) = -1/2 \\ r \equiv y - y_0 &= m_r \cdot (x - x_0) \\ y - 0 &= -\frac{1}{2} \cdot (x+1) \\ r \equiv y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que

$$P(A) = 0.8 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.8 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.9$$

a) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) (1 punto) Calcúlese $P(B \mid \overline{A})$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.8 \implies P(A \cap B) = 0.2$

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{0.9} = \underbrace{P(A)}_{0.8} + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0.2} \implies P(B) = 0.9 + 0.2 - 0.8 = 0.3$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.3 = 0.24 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}\right.$$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \dfrac{0.3 - 0.2}{1 - 0.8} = 0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El nivel de colesterol total en sangre en adultos de 50 *años, medido en miligramos por decilitro (mg/dl), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida* μ *y desviación típica* $\sigma = 20\ mg/dl$.

a) *(1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple se obtiene el intervalo de confianza* $(191.2; 210.8)$, *expresado en* mg/dl, *para estimar* μ *con un nivel de confianza del* 95 %. *Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra considerada.*

b) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño* 100. *Calcúlese la amplitud del intervalo de confianza al* 98 % *para* μ.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nivel de colesterol } (mg/ml)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $I.C._{95\,\%}(\mu) = (191.2; 210.8) \implies \overline{x} = \dfrac{191.2 + 210.8}{2} = 201$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = \frac{210.8 - 191.2}{2} = 9.8 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=100}$

$$1-\alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.01 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.325 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \implies \boxed{2E = 9.3}$$

Septiembre 2015
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcúlese* A^{15} *e indíquese si la matriz* A *tiene inversa.*

b) *(1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz* $\left(B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I\right)^3$

Nota: $A^\top$ *denota la matriz traspuesta de* A, I *es la matriz identidad de orden* 2.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = A \overset{\odot}{\Longrightarrow} A^{15} = A$

$|A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$

b) $B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A^\top} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2I}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\left(B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I\right)^3\right| = \left|B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I\right|^3 = 2^3 = 8$$

$\odot$ Método de Inducción

Caso Base: $A^2 = A$
Hipótesis de Inducción: $A^k = A$
Paso Inductivo: $A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12000 *litros en total. El aceite de tipo A cuesta* 3 *euros/litro el de tipo B cuesta* 2 *euros/litro. Necesita adquirir al menos* 2000 *litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a* 30000 *euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un* 25 % *sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un* 30 % *sobre el precio que ha pagado por el aceite del tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de aceite } A\ (\ell)\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de aceite } B\ (\ell)\text{”}$$

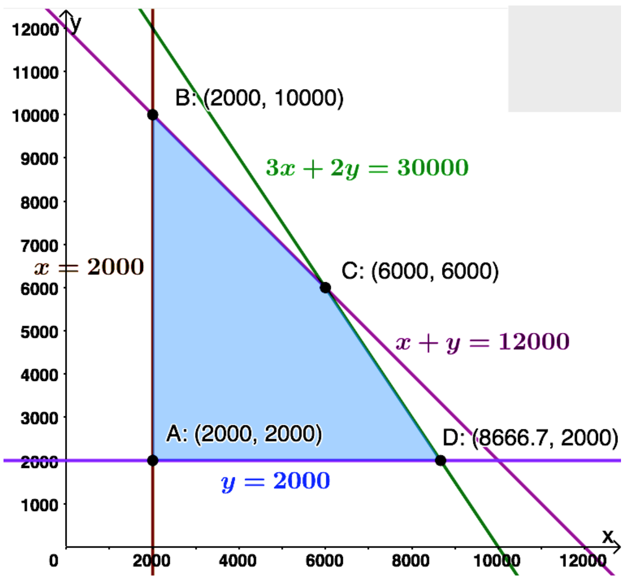
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 12000 & \to (0, 12000) \quad \& \quad (12000, 0) \\ ② \ x \geq 2000 & \to (2000, 0) \\ ③ \ y \geq 2000 & \to (0, 2000) \\ ④ \ 3x + 2y \leq 3000 & \to (0, 1500) \quad \& \quad (1000, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = (0.25 \cdot 3)x + (0.3 \cdot 2)y = 0.75x + 0.6y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2000	2000	2700
B	2000	10000	7500
C	6000	6000	8100
D	8667	2000	7700

El *beneficio máximo* es de 8100 euros y se produce comprando 6000 litros de aceite A y 6000 del tipo B.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2, \ a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = {}^1\!/_2$. Compruébese que se trata de un mínimo.

b) (1 punto) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

a) Si la función tiene un mínimo en $x = {}^1\!/_2 \implies f'({}^1\!/_2) = 0 \quad \& \quad f''({}^1\!/_2) > 0$

$$f'(x) = 12x^2 - 2ax - a \implies f'({}^1\!/_2) = 3 - 2a = 0 \implies a = {}^3\!/_2$$
$$f''(x) = 24x - 3 \implies f''({}^1\!/_2) = 9 > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{mínimo en } x = {}^1\!/_2$$

b) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(4x^3 - 2x^2 - 2x + 2\right) dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x \Big]_{-1}^{1}$$
$$= \left(\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.09 \quad \& \quad P(B) = 0.07 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.97$$

Además los sucesos A y C son incompatibles.

a) *(1 punto) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.*

b) *(1 punto) Calcúlese $P(A \cap B \mid C)$.*

Nota: *$\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

Reunimos los datos del enunciado:

$$P(A) = 0.09 \quad \& \quad P(B) = 0.07 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.97 \quad \& \quad P(A \cap C) \underset{incomp.}{\overset{A\ y\ C}{=}} 0$$

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.97 = 0.03$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.03 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.09 \cdot 0.07 = 0.0063 = \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ \text{A y B no son independientes} \end{cases}$$

b) $P(A \cap B \mid C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \overset{\circledast}{=} \dfrac{0}{P(C)} = 0$

$\circledast$ Como $P(A \cap C) = 0 \Longrightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) (1 punto) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) (1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2.35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de fruta (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{16000}{100} = 160$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (158.04; 161.96)}$$

b) $n = 64 \quad \& \quad E = 2.35 \quad \& \quad 1-\alpha = ?$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 2.35 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{64}} \implies z_{\alpha/2} = 1.88$$

$$z_{\alpha/2} = 1.88 \xRightarrow{Tabla} 1-\alpha/2 = 0.9699 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0301 \Rightarrow \alpha = 0.602 \Rightarrow \boxed{1-\alpha = 0.9398}$$

Septiembre 2015
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)^2 \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$$\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xRightarrow{Rouche} \text{S}\textsc{ist}. \text{ I}\textsc{ncompatible} \text{ (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-1, 1\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 1 + 2 \cdot 2 = 3 \\ \Rightarrow -y - 3 \cdot 2 = -5 \\ \Rightarrow -3z = -6 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) *(1 punto) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.*

b) *(1 punto) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

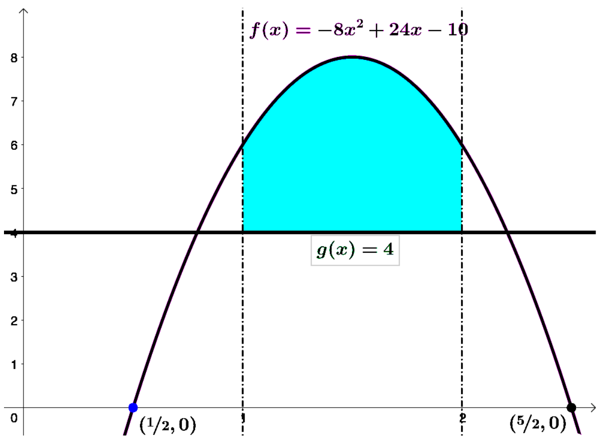
a) $f'(x) = -16x + 24 = 0 \implies x = 3/2$

$f''(x) = -16 \implies f''(3/2) = -16 < 0 \xRightarrow{(\cap)}$ Máximo en $(3/2, 8)$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, 10)$ & $(5/2, 0)$ & $(1/2, 0)$.

b) $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$ & $g(x) = 4$

$h(x) = f(x) - g(x) = -8x^2 + 24x - 14$



$$Area = \int_1^2 h(x)\,dx$$
$$= \int_1^2 \left(-8x^2 + 24x - 14\right) dx$$
$$= -\frac{8x^3}{3} + 12x^2 - 14x\Bigg]_1^2$$
$$= \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{10}{3}\ u^2$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) (1 punto) Determínense las asíntotas de esta función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

a)
- Si $x < 0$, $f(x) = e^x$, que es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1$, que es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = 1$
  - $f(0) = \dfrac{0^3}{(0-2)^2} + 1 = 1$

  Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b)
- `A. Vertical` En $f_1(x)$ no hay A. Vertical, buscamos las de $f_2(x)$ entre las raíces del denominador. $x - 2 = 0 \implies x = 2$

  $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \left[\frac{8}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{8}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{8}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

  $$y = \lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \implies \underset{x \to -\infty}{A.H.} \text{ en } y = 0$$

  $$y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty \implies \nexists \underset{x \to +\infty}{A.H.}$$

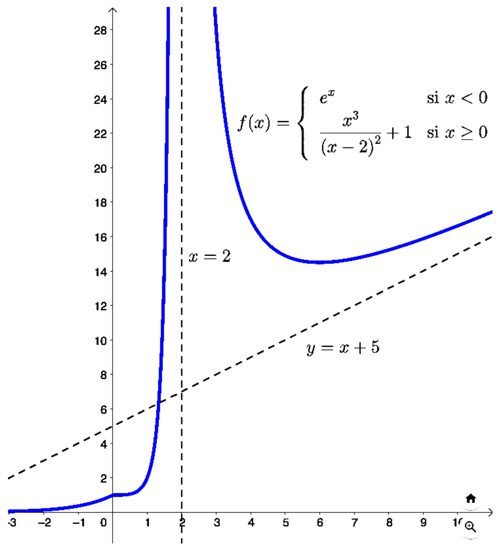
- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 8x + 4}{(x-2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 5$$

Luego hay una $\underset{x\to+\infty}{A.O.}$ en $y = x + 5$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es 3/4. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

b) (1 punto) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$P \equiv$ "El trabajador es puntual"
$T \equiv$ "El trabajador se desplaza en transporte público"

$$P(P) = \frac{3}{4} \qquad \& \qquad P(T \mid \overline{P}) = \frac{1}{2}$$

a) $P(T \mid \overline{P}) = \dfrac{P(T \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{1}{2} \implies P(T \cap \overline{P}) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{8} = 0.125$

b) $P(\text{Al menos uno sea puntual}) = 1 - P(\text{Ninguno sea puntual}) = 1 - P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3})$

$$= P(\overline{P_1}) \cdot P(\overline{P_2}) \cdot P(\overline{P_3}) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= 0.9844$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) (1 punto) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) (1 punto) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto familiar en gas (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 75)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 15 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/\!_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/\!_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} < 15 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{75}{15}\right)^2 = 96.04 \implies \boxed{n = 97}$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 75) \xrightarrow{n=81} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(250, \dfrac{75}{\sqrt{81}} = 8.33\right)$

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230-250}{8.33}\right) = P(Z \geq -2.4) = P(Z \leq 2.4) = 0.9918$$

Septiembre 2015 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

b) (1 punto) Determínese la matriz X tal que $B \cdot A \cdot X = C$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B| \cdot |C^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot \dfrac{1}{|C|} = \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{-15} = -\dfrac{1}{9}$

b) $B \cdot A \cdot X = C \implies \underbrace{(B \cdot A)^{-1} \cdot B \cdot A}_{I} \cdot X = (B \cdot A)^{-1} \cdot C \implies X = (B \cdot A)^{-1} \cdot C$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 5 & 19 \end{pmatrix} \implies (B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = (B \cdot A)^{-1} \cdot C = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 69 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 23/5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$y + 2x \geq 7 \quad \& \quad y - 2x \geq -1 \quad \& \quad y \leq 5$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x - 5y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones`: Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ y + 2x \geq 7 & \to (0, 7) \quad \& \quad (3.5, 0) \\ ② \ y - 2x \geq -1 & \to (0, -1) \quad \& \quad (0.5, 0) \\ ③ \ y \leq 5 & \to (0, 5) \end{cases}$$

- **Función objetivo**

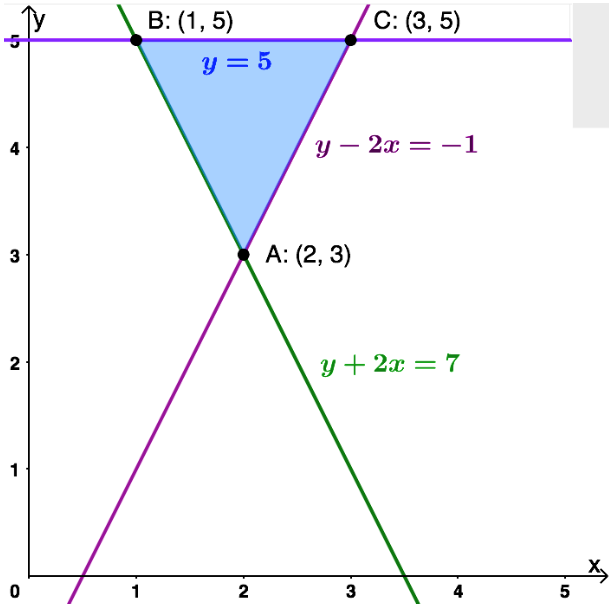
$$f(x,y) = -5x - 5y$$

- **Región factible** Representamos la región y calculamos los vértices.

- **Optimización de F.O.** Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	3	-25
B	1	5	-30
C	3	5	-40

El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -40 y se produce en el punto $C:(3,5)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de -25 y se produce en el punto $A:(2,3)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Se considera la función real de variable real $f(x) = e^{x^2}$.*
>
> *a) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
>
> *b) (1 punto) Determínense sus intervalos de concavidad y convexidad.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

a) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} = 0 \implies \begin{cases} 2x = 0 \implies x = 0 \\ e^{x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, 0)$ y *creciente* en $(0, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 1)$.

b) $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2} = (4x^2+2)\cdot e^{x^2} = 0 \implies \begin{cases} 4x^2 + 2 = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \\ e^{x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

$f''(x) = (4x^2+2)\cdot e^{x^2} > 0$, por lo que $f(x)$ es *convexa* $(\cup)$ en su dominio $(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Todos los estudiantes de una facultad de Madrid afirman haber comido en el último mes en alguna de las dos cafeterías de esa facultad, la grande y la pequeña. Un 60 % declara haber comido en la grande mientras que un 55 % declara haber comido en la pequeña. Calcúlese la probabilidad de que un estudiante de dicha facultad elegido al azar:

a) (1 punto) Haya comido en el último mes en la cafetería grande y en la pequeña.

b) (1 punto) Haya comido en el último mes en la cafetería pequeña si se sabe que nunca ha comido en la grande.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$G \equiv \text{“El estudiante ha comido en la cafetería grande en el último mes”}$$
$$P \equiv \text{“El estudiante ha comido en la cafetería pequeña en el último mes”}$$

$$P(G) = 0.6 \qquad \& \qquad P(P) = 0.55 \qquad \& \qquad P(G \cup P) = 1$$

a) $P(G \cap P) = P(G) + P(P) - P(G \cup P) = 0.6 + 0.55 - 1 = 0.15$

b) $P(P \mid \overline{G}) = \dfrac{P(P \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(P) - P(P \cap G)}{1 - P(G)} = \dfrac{0.55 - 0.15}{1 - 0.6} = 1$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La producción por hectárea, medida en kg/ha (kilogramos por hectárea) del olivar de alta densidad en cultivo intensivo de Córdoba se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 kg/ha.

a) *(1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 400 parcelas de una hectárea se ha obtenido (9917.75; 10082.25) como intervalo de confianza para la media μ, expresado en kg/ha. Determínese la media de la muestra y el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 98 % tenga de amplitud a lo sumo 50 kg/ha.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción del olivar } (kg/ha)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=400} I.C.(\mu) = (9917.75; 10082.25)$

$$\overline{x} = \frac{9917.75 + 10082.25}{2} = 10000$$

$$E = \frac{10082.25 - 9917.75}{2} = 82.25 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 82.25 \cdot \frac{\sqrt{400}}{1000}$$

$$z_{\alpha/2} = 1.645 \overset{Tabla}{\Longrightarrow} 1 - \alpha/2 = 0.95 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies \alpha = 0.1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0.9}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 50 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.98$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.325 \cdot \frac{1000}{\sqrt{n}} \leq 50 \implies n \geq \left(2 \cdot 2.325 \cdot \frac{1000}{50}\right)^2 = 8649$$

$$\implies \boxed{n = 8649}$$

Septiembre 2015 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + 3y - 2z = a \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase para los diferentes valores del parámetro* $a \in \mathbb{R}$.

b) *(1 punto) Resuélvase para* $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a - 1 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \implies \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ Solución).
- Si $a = 1 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot (-1 + 3\lambda) + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 3\lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 4 - 7\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & \text{si } x \le 0 \\ \ln(x+1) + m & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nota: ln *denota el logaritmo neperiano.*

a) *(1 punto) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.*

b) *(1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

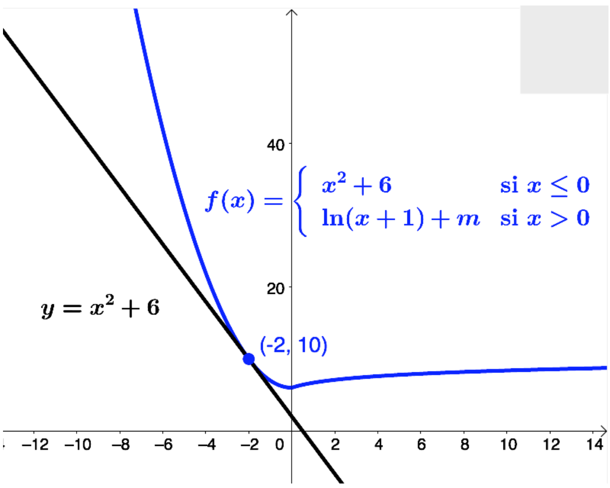
a) Continuidad en $x = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+6) = 6$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[\ln(x+1)+m] = m$
- $f(0) = 0^2 + 6 = 6$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \implies \boxed{m = 6}$

b) Hallamos la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$, teniendo en cuenta que en ese punto la función viene definida por $f(x) = x^2 + 6$.

$$x_0 = -2 \implies y_0 = f(x_0) = f(-2) = 10$$
$$\implies (x_0, y_0) = (-2, 10)$$
$$f'(x) = 2x$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(-2) = -4$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y - 10 = -4 \cdot (x + 2)$$
$$r \equiv y = -4x + 2$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real $f(x) = (2x+3)^5 + e^{2x}$

a) (1 punto) Cacúlese su función derivada.

b) (1 punto) Calcúlese $\int f(x)\,dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = 5 \cdot (2x+3)^4 \cdot 2 + 2e^{2x} = 10 \cdot (2x+3)^4 + 2e^{2x}$

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \left((2x+3)^5 + e^{2x}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{(2x+3)^5}_{u^5} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{e^u} dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2x+3)^6 + \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C = \frac{1}{12} \cdot \left[(2x+3)^6 + 6e^{2x}\right] + C$$

—————— ○ ——————

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una universidad de Madrid el 65 % del profesorado es funcionario. Por otro lado, el 60 % del profesorado son mujeres de las cuales el 70 % son funcionarias. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado tomado al azar:

a) (1 punto) Sea funcionario y hombre.

b) (1 punto) Sea mujer sabiendo que no es funcionario.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$F \equiv \text{“El miembro del profesorado es funcionario”}$$
$$M \equiv \text{“El miembro del profesorado es mujer”}$$

1ª Forma: Tabla de Contingencia

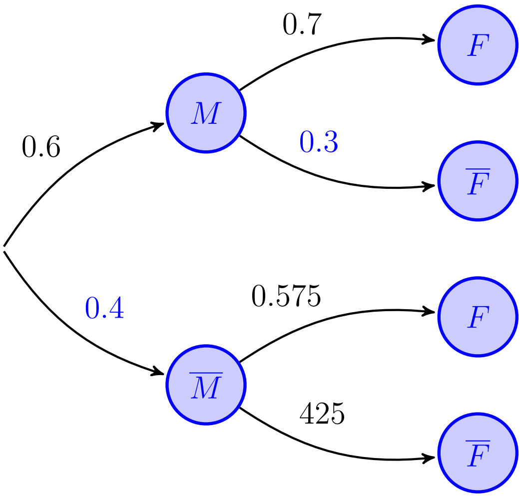
$$P(F \mid M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(F \cap M) = P(M) \cdot P(F \mid M) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$$

	F	$\overline{F}$	Total
M	0.42	0.18	0.6
$\overline{M}$	0.23	0.17	0.4
Total	0.65	0.35	1

a) $P(F \cap \overline{M}) = 0.23$

b) $P(M \mid \overline{F}) = \dfrac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0.18}{0.35} = 0.514$

$2^{\underline{a}}$ Forma: Diagrama de Arbol



$$\begin{aligned} P(F) &= P\Big((M\cap F)\cup(\overline{M}\cap F)\Big) \\ &= P(M\cap F) + P(\overline{M}\cap F) \\ &= P(M)\cdot P(F\mid M) + P(\overline{M})\cdot P(F\mid \overline{M}) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ 0.65 = 0.6\cdot 0.7 + 0.4\cdot P(F\mid\overline{M})$$

$$\Longrightarrow\ P(F\mid\overline{M}) = 0.575$$

a) $P(F\cap\overline{M}) = P(\overline{M})\cdot P(F\mid\overline{M})$
$$= 0.4\cdot 0.575 = 0.23$$

b) $P(M\mid\overline{F}) = \dfrac{P(M\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(M\cap\overline{F})}{1-P(F)}$
$$= \frac{0.6\cdot 0.3}{1-0.7} = 0.514$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) *(1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 50 de esas bolsas de patatas y la media de pesos de sus contenidos ha sido de $\overline{X} = 100$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.*

b) *(1 punto) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o iggual que 2625 gramos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de patatas (gr)”} \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=50} \overline{x} = 100$

$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{\textit{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645\cdot\dfrac{10}{\sqrt{50}} = 2.326$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E;\overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (97.674; 102.326)}$

b) $X : \mathcal{N}(10, 100) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(10, \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2\right) \qquad \& \qquad \overline{X} = \dfrac{2625}{25} = 105$

$\left(\overline{X} \le 105\right) = P\left(Z \le \dfrac{105-100}{2}\right) = P(Z \le 2.5) = 0.9938$

2016

Curso 2015/16

Modelo 2016
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determínese para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible A.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 0$ el sistema:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 + 10a - 24 = 0 \implies a = \{-12, 2\}$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-12, 2\}$

b) Para $a = 0 \neq \{-12, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{ran}A = 3 = \text{ran}A^* = \text{n}^{\text{o}}$ incognitas $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado. Y como se trata de un sistema homogéneo su solución es la trivial: $x = y = z = 0$.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Determínese la matriz X que verifica:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

Llamamos a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que nos queda la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{aligned} AX &= B - CX \\ AX + CX &= B \\ (A+C)X &= B \\ \underbrace{(A+C)^{-1} \cdot (A+C)}_{I} X &= (A+C)^{-1} \cdot B \\ X &= (A+C)^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

$$(A+C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A+C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A+C)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

a) *(1 punto) Estúdiense y determínense sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

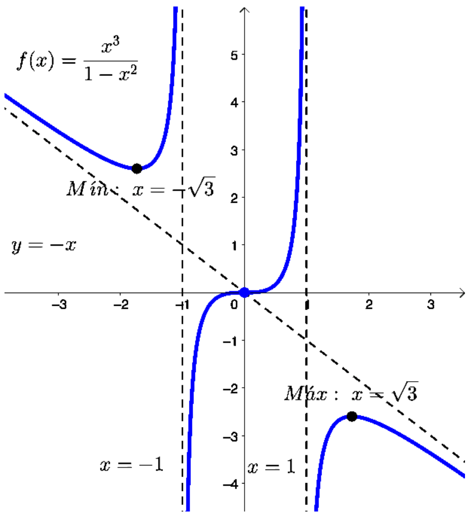
Solución.

a) ▪ `A. Vertical` Buscamos las A. verticales entre las raíces del denominador.

$$1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$



- `A. Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.
- `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x - x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} + x - \cancel{x^3}}{1-x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

Por lo que la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = -x$.

b) Hallamos los puntos singulares y calculamos el signo de $f'(x)$, con la precaución de tener en cuenta las raíces del denominador.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot (-x^2+3)}{(1-x^2)^2} = 0$$

$$x^2 \cdot (-x^2 + 3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 3 = 0 \implies x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, -1\right)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$\left(1, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$ y *decreciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right)$, un *máximo relativo* en $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right)$ y un *punto de inflexión con tangente horizontal* en $(0, 0)$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un polígono industrial se almacenan 30000 *latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en* 2016 *caducan* 1800 *latas de la fábrica A,* 2400 *procedentes de la B y* 3000 *que procede de la fábrica C.*

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.

b) (1 punto) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016*, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fabrica A?*

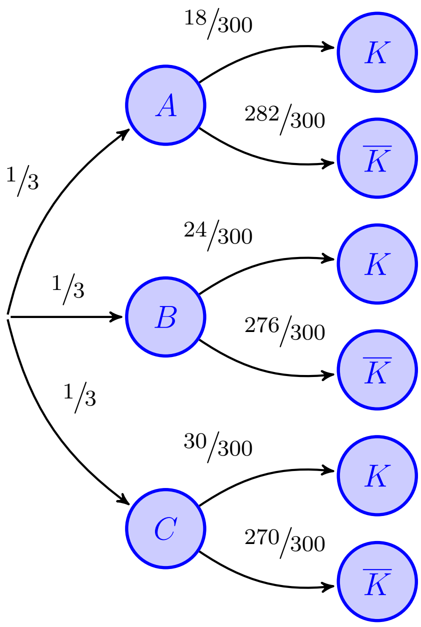
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La lata es de la fábrica A" $\qquad B \equiv$ "La lata es de la fábrica B"

$C \equiv$ "La lata es de la fábrica C" $\qquad K \equiv$ "La lata está caducada"



a)
$$\begin{aligned} P(K) &= P\big((A\cap K)\cup(B\cap K)\cup(C\cap K)\big)\\ &= P(A\cap K)+P(B\cap K)+P(C\cap K)\\ &= P(A)\cdot P(K\mid A)+P(B)\cdot P(K\mid B)\\ &+P(C)\cdot P(K\mid C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{300}\\ &+\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{300}+\frac{1}{3}\cdot\frac{30}{300}=0.24 \end{aligned}$$

b)
$$P(A\mid K)=\frac{P(A\cap K)}{P(K)}=\frac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)}$$
$$=\frac{1/3\cdot 18/300}{0.24}=0.25$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) *(1 punto) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 98 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90 %?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

$$x \equiv \text{"Tiempo dedicado a actividades deportivas (min)"}$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=250} \overline{x} = 90$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}} = 2.08$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (87.92; 92.08)}$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 1 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{20}{1}\right)^2 = 1082.4 \implies \boxed{n = 1083}$$

Modelo 2016
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+2y-3z=3 \\ 3x+ay-2z=5 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema en el caso $a=2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3+a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=2$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 3$

estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} x - 3 - (-1) = 1 \\ -y + (-1) = 2 \\ -z = 1 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & a & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 3 = 0 \\ \boxed{a = 3} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 2$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} x - (-1) + (-3) = 1 \\ -z = 1 \\ -y = 3 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ z = -1 \\ y = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

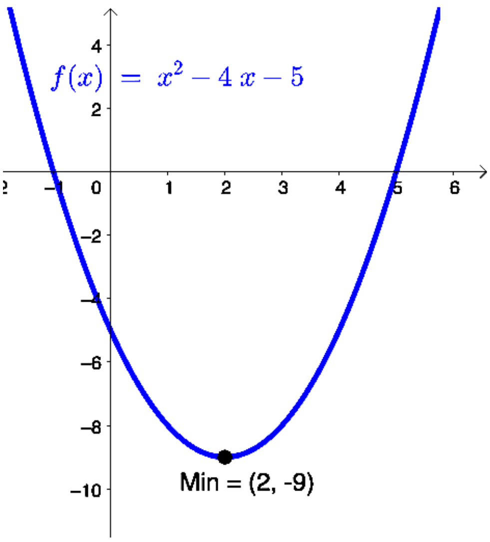
a) (1 punto) Represéntese gráficamente la función f.

b) (1 punto) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) Para representar la función hallaremos los puntos de corte con los ejes coordenados y los extremos relativos.



- Corte con los ejes:
  - Eje x: $y = 0$

    $$x^2 - 4x - 5 = 0 \implies \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$
  - Eje y: $x = 0 \implies y = f(0) = -5$
- Extremos relativos:

  $f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x = 2$

  $f''(x) = 2 > 0 \xrightarrow{(\cup)} Min(2, -9)$

b) Los puntos de corte con el eje OX son $x = -1$ y $x = 5$ lo que define un único recinto de integración $A_1 = (-1, 5)$

$$A_1 = \int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{5} (x^2 - 4x - 5)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x\Big]_{-1}^{5} = \left(\frac{125}{3} - 50 - 25\right)$$
$$- \left(-\frac{1}{3} - 2 + 5\right) = -\frac{100}{3} - \frac{8}{3} = -36$$

$Area = |A_1| = |-36| = 36\ u^2$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

a) *(1 punto) Calcúlese su función derivada.*

b) *(1 punto) Determínense sus intervalos de concavidad* ($\cap$) *y convexidad* ($\cup$).

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) = 2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2}(2x + 2x^3)$

b) $f''(x) = 2xe^{x^2}(2x + 2x^3) + e^{x^2}(2 + 6x^2) = e^{x^2}(4x^4 + 10x^2 + 2) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e^{x^2} = 0 \implies \nexists Sol. \\ 4x^4 + 10x^2 + 2 = 0 \implies \nexists Sol. \end{cases}$$

Por lo tanto no hay puntos de inflexión y, como $e^{x^2} > 0$ y $2x^4+10x^2+2 > 0$ entonces $f''(x) > 0$ luego la función $f(x)$ será *convexa* ($\cup$) en todo su dominio.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Las probabilidades de que cinco jugadores de baloncesto encesten un lanzamiento de tiro libre son, respectivamente, de 0.8*;* 0.9*;* 0.7*;* 0.9*;* 0.93*. Si cada jugador lanza un tiro libre siguiendo el orden anterior y considerando los resultados de los lanzamientos como sucesos independientes, calcúlese la probabilidad de que:*

a) *(1 punto) Todos los jugadores encesten su tiro libre.*

b) *(1 punto) Al menos uno de los tres primeros jugadores enceste.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos: $E_i \equiv$ "El jugador i encesta"

a) La probabilidad de que todos los jugadores encesten, teniendo en cuenta que son sucesos independientes será:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_5) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_5) = 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.93 = 0.4218$$

b) $$\begin{aligned} P(\text{"}Alguno\ enceste\text{"}) &= 1 - P(\text{"}Ninguno\ enceste\text{"}) = 1 - P\left(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}\right) \\ &= 1 - (0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3) = 0.994 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$ euros.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(2265.375; 2424.625)$ para μ, con un nivel de confianza del $95\,\%$. Calcúlese la media muestran y el tamaño de la muestra elegida.*

b) *(1 punto) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del $99\,\%$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95 \quad \& \quad I.C. = (2265.375; 2424.625)$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x} - E = 2265.375 \\ \overline{x} + E = 2424.625 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{2265.375 + 2424.625}{2} = 2345 \\ E = \dfrac{2424.625 - 2265.375}{2} = 79.625 \end{cases}$$

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.05 \Longrightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \Longrightarrow 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{650}{\sqrt{n}} = 79.625 \Longrightarrow n = \left(1.96 \cdot \frac{650}{79.625}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{n = 256}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad n = 225 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \Longrightarrow \alpha = 0.01 \Longrightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.005 \Longrightarrow 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{650}{\sqrt{225}} = 111.58$$

Junio 2016
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^{\top} \cdot A^{-1}$*

b) *(1 punto) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?*

Nota: $C^{\top}$ *denota la matriz traspuesta de la matriz C.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a) $\left|A \cdot C \cdot C^{\top} \cdot A^{-1}\right| \overset{\odot}{=} |A| \cdot |C| \cdot \left|C^{\top}\right| \cdot |A^{-1}| \overset{\circledast}{=} \cancel{|A|} \cdot |C| \cdot |C| \cdot \dfrac{1}{\cancel{|A|}} = |C|^2 = 2^2 = 4$

$\odot$ $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$\circledast$ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \qquad \& \qquad \left|C^{\top}\right| = |C|$

b) $M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$

Como la matriz M no es cuadrada no es invertible ($\nexists\, A^{-1}$).

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5 \qquad \& \qquad y - x \leq 3 \qquad \& \qquad \frac{1}{2}x - y \leq -2$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

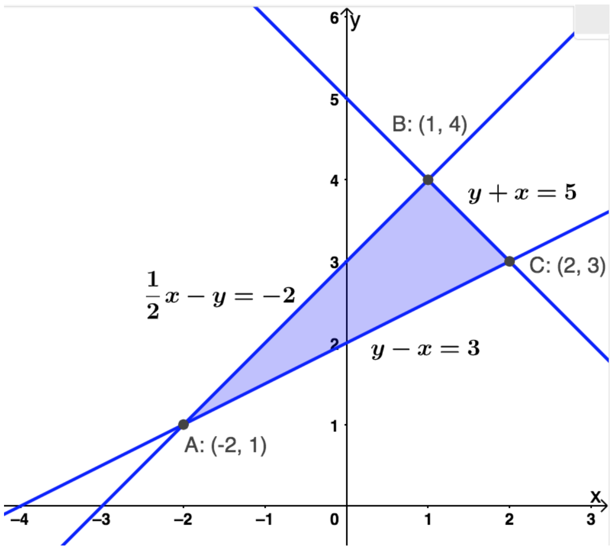
Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} \text{①}\ y + x \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ \text{②}\ y - x \leq 3 & \rightarrow (0,3) \quad \& \quad (-3,0) \\ \text{③}\ \frac{1}{2}x - y \leq -2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-4,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	-2	1	-3
B	1	4	6
C	2	3	7

El *mínimo* de la función es de -3 y se produce en el punto $A(-2, 1)$.
El *máximo* es de 7 y se produce en el punto $C(2, 3)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 8$$

a) *(1 punto) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.*

b) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$x^3 + 8 = 0 \implies x = \sqrt[3]{-8} \implies x = -2$$

Lo que delimita dos recintos de integración: $A_1 = (-3, -2)$ y $A_2 = (-2, -1)$

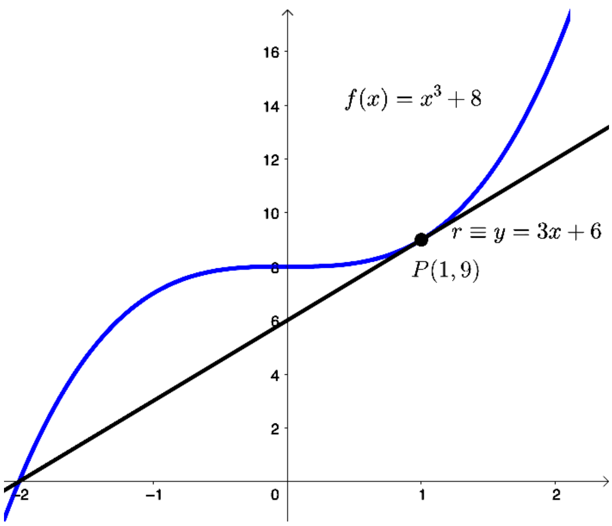
$$A_1 = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} \left(x^3 + 8\right)dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-3}^{-2} = \left(\frac{81}{4} - 24\right) - (4 - 16) = -\frac{33}{4}$$

$$A_2 = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{-1} = (-12) - \left(\frac{1}{4} - 8\right) = -\frac{17}{4}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{33}{4} + \frac{17}{4} = \frac{25}{2}\ u^2$$

b) Recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$

$$x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 9$$
$$\implies (x_0, y_0) = (1, 9)$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 3$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r(x - x_0)$$
$$y - 9 = 3 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = 3x + 6$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) (1 punto) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) (1 punto) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} H &\equiv \text{"El músico es varón"} \\ M &\equiv \text{"El músico es mujer"} \\ C &\equiv \text{"El instrumento interpretado es de cuerda"} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(H) = 0.55 \quad \& \quad P(M) = 0.45 \quad \& \quad P(C) = 0.3 \quad \& \quad P(C \mid M) = 0.25$$

a) $P(C \mid M) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(C \cap M)}{0.45} = 0.25 \implies P(C \cap M) = 0.25 \cdot 0.45 = 0.1125$

$P(M \mid C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0.1125}{0.3} = 0.375$

b) $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap M)$

$P(C \cap H) = P(C) - P(C \cap M) = 0.3 - 0.1125 = 0.1875$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.*

b) *(1 punto) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas $\overline{X}$ sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción diaria de leche } (\ell)\text{”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 30)$$

a) $n = ?$ $\qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95 \qquad \& \qquad 2E \leq 10$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2E \leq 10 \Rightarrow 2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{50}{10}\right)^2 = 384.16 \Rightarrow \boxed{n = 385}$$

b) $X : \mathcal{N}(950, 50) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(950, \dfrac{50}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}(950, 10)$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{940-950}{10}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Junio 2016
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 4 - 2a = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$

estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - \frac{1}{2} = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/2 \\ y = 1/4 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[C_2 \leftrightarrow C_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2a-4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow 2a - 4 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \square & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compat. Determinado
- Si $a = 2 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{rl} \Rightarrow x - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/2 \\ y = 1/4 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+b}{x-2} & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x=-1$.

b) (1 punto) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x+b}{x-2} = \dfrac{1+b}{-3}$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}\cdot(x+5)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x+3)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+5}{x+3} = 2$

$f(-1) = \dfrac{1+b}{-3}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=-1 \implies \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

$\implies \dfrac{1+b}{-3} = 2 \implies \boxed{b=-7}$

b)

- `A. Vertical` Buscamos las A. Verticales entre las raíces del denominador.

$$x-2=0 \implies \cancel{x=2} > -1$$

$$x^2+4x+3=0 \implies \begin{cases} x=-1 \\ \cancel{x=-3} < -1 \end{cases}$$

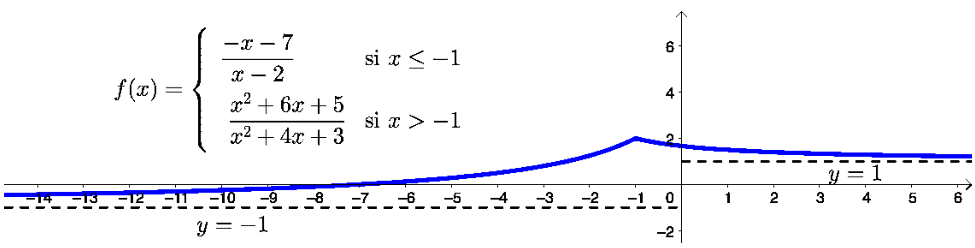
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x+5)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x+3)} = 2 \Rightarrow \nexists\ A.V.$$

- `A. Horizontal`

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x+b}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+b}{-x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1 \Rightarrow \underset{x\to -\infty}{A.H.} \text{ en } y=-1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1 \Rightarrow \underset{x\to +\infty}{A.H.} \text{ en } y=1$$

- `A. Oblicua` Como hay $A.H. \implies \nexists\ A.O.$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$$

a) (1 punto) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

b) (1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

a) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(6x^2 + 4x - 2\right) dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$

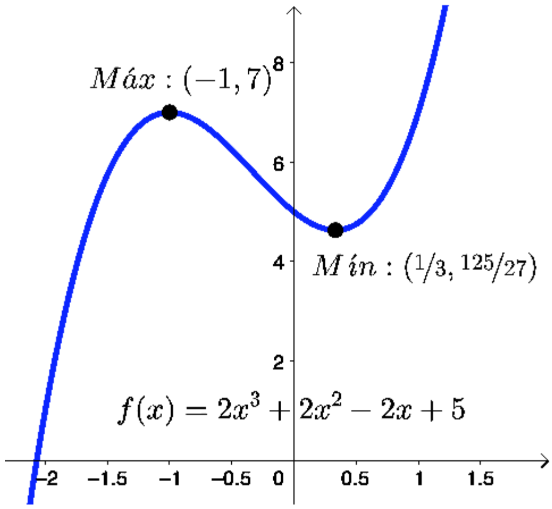
$f(0) = 5 \implies C = 5 \implies f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$

b) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2 = 0 \implies x = \{-1, 1/3\}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1/3, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1/3)$ y tiene un *máximo relativo* en $(-1, 7)$ y un *mínimo realtivo* en $(1/3, 125/27)$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) La segunda bola extraída sea roja.

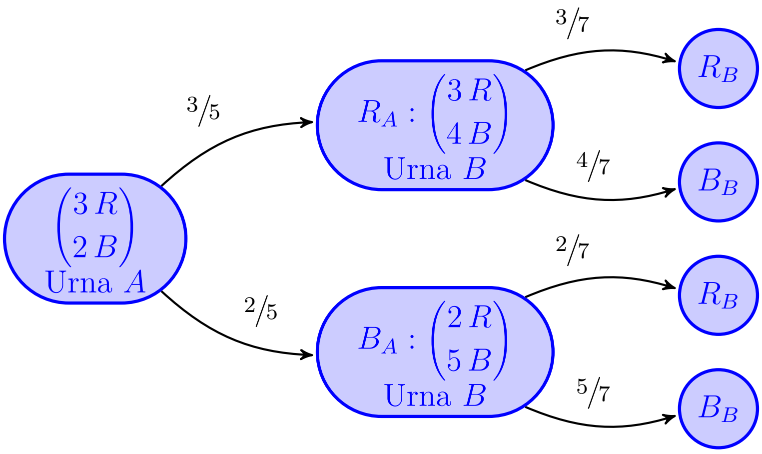
b) (1 punto) las dos bolas extraídas sean blancas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Se extrae una bola roja de la urna } i\text{”}$$
$$B_i \equiv \text{“Se extrae una bola blanca de la urna } i\text{”}$$



a) $P(R_B) = P\big((R_A \cap R_B) \cup (B_A \cap R_B)\big) = P(R_A \cap R_B) + P(B_A \cap R_B)$

$$= P(R_A) \cdot P(R_B \mid R_A) + P(B_A) \cdot P(R_B \mid B_A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0.371$$

b) $P(B_A \cap B_B) = P(B_A) \cdot P(B_B \mid B_A) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7} = 0.286$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) *(1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{x} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de la gamba Palamós (g)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 70$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (68.04; 71.96)}$$

b) $X : \mathcal{N}(70, 5) \xrightarrow{n=12} \overline{X} : \mathcal{N}\left(70, \dfrac{5}{\sqrt{12}}\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq \frac{855}{12}\right) = P\left(\overline{X} \geq 71.25\right) = P\left(Z \geq \frac{71.25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P(Z \geq 0.87)$$
$$= 1 - P(Z < 0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922$$

Junio 2016
Opción A (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente de $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + y + az = a - 2 \\ ax - y + z = a - 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase para los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = \{-2, 2\}$$

- Si $a \neq \{-2, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq$ nº incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-2, 2\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 3x + 1 = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 1 = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 8z = -8 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 & a-2 \\ 1 & 3 & a & a-2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 3 & 2a-4 \\ 0 & 5 & 2a-1 & 2a-4 \end{array}\right) \overset{a \neq -1/2}{\sim} \left[\begin{array}{c} \\ \\ (2a+1)F_3 - 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 3 & 2a-4 \\ 0 & 0 & 4a^2 - 16 & 4 \cdot (a-2)^2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 - 16 = 0 \\ \boxed{a = \pm 2} \end{array} \right.$$

- Si $a = -1/2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \square & 3 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $a = -2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

- Si $a = 2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_2$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow y$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2y + -1 - 1 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 3 \cdot (-1) = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -16z = 16 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} y = 1 \\ x = -1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + 4$$

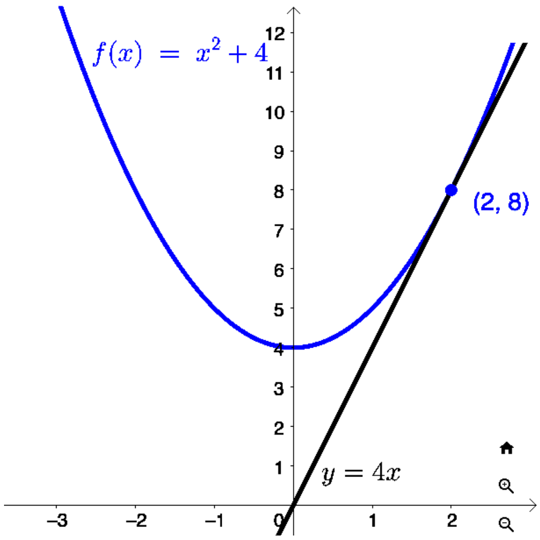
a) *(1 punto) Escríbase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.*

b) *(1 punto) Determínese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, la recta $y = 4x$ y el eje de ordenadas.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

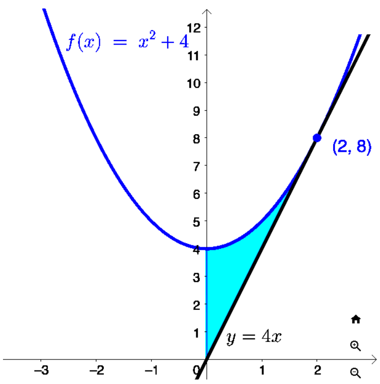
a) Hallamos la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.



$$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(2) = 8$$
$$\implies (x_0, y_0) = (2, 8)$$
$$f'(x) = 2x$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(2) = 4$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y - 8 = 4 \cdot (x - 2)$$
$$r \equiv y = 4x$$

b) Area comprendida entre $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = 4x$ y el eje de ordenadas $(x = 0)$

- Definimos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 4$
- Hallamos el área comprendida entre $h(x)$, el eje de abscisas y $x = 0$.
  - Corte con el eje OX: $x^2 - 4x + 4 = 0 \implies x = 2$
  - Lo que define un recinto de integración $A_1 = (0.2)$



$$A_1 = \int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - 0 = \frac{8}{3}$$
$$Area = |A_1| = \frac{8}{3} = 2.67\ u^2$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Dada la función real de variable real:*
>
> $$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$
>
> *a) (1 punto) Determínense las asíntotas de $f(x)$.*
>
> *b) (1 punto) Determínense los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

a)
- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx+n$

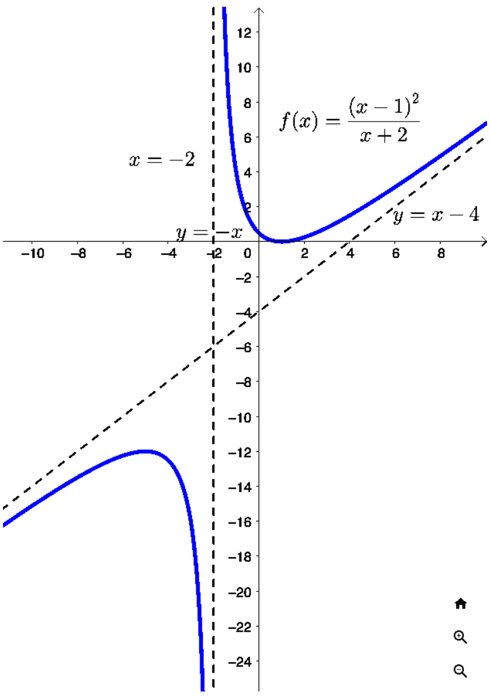
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x)-mx\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{(x-1)^2}{x+2} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x+1}{x+2}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -4$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x-4$.



b) Calculamos los puntos singulares

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+2) - (x-1)^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x-2)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow x^2+4x-5=0 \Longrightarrow x = \begin{cases} x=-5 \\ x=1 \end{cases}$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$ y *decreciente* en $(-5,1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1,0)$ y un *máximo relativo* en $(-5,-12)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0.5$ y $P\left(\overline{B}\right)=0.8$. Calcúlese:

a) (1 punto) $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$.

b) (1 punto) $P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $P(A\cap B)\overset{A\ y\ B}{\underset{ind.}{=}}P(A)\cdot P(B)=P(A)\cdot\left[1-P(\overline{B})\right]=0.5\cdot(1-0.8)=0.1$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+(1-0.8)-0.1=0.6$

b) $P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(\overline{B})}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{P(\overline{B})}=\dfrac{1-0.6}{1-0.8}=0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos kg de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0.60$ kg.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{x} = 3.250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0.2 kg.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los recién nacidos (kg)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 0.6)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.6) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3.25$

$$1-\alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1-\alpha/2 = 0.99 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{100}} = 0.1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (3.1105; 3.3895)}$$

b) $n = ?$ $\quad \& \quad 1-\alpha = 95\,\%$ $\quad \& \quad E \leq 0.2$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.6}{0.2}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

Junio 2016
Opción B (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo a un número real

a) *(1 punto) Determínese a para que la matriz admita inversa.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, determínese la matriz X que verifica $A \cdot X + A = Id$*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = -a^2 + 2a = a \cdot (2 - a) = 0 \implies a = \{0, 2\}$, luego $\exists\, A^{-1}\ \forall a \neq \{0, 2\}$

b) Para $a = 1$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 1 \cdot (2 - 1) = 1$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X + A = I \implies A \cdot X = I - A \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (I - A) \implies X = A^{-1} \cdot (I - A)$$

$$X = A^{-1} \cdot (I - A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por

$$x + y \leq 5 \quad \& \quad 2x - y \geq -2 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 1$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = 2x - 3y$ en la región S indicando los punots de S en los que se alcanzan dichos valores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones

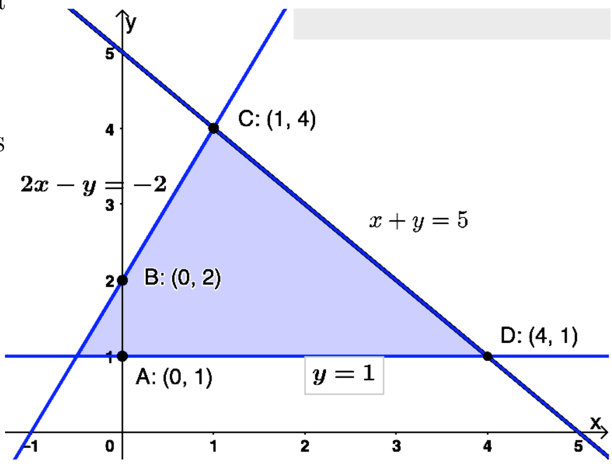
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; 2x - y \geq -2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-1,0) \\ ③ \; x \geq 0 & \rightarrow (0,0) \\ ④ \; y \geq 1 & \rightarrow (0,1) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 2x - 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	1	-3
B	0	2	-6
C	1	4	-10
D	4	1	5



El *mínimo* de la función $f(x,y)$ es de -10 y se produce en el punto $C : (1,4)$.
El *máximo* de la función $f(x,y)$ es de 5 y se produce en el punto $D : (4,1)$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$$

a) *(1 punto) Determínense los valores de los parámetros reales a y b si se sabe que la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.*

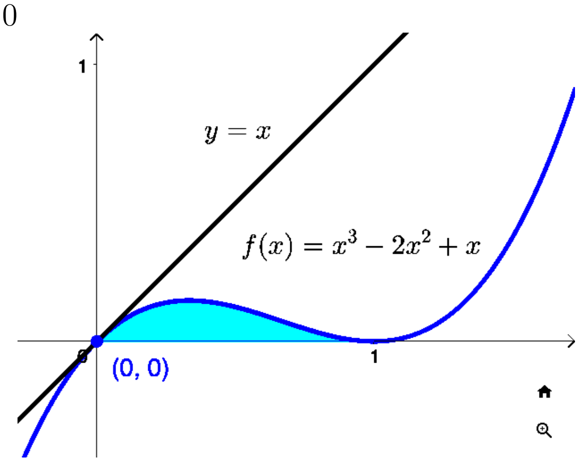
b) *(1 punto) Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Hallamos la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ y la igualamos a $y = x$

$$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = b$$
$$\implies (x_0, y_0) = (0, b)$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + a$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = a$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y - b = a \cdot (x - 0)$$
$$\left.\begin{array}{l} r \equiv y = ax + b \\ r \equiv y = x \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array}}$$



b) Hallamos los puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ con el eje OX

$$x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lo que define el recinto de integración $A_1 = (0.1)$

$$A_1 = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{12}$$

$$Area = |A_1| = \frac{1}{12} = 0.0833\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:

a) (1 punto) Padezca albinismo.

b) (1 punto) Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.

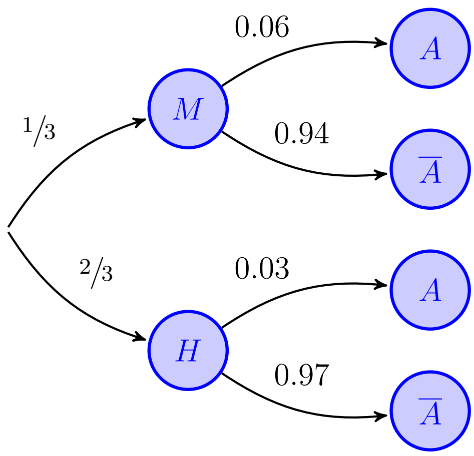
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“El individuo es macho”}$$
$$H \equiv \text{“El individuo es hembra”}$$
$$A \equiv \text{“El individuo es albino”}$$

$$\left.\begin{aligned} P(H) &= 2 \cdot P(M) \\ P(H) + P(M) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2P(M) + P(M) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} P(M) = 1/3 \\ P(H) = 2/3 \end{cases}$$



a) $P(A) = P\big((M \cap A) \cup (H \cap A)\big)$
$= P(M \cap A) + P(H \cap A)$
$= P(M) \cdot P(A \mid M) + P(H) \cdot P(A \mid H)$
$= \dfrac{1}{3} \cdot 0.06 + \dfrac{2}{3} \cdot 0.03 = 0.04$

b) $P(H \mid A) = \dfrac{P(H \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(H) \cdot P(A \mid H)}{P(A)}$
$= \dfrac{2/3 \cdot 0.03}{0.04} = 0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza $(159; 165)$. Determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.*

b) *(1 punto) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrido (km)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=81} I.C. = (159; 165)$

$$\overline{x} = \frac{159 + 165}{2} = 162$$

$$E = \frac{165 - 159}{2} = 3 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} = 3 \implies z_{\alpha/2} = 1.6875$$

$$z_{\alpha/2} = 1.69 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9545 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0455 \Rightarrow \alpha = 0.091 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.909}$$

b) $X : \mathcal{N}(160, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(160, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(160, 2)$

$$P(\overline{X} > 156) = P\left(Z > \frac{156 - 160}{2}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$$

Septiembre 2016
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Estúdiese para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Determínese, para $k = 1$, la matriz X tal que $X \cdot A = Id$.

Nota: Id denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = k^3 + k^2 - 6k = k \cdot (k^2 + k - 6) = 0 \Rightarrow k = \{-3, 0, 2\} \Rightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall k \neq \{-3, 0, 2\}$

b) $X \cdot A = I \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = I \cdot A^{-1} \implies X = A^{-1}$

Para $k = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1 \cdot (1^2 + 1 - 6) = -4$

$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ & $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (**2** ***puntos***)

Sea S la región del plano definida por:

$$2x - y \geq 1 \quad \& \quad 2x - 3y \leq 6 \quad \& \quad x + 2y \geq 3 \quad \& \quad x + y \leq 8 \quad \& \quad y \leq 3$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

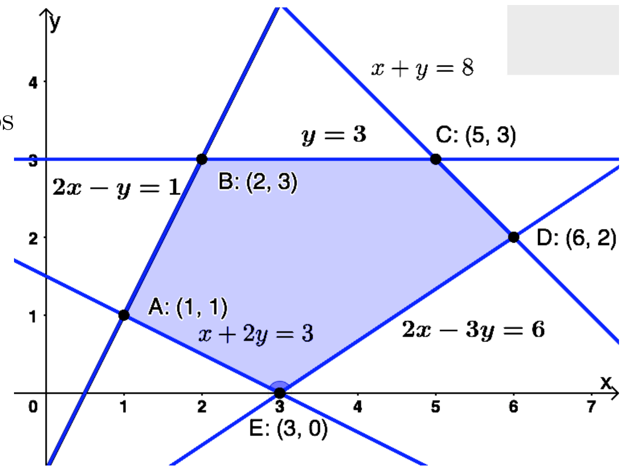
Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 2x - y \geq 1 & \to (0, -1) \quad \& \quad (1/2, 0) \\ ② \ 2x - 3y \leq 6 & \to (0, -2) \quad \& \quad (3, 400) \\ ③ \ x + 2y \geq 3 & \to (0, 3/2) \quad \& \quad (3, 0) \\ ④ \ x + y \leq 8 & \to (0, 8) \quad \& \quad (8, 0) \\ ④ \ y \leq 3 & \to (0.3) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 3x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	1	1	3
B	2	3	7
C	5	3	13
D	6	2	14
E	3	0	6

El valor *máximo* de la función objetivo se producen en el punto $D(6, 2)$ y vale 14, mientras que el *mínimo* se produce en el punto $A(1, 1)$ y vale 3.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x<1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & si\ 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & si\ x>2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=1$ y $x=2$.

b) (1 punto) Calcúlese, para $a=4$ y $b=-2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ax+b}{x} = a+b \\ f(1) = a+b \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} f(x) \text{ es continua en } x=1 \text{ si:} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ a+b=2 \end{array}\right.$$

- Si $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{ax+b}{x} = \dfrac{2a+b}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^3+1} = 3 \\ f(2) = \dfrac{2a+b}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} f(x) \text{ es continua en } x=1 \text{ si:} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \\ \dfrac{2a+b}{2} = 3 \Longrightarrow 2a+b=6 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a=4 \\ b=-2 \end{array}}$$

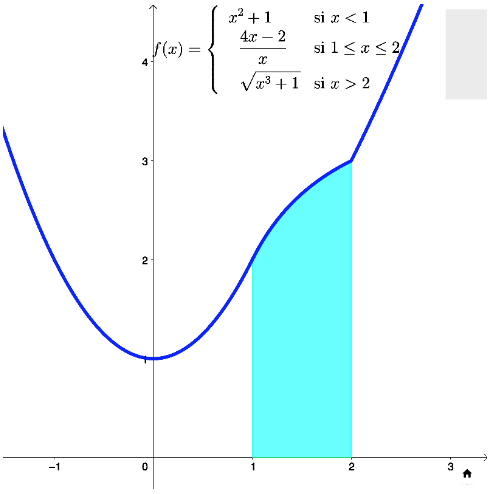
b) Para $a=4$ y $b=-2$, la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{4x-2}{x} & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si } x>2 \end{cases}$

Hallamos los puntos de corte de $f_2(x) = \dfrac{4x-2}{x}$ con el eje OX.

$$\frac{4x-2}{x} = 0 \Longrightarrow 4x-2=0 \Longrightarrow \cancel{x = \frac{1}{2}} < 1$$

Lo que define un único recinto de integración $A_1 = (1,2)$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_1^2 f_2(x)\,dx = \int_1^2 \frac{4x-2}{x}\,dx \\
&= \int_1^2 \left(4 - \frac{2}{x}\right) dx = 4x - 2\ln x\Big]_1^2 \\
&= (8 - 2\ln 2) - \left(4 - 2\cancel{\ln 1}\right)^1 \\
&= 4 - \ln 4 = 2.6137 \\
Area &= |A_1| = 4 - \ln 4 = 2.6137\ u^2
\end{aligned}
$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4} \qquad \& \qquad P(A \mid B) = \frac{3}{4} \qquad \& \qquad P(B \mid A) = \frac{1}{4}$$

a) (1 punto) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) (1 punto) Calcúlese $P\left(\overline{A} \mid \overline{B}\right)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a) $$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4} \implies P(A\cap B) = \frac{3}{16}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{3/16}{P(B)} = \frac{3}{4} \implies P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) = \dfrac{3}{16} \\ P(A)\cdot P(B) = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son indep.} \\ P(A\cap B) \neq 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ no son incompatibles.} \end{array}\right.$$

b) $$P\left(\overline{A} \mid \overline{B}\right) = \frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P(\overline{B})} = \frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{1-P(B)} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$= \frac{1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]}{1-P(B)} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{x} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud al lo sumo de 10 minutos?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en regresar a casa (minutos)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 30$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{64}} = 1.225$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Rightarrow \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (28.775; 31.225)}$

b) $n = ?$ & $1 - \alpha = 0.99$ & $2E \leq 10$

$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.005 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.575 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow n \geq \left(2 \cdot 2.575 \cdot \dfrac{5}{10}\right)^2 = 6.63 \Rightarrow \boxed{n = 7}$

Septiembre 2016
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} (a-1)x+y+z=1 \\ x+(a-1)y+(a-1)z=1 \\ x+az=1 \end{aligned}\right\}$$

a) *(1 punto) Discútase el sistema según los valores de a.*

b) *(1 punto) Resuélvase el sistema para $a=3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - 2a^2 = a^2 \cdot (a-2) = 0 \implies a = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos antes un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 3F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y + 3 \cdot \frac{2}{9} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 18z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1/3 \\ y = 1/9 \\ z = 2/9 \end{array}}$$

Método de Gauss

Debido al gran número de parámetros que tiene el sistema no merece la pena realizar la discusión por el Método de Gauss pues es fácil cometer errores.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función.

b) (1 punto) Determínense los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscsa $x = a$ es $m = -2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

a) `Continuidad de` $f(x)$

- Si $x < 0$, $f(x) = x^2 + 2x$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio.
- Si $x > 0$, $f(x) = -x^2 + 3x$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2x\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2+3x\right) = 0$
- $f(0) = 0$

  Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, la función es continua en $x = 0$.

Por tanto la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

`Derivabilidad de` $f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ -2x+3 & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} f'(0^-)=2 \\ f'(0^+)=3 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\| \begin{matrix} f'(0^-)\neq f'(0^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x=0 \end{matrix} \right.$$

Luego $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) $m_r = f'(a) = -2 \implies f'(a) = \begin{cases} 2a+2=-2 & \implies a=-2<0\ \checkmark \\ -2a+3=-2 & \implies a={}^5\!/\!_2>0\ \checkmark \end{cases}$

$x_0 = -2 \implies y_0 = f(x_0) = f(-2) = 0$

$\implies (x_0, y_0) = (-2, 0)$

$m_r = -2$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - 0 = -2\cdot(x+2)$

$r \equiv y = -2x - 4$

$x_0 = {}^5\!/\!_2 \implies y_0 = f(x_0) = f({}^5\!/\!_2) = {}^5\!/\!_4$

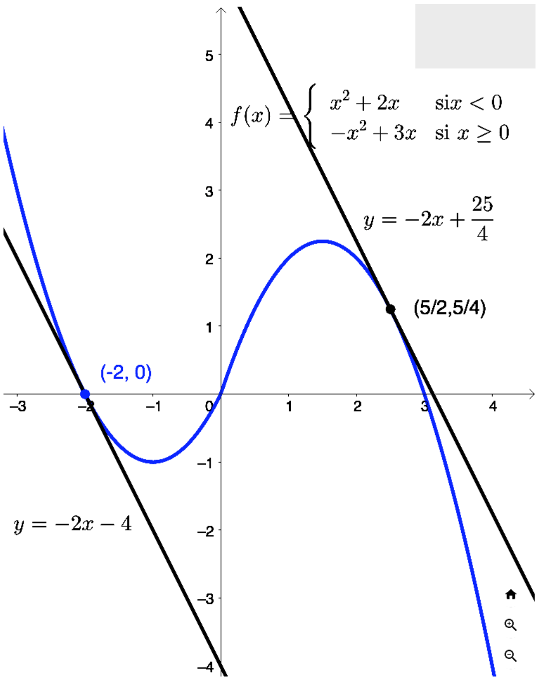
$\implies (x_0, y_0) = ({}^5\!/\!_2, {}^5\!/\!_4)$

$m_r = -2$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - \dfrac{5}{4} = -2\cdot(x - \dfrac{5}{2})$

$r \equiv y = -2x + \dfrac{25}{4}$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-9}$$

a) (1 punto) Calcúlense sus asíntotas.

b) (1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

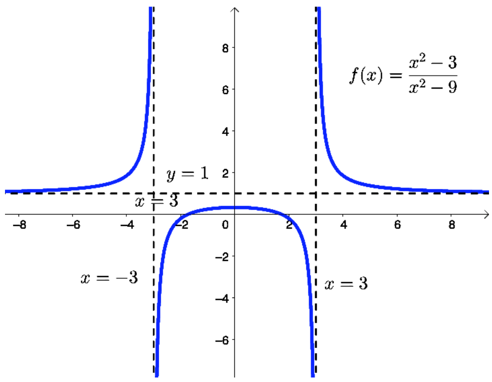
Solución.

a)

- `A. Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1 \implies \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y=1$
- `A. Oblicua` Como $\exists A.H. \implies \nexists A.O.$
- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador $x^2-9=0 \implies x=\pm 3$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{9}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



b) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-9)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-12x}{(x^2-9)^2} = 0 \implies -12x = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$+$	-	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ y *decreciente* en $(0,3)\cup(3,+\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(0, 1/3)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El $65\,\%$ de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un $5\,\%$ de los casos, mientas que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un $8\,\%$ de los casos. Calcúlese la probabildad de que:

a) (1 punto) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

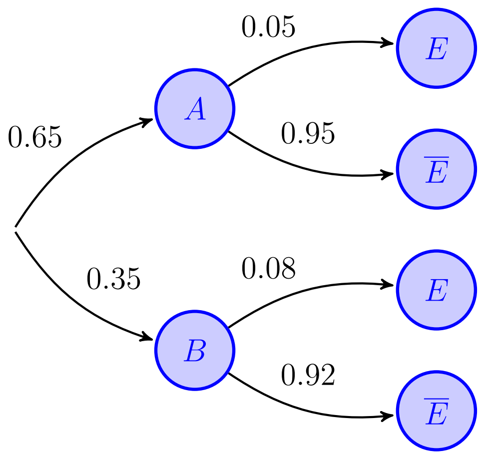
b) (1 punto) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El escáner utilizado es el A”}$$
$$B \equiv \text{“El escáner utilizado es el B”}$$
$$E \equiv \text{“El diagnóstico efectuado es erróneo”}$$



a) $$\begin{aligned} P(E) &= \big(P(A\cap E)\cup(B\cap E)\big) \\ &= P(A\cap E) + P(B\cap E) \\ &= P(A)\cdot P(E\mid A) + P(B)\cdot P(E\mid B) \\ &= 0.65\cdot 0.05 + 0.35\cdot 0.08 = 0.0605 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A\mid E) &= \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)\cdot P(E\mid A)}{P(E)} \\ &= \frac{0.65\cdot 0.05}{0.0605} = 0.537 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\overline{x} = 8.1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para μ.*

b) *(1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(7.766; 10.233)$ para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Antiüedad de socio (meses)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 9)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 8.1$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1.48$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (6.62; 9.58)}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=144} I.C.(7.766; 10.233)$

$$\overline{x} = \frac{7.766 + 10.233}{2} = 8.9995$$

$$E = \frac{10.233 - 7.766}{2} = 1.2335 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{9}{\sqrt{144}} = 1.2335 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$z_{\alpha/2} = 1.645 \xRightarrow{Tabla} 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies \alpha = 0.1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0.9}$$

2017

Curso 2016/17

Junio 2017
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$\mid A \mid = 2 - 2k^2 = 0 \implies k = \pm 1$$

- Si $k \neq \{-1, 1\} \implies \exists\, A^{-1}$
- Si $k = \{-1, 1\} \implies \nexists\, A^{-1}$

b) Para $k = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 2 - 2 \cdot 0^2 = 2$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = B$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\, X = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+6y \geq 6\,;\ 5x-2y \geq -2\,;\ x+3y \leq 20\,;\ 2x-y \leq 12\right\}$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 4x-3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x,y)$ en dichos puntos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

- `Función objetivo`

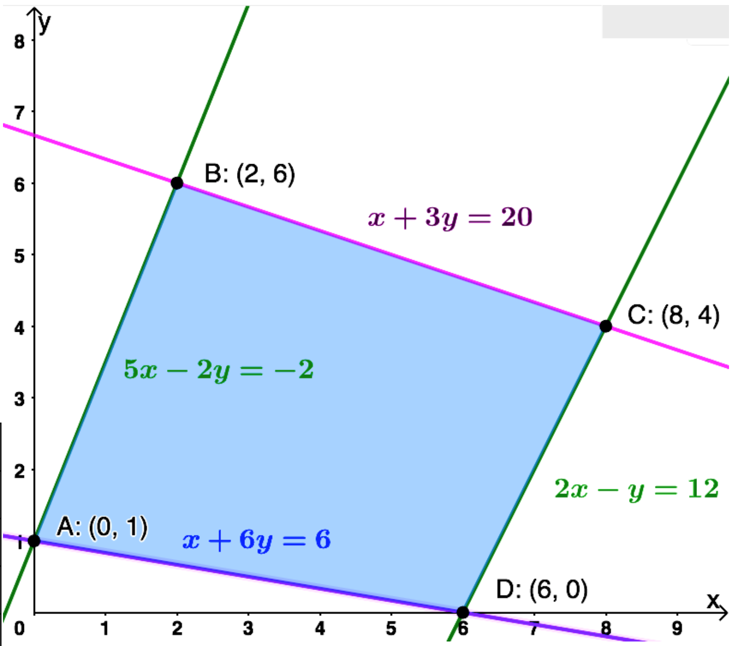
$$f(x,y) = 4x-3y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \ x+6y \geq 6 & \to (0,1) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \ 5x-2y \geq -2 & \to (0,1) \quad \& \quad (-0.4,0) \\ ③ \ x+3y \leq 20 & \to (0,{}^{20}\!/_{3}) \quad \& \quad (20,0) \\ ④ \ 2x-y \leq 12 & \to (0,-12) \quad \& \quad (6,0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	0	24
B	0	1	-3
C	2	6	-10
D	8	4	20

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $A(6,0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $C(2,6)$ y vale -10.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) (1 punto) Determínese el valor de la derivada de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

b) (1 punto) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x) - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{e^x(1+x-1)}{(1+x)^2} = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2} \Longrightarrow f'(0) = 0$

b)

- `A.Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$
- `A.Oblícua` Sea la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x - x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0.01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0.05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0.12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) (1 punto) Se estropee.

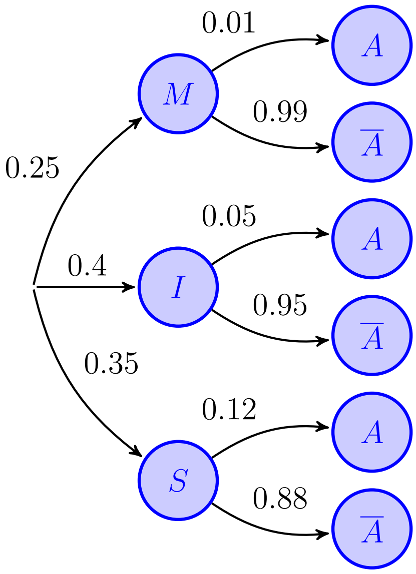
b) (1 punto) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

$M \equiv$ Antigüedad < 2 años $\qquad I \equiv 2 <$ Antigüedad < 4 años

$S \equiv$ Antigüedad > 4 años $\qquad E \equiv$ La furgoneta se estropea



a) $$P(E) = P\Big((M \cap E) \cup (I \cap E) \cup (S \cap E)\Big)$$
$$= P(M \cap E) + P(I \cap E) + P(S \cap E)$$
$$= P(M) \cdot P(E \mid M) + P(I) \cdot P(E \mid I)$$
$$+ P(S) \cdot P(E \mid S) = 0.25 \cdot 0.01$$
$$+ 0.4 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.12 = 0.0645$$

b) $$P(S \mid \overline{E}) = \frac{P(S \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(S) \cdot P(\overline{E} \mid S)}{1 - P(E)}$$
$$= \frac{0.35 \cdot 0.88}{1 - 0.0645} = 0.329$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0.9 kg.

a) (1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\overline{X} = 7.8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99.2 % para μ.

b) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0.2 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 0.9) \quad \xrightarrow{n=324} \quad \overline{X} = 7.8$$

$$1-\alpha = 0.992 \implies \alpha = 0.008 \implies \alpha/2 = 0.004 \implies 1-\alpha/2 = 0.996 \implies z_{\alpha/2} = 2.65$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.65 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{324}} = 0.1325$$

$$I.C._{99.2\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99.2\,\%}(\mu) = (7.67, 7.93)}$$

b) $$X : \mathcal{N}(\mu, 0.9) \quad \xrightarrow{n=?} \quad 2E = 0.2$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2E \leq 0.2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.9}{0.2}\right)^2$$

$$\implies n \geq 311.17 \implies \boxed{n = 312}$$

Junio 2017
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - ay + 2z & = & 0 \\ ax - 4y - 4z & = & 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) *(1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -6a^2 + 6a + 36 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-2, 3\}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$).

- Si $a = -2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 - 3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{r} x - 6\lambda + 2\lambda = 0 \\ 5y - 10t = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \quad , \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

a) *(1 punto) Calcúlense* $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{1 - x^3}$ *y* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) *(1 punto) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

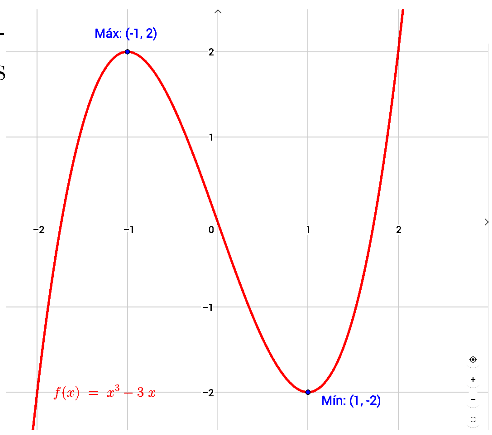
a) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{1 - x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - 3x}{1 - x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^3 + 3x}{1 + x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 3)}{\cancel{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} (x^2 - 3) = -3$$

a) Para estudiar el crecimiento de la función hallamos los puntos singulares de la misma y hacemos un estudio del sigo de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$



Luego $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1)$ y tiene un *máximo* en $(-1, 2)$ y un *mínimo* en $(1, -2)$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+2} & si\ x \leq 0 \\ x+2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

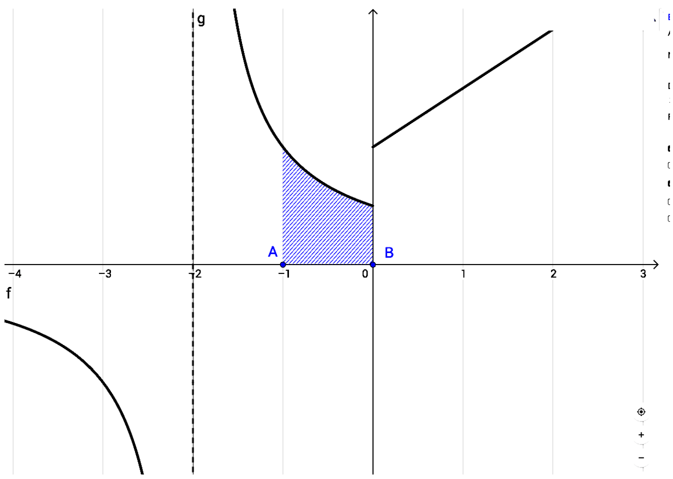
a)
- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- Si $x > 0$, $f(x) = x+2$, que es contínua por ser un polinomio.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x+2} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x+2 = 2$
  - $f(0) = \dfrac{2}{0+2} = 1$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = 0$, donde existe una discontinuidad de salto finito.

Por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) Para el cálculo de la integral tenemos que determinar cuál es expresión de $f(x)$ entre los límites de integración $x = -1$ y $x = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} f(x)\,dx. &= \int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2}\,dx \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= 2\ln|x+2|\Big]_{-1}^{0} \\ &= \ln(x+2)^2\Big]_{-1}^{0} \\ &= (\ln 4) - (\cancel{\ln 1}^{\,0}) \\ &= \ln 4 \end{aligned}$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0.20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0.9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

a) (1 punto) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) (1 punto) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.
Sean los sucesos:

$$J \equiv \text{“Ser joven”}$$
$$S \equiv \text{“Leer prensa al menos una vez a la semana”}$$

$$P(J) = 0.3 \quad \& \quad P(S \mid J) = 0.2 \quad \& \quad P(\overline{J} \mid S) = 0.9$$

a) Hallar $P(\overline{S})$

$$P(S \mid J) = 0.2 \implies \frac{P(S \cap J)}{P(J)} = \frac{P(S \cap J)}{0.3} = 0.2 \implies P(S \cap J) = 0.06$$
$$P(\overline{J} \mid S) = 0.9 \implies \frac{P(\overline{J} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S) - P(S \cap J)}{P(S)} = \frac{P(S) - 0.06}{P(S)} = 0.9$$
$$\implies 0.1P(S) = 0.06 \implies P(S) = 0.6 \implies P(\overline{S}) = 0.4$$

b) $P(\overline{S} \cup \overline{J}) = P(\overline{S \cap J}) = 1 - P(S \cap J) = 1 - 0.06 = 0.94$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria smple de 484 contenedrores.

a) (1 punto) Si la media de la muestra es $\overline{X} = 25.9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) (1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=484} \overline{X} = 25.9$$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}} = 0.2243$$
$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (25.68; 26.12)}$$

b) $$X : \mathcal{N}(23, 3) \xrightarrow{n=484} \overline{X} : \mathcal{N}(23, 3/\sqrt{484} = 0.136)$$

Nos piden la probabilidad de que los 484 contenedores puedan ser transportados en un barco con capacidad máxima de 11000 T. Es decir, $484 \cdot \overline{X} \leq 11000$, o lo que es lo mismo, que $\overline{X} \leq 22.73$ T.

$$P(\overline{X} \leq 22.73) = P\left(Z \leq \frac{22.73 - 23}{0.136}\right) = P(Z \leq -1.98) = P(Z \geq 1.98)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0239$$

Junio 2017 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcúlese la matriz $D = A^\top \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?

b) (1 punto) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$.

Nota: $A^\top$ denota la matriz traspuesta de la matriz A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $D = A^\top \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 9 & 26 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz $F = \underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B}$ sin embargo no existe pues no coinciden el número de columnas de A y el de filas de B.

b) $M = B^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (**2** ***puntos***)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 2;\ 2x - y \leq 4;\ 2y - x \leq 4;\ x \geq 0;\ y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x + 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

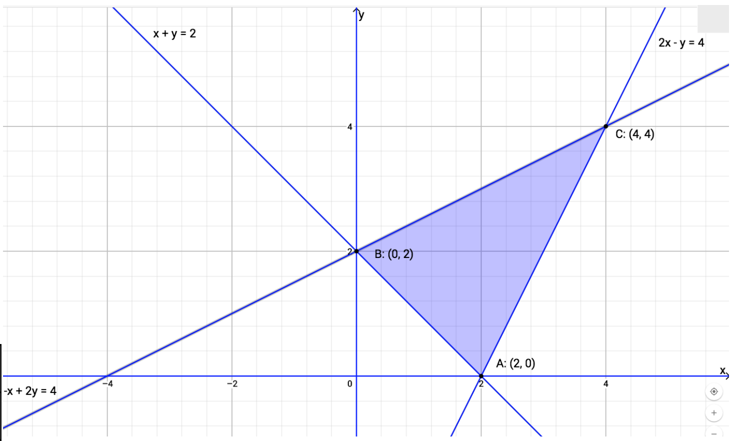
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = -5x + 3y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \ x + y \geq 2 & \to (0,2) \quad \& \quad (2,0) \\ ② \ 2x - y \leq 4 & \to (0,-4) \quad \& \quad (2,0) \\ ③ \ 2y - x \leq 4 & \to (0,2) \quad \& \quad (-4,0) \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	0	-10
B	0	2	6
C	4	4	-8

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $B(0, 2)$ y vale 6, mientras que el *mínimo* se produce en $A(2, 0)$ y vale -10.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

a) *(1 punto) Calcúlese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y or las rectas $x = 0$ y $x = 3$.*

b) *(1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

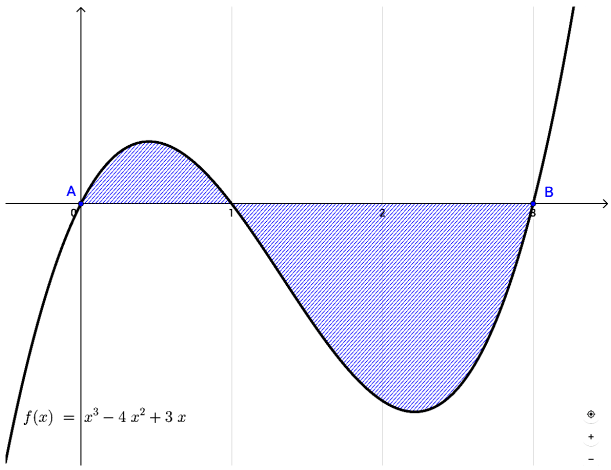
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$$
$$= x(x-1)(x-3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = -0$ y $x = 3$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 3)$.



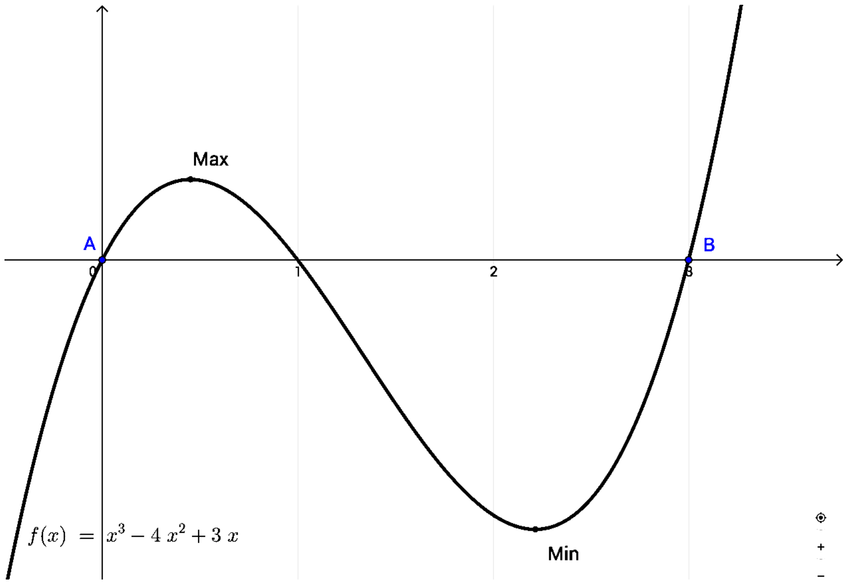
$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - (0) = \frac{5}{12}$$
$$A_2 = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3$$
$$= \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{12} - \frac{5}{12} = -\frac{8}{3}$$
$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

b) Para estudiar el crecimiento de la función hallamos los puntos singulares de la misma y hacemos un estudio del sigo de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

	$\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Luego $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ y tiene un *máximo* en $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ y un *mínimo* en $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El profesorado de cierta Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad elegido al azar:

a) (1 punto) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

b) (1 punto) Sea de Economía y sea mujer.

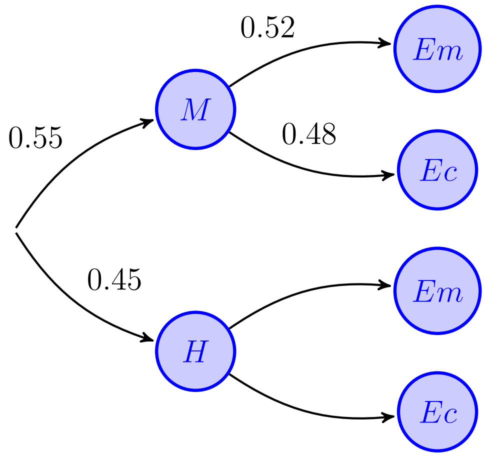
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$Ec \equiv$ "El profesor es de Economía" $\qquad Em \equiv$ "El profesor es de Empresa"

$M \equiv$ "El profesor es mujer" $\qquad H \equiv$ "El profesor es hombre"



$$P(Ec) = 0.6 \implies P(Em) = 1 - P(Ec) = 0.4$$

a) $$P(M \mid Em) = \frac{P(M \cap Em)}{P(Em)} = \frac{P(M) \cdot P(Em \mid M)}{P(Em)} = \frac{0.55 \cdot 0.52}{0.4} = 0.715$$

b) $$P(Ec \cap M) = P(M \cap Ec) = P(M) \cdot P(Ec \mid M) = 0.55 \cdot 0.48 = 0.264$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) (1 punto) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197.5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción diaria de cemento Tm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 9)$$

a) $n = ? \quad \& \quad 2E < 2 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \implies 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \leq 2$$

$$\implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 = 311.17 \implies \boxed{n = 312}$$

b) $X : \mathcal{N}(202, 9) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(202, {}^{9}/_{\sqrt{16}}) = \mathcal{N}(202, 2.25)$

$$P\left(\overline{X} \leq 197.5\right) = P\left(Z \leq \frac{197.5 - 202}{2.25}\right) = P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Junio 2017 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+3y+3z & = & 0 \\ -x+3y+z & = & 1 \\ -x+ay+2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

1) Método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \; C_2 \leftrightarrow C_3 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-6 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow 2a-6=0 \Longrightarrow a=3$$

- Si $a \neq 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \times & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).
- Si $a = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

2) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -x + 3(1/4) + 3(-1/2) = 0 \\ -2z = 1 \\ -2y - (-1/2) = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & si\ x \leq 0 \\ x^2 + 5x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) (1) Para que una función sea derivable ha de ser continua así que comprobamos primero la continuidad en $x = 1$.

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^2 + 5x + 1\right) = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(5x + 1) = 1$
- $f(0) = 5 \cdot 0 + 1 = 1$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(2) Estudiemos la derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} f'(0^-) = 5 \\ f'(0^+) = 5 \end{array}$$

Luego $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) El punto de tangencia es $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = f(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 = 25$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 5 \\ m_r &= f'(x_0) = f'(3) = 11 \\ r &\equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \\ r &\equiv y - 25 = 11 \cdot (x - 3) \implies \boxed{r \equiv y = 11x - 8} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = x^2 + 8x + 15$$

a) (1 punto) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 1/3$.

b) (1 punto) Determínense los máximos y los mínimos locales de $f(x)$, si los tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\displaystyle\int f'(x)\,dx = \int \left(x^2 + 8x + 15\right) dx = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x + k$

$f(1) = \dfrac{1}{3} \implies \dfrac{1}{3} + 4 + 15 + k = \dfrac{1}{3} \implies k = -19$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x - 19$$

b) $f'(x) = x^2 + 8x + 15 = 0 \implies x = -3$ y $x = -5$

$$f''(x) = 2x + 8 \implies \begin{cases} f''(-3) = 2 > 0 \overset{(\cup)}{\Longrightarrow} \text{Minimo en } (-3, -37) \\ f''(-5) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } (-5, -107/3) \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una máquina tiene dos chips de control A y B. Se sabe que al encender la máquina la probabilidad de que falle el chip A es de 0.2, la probabilidad de que falle el B es de 0.3 y la probabilidad de que fallen los dos es de 0.015. Calcúlese la probabilidad de que al encender la máquina:

a) (1 punto) Haya fallado el chip A si se sabe que ha fallado el B.

b) (1 punto) No falle ninguno de los dos chips.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“Falla el chip A”} \qquad\qquad B \equiv \text{“Falla el chip B”}$$

$$P(A) = 0.2 \quad \& \quad P(B) = 0.3 \quad \& \quad P(A \cap B) = 0.015$$

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.015}{0.3} = 0.05$

b) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= 1 - (0.2 + 0.3 - 0.015) = 0.515$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) (1 punto) Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) (1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 25) \xrightarrow{n=10} \overline{X} = 505$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \implies z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 20.36$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (484.64; 525.36)}$$

b) $X : \mathcal{N}(500, 25) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}(500, 25/\sqrt{10}) = \mathcal{N}(500, 7.91)$

$$P\left(10\overline{X} \geq 5030\right) = P\left(\overline{X} \geq 503\right) = P\left(Z \geq \frac{503-500}{7.91}\right) = P(Z \geq 0.38)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.38) = 1 - 0.6480 = 0.3520$$

Septiembre 2017
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y-z & = & -2 \\ -2x-az & = & 2 \\ y+az & = & -2 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a=4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2-3a = 0 \Longrightarrow a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2/3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 4$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim F_2 + 2F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim F_3 \leftrightarrows F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{array}\right) \underset{F_3+4F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 2\cdot 2 - (-1) = -2 \\ y + 4\cdot(-1) = -2 \\ 10z = 10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial procurando que los parámetros estén situados los más abajo a la derecha posible. Posteriormente hacemos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \sim F_2 + 2F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{4F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 0 & -2+3a & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow -2+3a = 0 \Longrightarrow a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & -10 \end{array}\right) \Rightarrow$Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow$Sistema Incompatible

b) Sustituimos $a = 4$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 2\cdot 2 - (-1) = -2 \\ \Rightarrow -4y - 6\cdot(-1) = -2 \\ \Rightarrow 10z = -10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5; \; 2 \leq y \leq 6; \; x - y \geq -4; \; 3x - y \leq 10$$

a) (1 punto) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Calcúlese los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -200x + 600y$ en la región S y obténgase los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

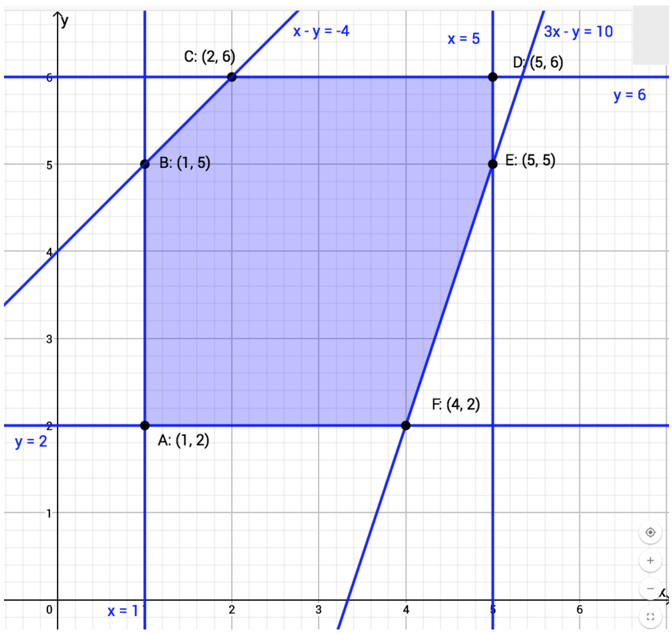
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = -200x + 600y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; 1 \leq x \leq 5 & \rightarrow (1,0) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; 2 \leq y \leq 6 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (0.6) \\ ③ \; x - y \geq -4 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (-4,0) \\ ④ \; 3x - y \leq 10 & \rightarrow (0,-10) \quad \& \quad (10/3, 0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	2	1000
B	1	5	2800
C	2	6	3200
D	5	6	2600
E	5	5	2000
F	4	2	400

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $C(2,6)$ y vale 3200, mientras que el *mínimo* se produce en $F(4,2)$ y vale 400.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real :

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & si\ x < -1 \\ x^2+x-2 & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x < -1,\ f(x) = ax+1$, que es continua por ser un polinomio.
- Si $x > -1,\ f(x) = x^2+x-2$, que es continua por ser un polinomio.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (ax+1) = -a+1$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \left(x^2+x-2\right) = -2$
  - $f(-1) = (-1)^2 - 1 - 2 = -2$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \implies -a+1 = -2 \implies a = 3$$

b) Para $a = 2$ tenemos que $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2+x-2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

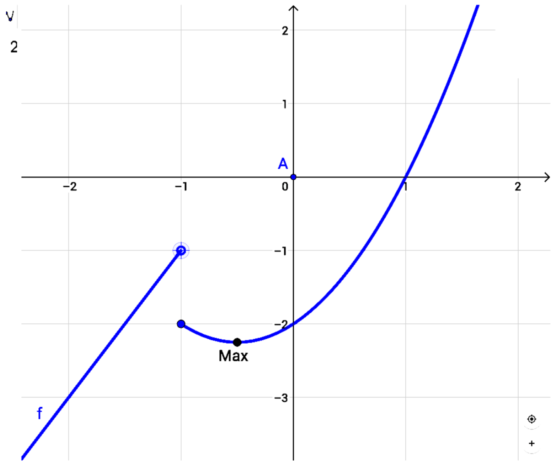
(1) Puntos de corte con los ejes
- Eje OX
  - $2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2} \not< -1 \implies \nexists$ corte con OX.
  - $x^2+x-2 = 0 \implies \begin{cases} x = -2 \not\geq -1 \implies \text{No es punto de corte} \\ x = 1 \geq -1 \implies \text{corte en } (1,0) \end{cases}$
- Eje OY
  $x = 0 \implies y = 0^2+0-2 = -2 \implies$ corte en $(0,-2)$

(2) Monotonía de la función $f(x)$.
- Si $x < -1 \Rightarrow f(x) = 2x+1 \implies f'(x) = 2 > 0 \implies$ Recta creciente en $(-\infty,-1)$
- Si $x > -1 \Rightarrow f(x) = x^2+x-2 \implies f'(x) = 2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$ y como $f''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow (\bigcup) \Rightarrow$ *Mínimo* en $x = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto podemos resumir,

$f(x)$ corta al eje OX en $x = 1$ y al eje OY en $y = -2$

$f(x)$ es *decreciente* en $(-1, -\frac{1}{2})$ y *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ y tiene un *mínimo* relativo en $(-1/2, 9/4)$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0.02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0.06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador

a) (1 punto) No salga defectuoso.

b) (1 punto) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

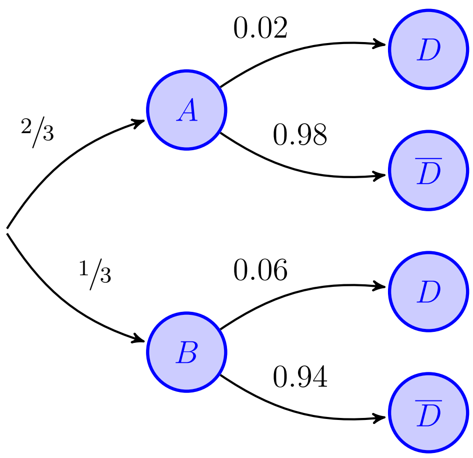
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El ordenador es del modelo A”}$$
$$B \equiv \text{“El ordenador es del modelo B”}$$
$$D \equiv \text{“El ordenador es defectuoso”}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2P(B) + P(B) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} P(A) = 2/3 \\ P(B) = 1/3 \end{cases}$$



a) $$P(\overline{D}) = P\Big((A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D})\Big)$$
$$= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D})$$
$$= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967$$

b) $$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{1 - P(\overline{D})}$$
$$= \frac{2/3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.404$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16, calcúlese:

a) (1 punto) La probabilidad de que la media muestral del tiempo $\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.

b) (1 punto) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24.24, 47.76)$ para μ.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 24) \quad \overset{n=16}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(36, {}^{24}/\sqrt{16} = 6)$$

$$P\left(\overline{X} \geq 48\right) = P\left(Z \geq \frac{48-36}{6}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

b) $$I.C. = (24.24, 47.76) \implies 2E = 47.76 - 24.24 \implies E = 11.76$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 11.76 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{24}{\sqrt{16}} \implies z_{\alpha/2} = 1.96 \implies 1 - {}^{\alpha}/{}_{2} = 0.975$$
$$\implies {}^{\alpha}/{}_{2} = 0.025 \implies \alpha = 0.05 \implies 1 - \alpha = 0.95$$

Por lo que el nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza en cuestión es del 95 %.

Septiembre 2017
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determínese la matriz C^{40}.

b) (1 punto) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a)
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
- $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
- $C^3 = C \cdot C^2 = C \cdot I = C$
- $C^{40} = \left(C^2\right)^{20} = I^{20} = I$

b) $X \cdot A + 3B = C \implies X \cdot A = C - 3B \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (C - 3B) \cdot A^{-1}$

$$\implies \boxed{X = (C - 3B) \cdot A^{-1}}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, y se puede comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$.

$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

De esta forma

$$X = (C - 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{3x-2}$$

a) (1 punto) Estúdiense sus asíntotas.

b) (1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a)

- `A.Horizontal` $y=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{x^2-1}{3x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$

- `A.Oblícua` Haciendo la división $f(x)=\frac{x^2-1}{3x-2}$ obtenemos la A. Oblicua $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}$.
  También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y=mx+n$ de otra manera, haciendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{x^2-1}{3x^2-2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{3}$$
$$n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{x^2-1}{3x-2}-\frac{1}{3}x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{9x-6}=\frac{2}{9}$$

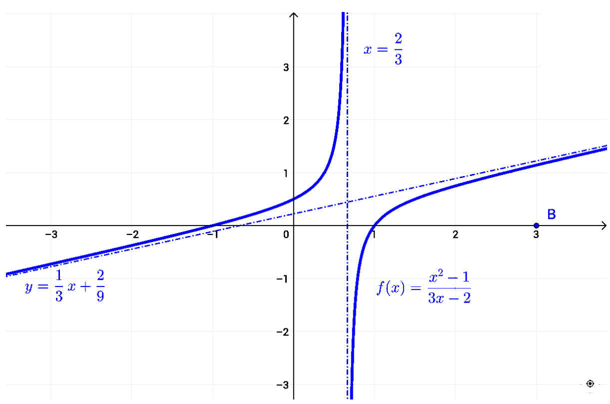
- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $3x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2/3} f(x)=\left[\frac{-5/9}{0}\right]=\begin{cases}\lim_{x\to 2/3^-}\frac{x^2-1}{3x-2}=\left[\frac{-5/9}{0^-}\right]=+\infty\\[2ex] \lim_{x\to 2/3^+}\frac{x^2-1}{3x-2}=\left[\frac{-5/9}{0^+}\right]=-\infty\end{cases}$$

b) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{2x(3x-2)-3(x^2-1)}{(3x-2)^2}$$
$$=\frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$$
$$=0\Rightarrow 3x^2-4x+3=0\Rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

$$\begin{cases} f'(x)>0\ \forall x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right) & \textit{Creciente}\\ f'(x)<0\ \forall x\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right) & \textit{Dereciente}\end{cases}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + ax$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.

b) (1 punto) Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a) Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$, $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x + a \implies f'(2) = 4 + a = 0 \implies a = -4$$
$$f''(x) = 2 \implies f''(2) = 2 > 0 \implies (\cup)\ \textit{Mínimo}$$

b) Hallamos los puntos de corte con el eje X.
$x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$.

$$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0) = -\frac{4}{3}$$
$$A_{tot} = |A_1| = \frac{4}{3}\,u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0.6, por sulfatos es 0.4, y por ambos es 0.2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) (1 punto) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) (1 punto) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos: $\begin{cases} N & \equiv \text{El río está contaminado por nitratos} \\ S & \equiv \text{El río está contaminado por sulfatos} \end{cases}$

$$P(N) = 0.6 \quad \& \quad P(S) = 0.4 \quad \& \quad P(N \cap S) = 0.2$$

a) $P(\overline{N} \mid S) = \dfrac{P(\overline{N} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.4 - 0.2}{0.4} = 0.5$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{N} \cap \overline{S}) &= P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - [P(N) + P(S) - P(N \cap S)] \\ &= 1 - (0.6 + 0.4 - 0.2) = 0.2 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0.6$ cm.

a) *(1 punto) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0.1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.6) \overset{n=100}{\longrightarrow} \overline{X} = 7$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.01 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.99 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{100}} = 0.1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu)(6.8605, 7.1395)}$$

b) $n = ? \qquad E \leq 0.1 \qquad 1 - \alpha = 0.98 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$

$$E \leq 0.1 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{n}} \leq 0.1 \implies n \geq \left(2.325 \cdot \frac{0.6}{0.1}\right)^2$$

$$\implies n \geq 194.6 \implies \boxed{n = 195}$$

Septiembre 2017 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Determínese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = I$, siendo I la matriz identidad de tamaño 3×3.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = a^3 - 2a^2 = 0 \implies a^2 \cdot (a-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0, 2\} \implies \exists A^{-1}$
- Si $a = \{0, 2\} \implies \nexists A^{-1}$

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -1$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = I \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}I \implies X = A^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \leq 16; \; x + y \leq 11; \; x + 2y \geq 6; \; x \geq 0; \; y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4, 4)$ a S?

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x+y$ en la región S indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

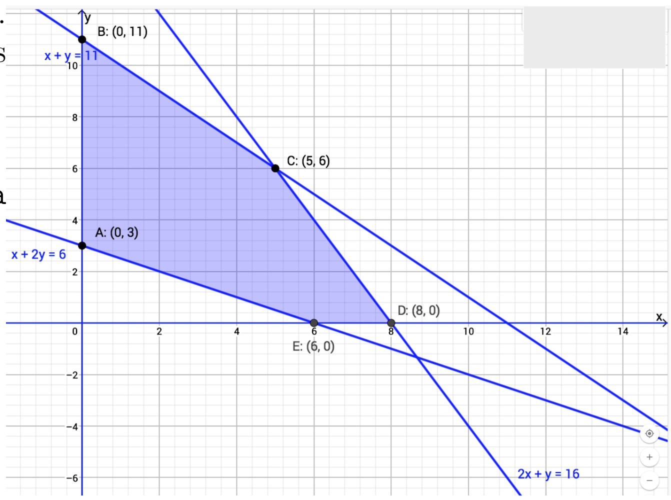
- `Función objetivo:`

$$f(x, y) = 3x + y$$

- `Región S:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; 2x + y \leq 16 & \to (0, 16) \quad \& \quad (8, 0) \\ ② \; x + y \leq 11 & \to (0, 11) \quad \& \quad (11, 0) \\ ③ \; x + 2y \geq 6 & \to (0, 3) \quad \& \quad (6, 0) \\ x, \, y \geq 0 \end{cases}$$

- (1 punto) `Región factible:` Representamos S y calculamos los vértices de la misma. $(4, 4) \in S$ ya que cumple todas las restricciones.



- (1 punto) `Optimización de la fución objetivo:`

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	3	3
B	0	11	11
C	5	6	21
D	8	0	24
E	6	0	18

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $D(8, 0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $A(0, 3)$ y vale 3.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & si \quad x < -1 \\ x & si \quad -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Determínese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- Si $x \neq \{-1, 1\}$, $f(x)$ es continua por ser polinomios.
- Si $x = -1$
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \left(x^2 - 2x\right) = 3$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} x = -1$
  - $f(-1) = -1$

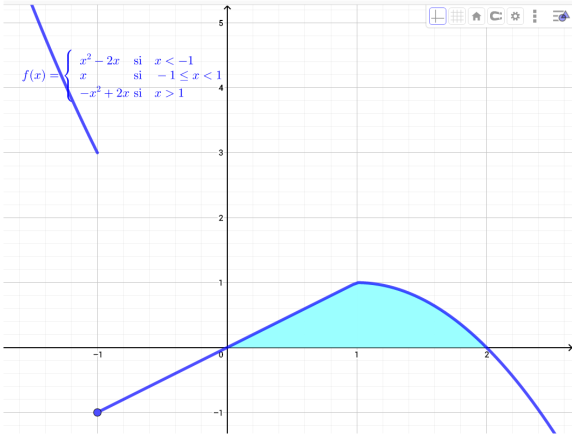
  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de salto finito.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left(-x^2 + 2x\right) = 1$
  - $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por tanto $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

$-1 \leq x < 1 \Rightarrow x = 0$
$x \geq 1 \Rightarrow -x^2 + 2x = x(-x+2) = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$
Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$ y $x = 2$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 2)$.



$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}$$

$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) (1 punto) Reciba clases de flamenco.

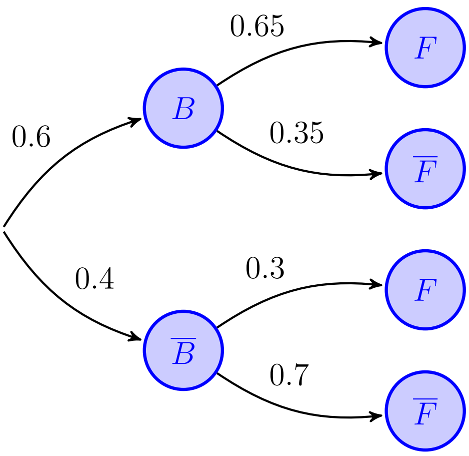
b) (1 punto) Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

B = "El alumno recibe clases de ballet"
F = "El alumno recibe clases de flamenco"



a) $P(F) = P\Big((B \cap F) \cup (\overline{B} \cap F)\Big)$

$P(B \cap F) + P(\overline{B} \cap F)$

$= P(B) \cdot P(F \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(F \mid \overline{B})$

$= 0.6 \cdot 0.65 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.51$

b) $P(B \mid \overline{F}) = \dfrac{P(B \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)}{1 - P(F)}$

$= \dfrac{0.6 \cdot 0.35}{1 - 0.51} = 0.429$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. estos precios son los siguientes:

$$140;\ 125;\ 140;\ 175;\ 135;\ 165;\ 175;\ 110;\ 150;\ 130.$$

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) (1 punto) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X:\ \mathcal{N}(\mu, 15) \quad \xrightarrow{n=10} \quad \overline{X} = \frac{140+125+140+175+135+165+175+110+150+130}{10} = 144.5$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{15}{8} = 9.3$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (135.2, 153.7)}$

b) $n = ? \qquad E \le 8 \qquad 1-\alpha = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$E \le 8 \implies z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 8 \implies n \ge \left(1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right)^2 13.5 \implies \boxed{n = 14}$

Septiembre 2017 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+ay+z & = & 3 \\ 2y+2z & = & 0 \\ x+3y+2z & = & -3 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

1) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{array}{r} -x+\lambda = 3 \\ 2y+2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} x = -3+\lambda & \\ y = -\lambda & ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \left(3x^2 - 2x\right)^2$$

a) *(1 punto) Calcúlese* $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

b) *(1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto de abscisa* $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Desarrollamos el cuadrado: $f(x) = (3x^2 - 2x)^2 = 9x^4 + 4x^2 - 12x^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(9x^4 + 4x^2 - 12x^3\right)dx = \left.\frac{9}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 3x^4\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{9}{5} + \frac{4}{3} - 3\right) - \left(-\frac{9}{5} - \frac{4}{3} - 3\right) = \frac{2}{15} + \frac{92}{15} = \frac{94}{15}$$

b) El punto de tangencia es $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2)^2 = 64$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 36x^3 + 8x - 36x^2 \\ m_r &= f'(x_0) = f'(2) = 160 \\ r &\equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \\ r &\equiv y - 64 = 160 \cdot (x - 2) \implies \boxed{r \equiv y = 160x - 256} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

, donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

a) (1 punto) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?

b) (1 punto) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

Observación: *valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para que no haya ganancias ni pérdidas el beneficio ha de ser cero:

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \implies x = \frac{-120 \pm 40}{-2} = \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$$

b) Para obtener el máximo de la función beneficio:

$$b'(x) = -2x + 120 = 0 \implies x = 60$$
$$b''(x) = -2$$
$$b''(60) = -2 < 0 \implies (\cap) \implies \text{Máximo}$$

Luego fabricando 60 metros de cable obtendremos un beneficio máximo igual a $b(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$ euros.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.5$, $P(A \mid B) = 0.375$ y $P(B \cap A) = 0.3$. Calcúlese la probabilidad de que:

a) *(1 punto) Ocurra B.*

b) *(1 punto) Ocurra B pero no A.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.3}{P(B)} = 0.375 \implies P(B) = \dfrac{0.3}{0.375} = 0.8$

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.3 = 0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros ($l/100\,km$), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2\ l/100\,km$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

a) *(1 punto) Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza $(4.528, 5.2)$ para μ.*

b) *(1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 4.8\ l/100\,km$. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, esté comprendida entre 4.5 y $5.1\ l/100\,km$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.2) \xrightarrow{n=49} \overline{X} :$

$$2E = 5.2 - 4.528 = 0.672 = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{0.672 \cdot \sqrt{49}}{2 \cdot 1.2} = 1.96 \implies 1 - \alpha = 0.95$$

b) $X : \mathcal{N}(4.8, 1.2) \xrightarrow{n=49} \overline{X} : \mathcal{N}(4.8, {}^{1.2}/\sqrt{49} = 0.1714)$

$$\begin{aligned} P(4.5 \leq \overline{X} \leq 5.1) &= P\left(\frac{4.5 - 4.8}{0.1714} \leq Z \leq \frac{5.1 - 4.8}{0.1714}\right) = P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -1.75) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 1.75)] = -0.9599 - (1 - 0.9599) \\ &= 0.9198 \end{aligned}$$

2018

Curso 2017/18

Modelo 2018
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ *dependiente del parámetro real* a.

a) *(1 punto) Determínese los valores de* a *para los que la matriz* A *es invertible.*

b) *(1 punto) Para* $a = 1$*, despéjese y determínese la matriz* X *de la ecuación matricial* $A \cdot X = A + 2I$*, donde* I *representa la matriz identidad de orden 3.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$| A |= 2a^3 \neq 0 \implies a \neq 0$$

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $| A |= 2 \cdot 1^3 = 2$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = A + 2I$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}(A + 2I)$$
$$X = A^{-1}(A + 2I) = \underbrace{A^{-1}A}_{I} + A^{-1}2I = I + 2A^{-1}I$$
$$X = I + 2A^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|\ A\ |}\text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = I + 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una bodega desea fijar el precio de venta al público de las 250 botellas de vino blanco y de las 500 de vino tinto que tiene en stock. Para no incurrir en pérdidas saben que el precio de venta al público de la botella de vino blanco debe ser como mínimo de 3 euros, de la misma manera el precio de venta al público de la botella de vino tinto debe ser de, como mínimo, 4 euros. Además saben que, para ser competitivos con esos precios de venta al público el coste de 2 botellas de vino blanco y una de tinto debería ser a lo sumo 15 euros. Por el mismo motivo, el coste total de una botella de vino blanco y una de tinto no debe sobrepasar los 10 euros.
Determínense los respectivos precios de venta al público por unidad de las botellas de vino blanco y de las de vino tinto, para que el ingreso total al vender el stock de 250 botellas de vino blanco y 500 de vino tinto sea máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas` $x =$ "Precio del vino blanco (€)"
  $y =$ "Precio del vino tinto (€)"

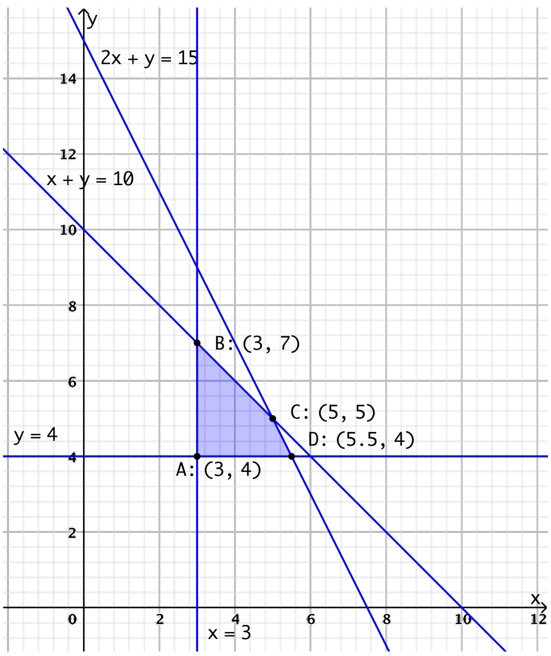
- `Función objetivo` $f(x, y) = 250x + 500y$

- `Restricciones` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x \geq 3 & \rightarrow (3,0) \\ ② \; y \geq 4 & \rightarrow (0,4) \\ ③ \; x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ④ \; 2x + y \leq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (7.5,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	3	4	2750
B	3	7	4250
C	5	5	3750
D	5.5	4	3375

Luego el ingreso máximo de 4250€ se produce con un precio del vino blanco de 3€ y un precio de vino tinto de 7€

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16.$$

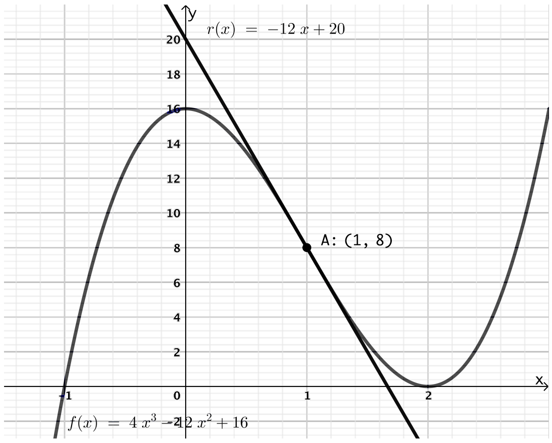
a) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.*

b) *(1 punto) Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) El punto de tangencia es $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(1) = 8$



$$f'(x) = 12x^2 - 24x$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = -12$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - 8 = -12 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = -12x + 20$$

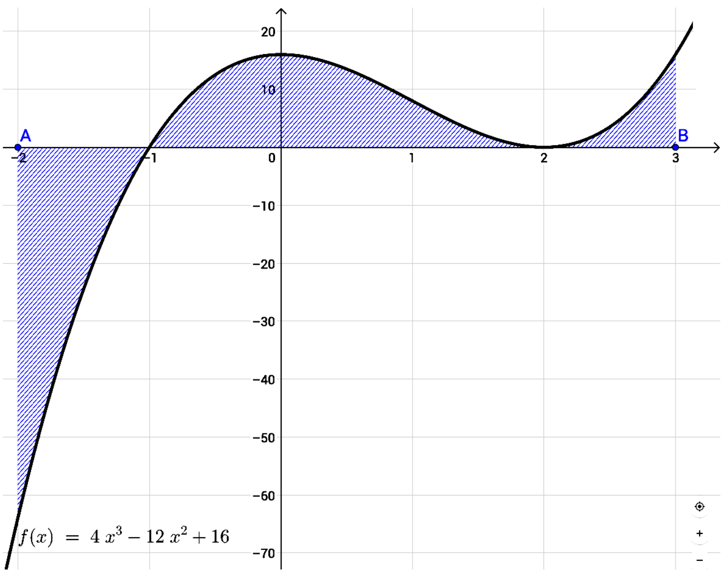
b) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$$4x^3 - 12x^2 + 16 = 0$$

	4	-12	0	16
-1		-4	16	-16
	4	-16	16	$\boxed{0}$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm 0}{8} = 2\ d$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = -1$ y $x = 2$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = -2$ y $x = 3$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(-2, -1)$, A_2 en $(-1, 2)$ y A_3 en $(2, 3)$.



$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (4x^3 - 12x^2 + 16)\,dx = x^4 - 4x^3 + 16x\Big]_{-2}^{-1} \\
&= (1 + 4 - 16) - (16 + 32 - 32) = -11 - 16 = -27 \\
A_2 &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (4x^3 - 12x^2 + 16)\,dx = x^4 - 4x^3 + 16x\Big]_{-1}^{2} \\
&= (16 - 32 + 32) - (1 + 4 - 16) = 16 + 11 = 27 \\
A_3 &= \int_{2}^{3} f(x)\,dx = \int_{2}^{3} (4x^3 - 12x^2 + 16)\,dx = x^4 - 4x^3 + 16x\Big]_{2}^{3} \\
&= (81 - 108 + 48) - (16 - 32 + 32) = 21 - 16 = 5 \\
A_{Total} &= |A_1| + |A_2| + |A_3| = 27 + 27 + 5 = 59\ u^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.4 \qquad P(B) = 0.5 \qquad P(A \mid B) = 0.7$$

. Calcúlese:

a) (1 punto) $P(A \cup B)$.

b) (1 punto) $P(\overline{A} \mid B)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) Hallar $P(A \cup B)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.7 \implies P(A \cap B) = 0.7 \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 0.4 + 0.5 - 0.35 = 0.55$$

b) $$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 - 0.35}{0.5} = 0.3$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Un determinado partido político desea estimar la proporción de votantes, p, que actualmente se decantaría por él.

a) (1 punto) Asumiendo que $p = 0.5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de votantes para garantizar que, con una confianza del $90\,\%$, el margen de error en la estimación no supera el $2\,\%$ $(\pm 2\,\%)$.

b) (1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 1200 votantes de los cuales 240 afirmaron que votarían por el partido en cuestión. Obténgase un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la proporción de votantes de ese partido en la población.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

Como estamos trabajando con proporciones, el intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C. = \hat{p} \pm E, \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.02$, siendo $1-\alpha = 0.90$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E \leq 0.02 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \leq 0.02 \implies 1.645\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \leq 0.02$$

$$\implies n \geq \left(\frac{1.645\cdot 0.5}{0.02}\right)^2 = 1691.27 \text{ y por tanto } \boxed{n = 1692}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{240}{1200} = 0.2 \implies \hat{q} = 1-\hat{p} = 0.8$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{1200}} = 0.023$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.1774; 0.2226)}$$

Modelo 2018
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ 2x+y+z & = & 2 \\ 5x+3y+z & = & a+4 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & a+4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2$$

- $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran} A = 3 = \text{ran} A^* = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sist. Comp. Det.

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -10 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x+3+1=3 \\ -y-1=-4 \\ -2z=-2 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=-1 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{3x^2+3}{x}$.

a) (1 punto) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- `A.Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$
- `A.Oblícua` Haciendo la división $\frac{3x^2+3}{x}$ obtenemos la A. Oblícua $y = 3x$. También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx+n$ de otra manera, haciendo:

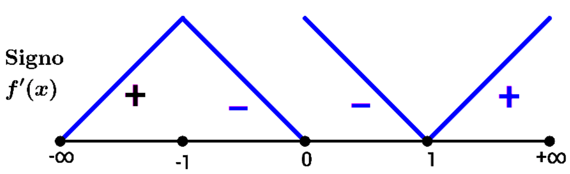
  $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 3$$
  $$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{x} - 3x = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3-3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$
- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$

  $$\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

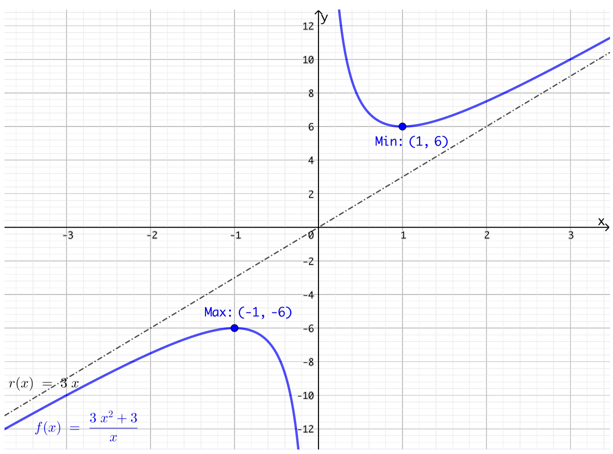
b) Para hallar los puntos singulares haremos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{6x\cdot x - (3x^2+3)\cdot 1}{x^2} = \frac{3x^2-3}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2-3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Para evaluar el signo de $f'(x)$ suele ser útil factorizar $f'(x) = \dfrac{3(x+1)(x-1)}{x^2}$



La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y *decreciente* en $(-1,0)\cup(0,1)$ y tiene un *máximo* en $(-1,-6)$ y un *mínimo* en $(1,6)$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

donde x expresa las toneladas de cemento producidas al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0, 8]$.

a) (1 punto) Calcúlense $f(0)$ y $f(8)$ e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.

b) (1 punto) Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a)
- $f(0) = -12$ que significa que si no producimos ninguna tonelada de cemento tendremos unas pérdidas de 12000 €.
- $f(8) = -28$ que se interpreta como que si producimos 8 toneladas de cemento tendremos unas pérdidas de 28000 € debido a las ineficiencias de la sobreproducción (contratación de horas extraordinarias, problemas logísticos de almacenaje...).

Para calcular el máximo beneficio tenemos que optimizar la función $f(x)$. Para ello hallaremos los puntos singulares de la misma y hallaremos el máximo, comprobando posteriormente que éste no sea menor que los extremos de la función $f(0)$ y $f(8)$.

$$f'(x) = -4x + 14 = 0 \implies x = 7/2.$$
$$f''(x) = -4 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo.}$$

El máximo beneficio es de $f(7/2) = 12500$ € que se obtiene con una producción de 3.5 toneladas de cemento.

b) Establecer entre qué valores debe estar la producción de cemento para que la empresa no tenga pérdidas es tanto como estudiar el signo de la función $f(x)$.

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12 = 0 \implies x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-14 \pm 10}{-4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 6)$	$(6, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗	Decreciente ↘

Luego la producción de cemento deberá estar entre $[1, 6]$ toneladas para que la empresa no tenga pérdidas.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.3 \qquad P(B) = 0.8 \qquad P(A \cup B) = 0.9$$

Calcúlese:

a) *(1 punto)* $P(\overline{A} \mid B)$.

b) *(1 punto)* $P(A \mid \overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.3 + 0.8 - 0.9 = 0.2$

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 - 0.2}{0.8} = 0.75$$

b) $$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.3 - 0.2}{1 - 0.8} = 0.5$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ kilogramos.

a) (1 punto) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

$$37,\ 40,\ 42,\ 39,\ 41,\ 40,\ 39,\ 42,\ 40$$

b) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 99 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=9} \overline{X} = \dfrac{37+40+42+39+41+40+39+42+40}{9} = 40$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{9}} = 1.96$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = \left(\overline{X} - E; \overline{X} + E\right) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (38.04, 41.96)}$

b) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 1$, siendo $1-\alpha = 0.99$

$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$

$E < 1 \implies z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies 2.325 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies n \geq \left(2.325 \cdot \dfrac{3}{1}\right)^2 = 48.65$

y por tanto $\boxed{n = 49}$

Junio 2018
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Compruébese que B *es la matriz inversa de* A*.*

b) (1 punto) Calcúlese la matriz X *tal que* $A \cdot X = B$*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) B es matriz inversa de $A \iff B \cdot A = A \cdot B = I$
Es importante la comprobación de los dos productos pues el hecho de que el producto de matrices no sea conmutativo así nos lo exige.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X = B \implies \underbrace{B \cdot A}_{I} \cdot X = B \cdot B \implies X = B^2$

$$X = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, \qquad 2x + y \leq 80, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) *(1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *(1 punto) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

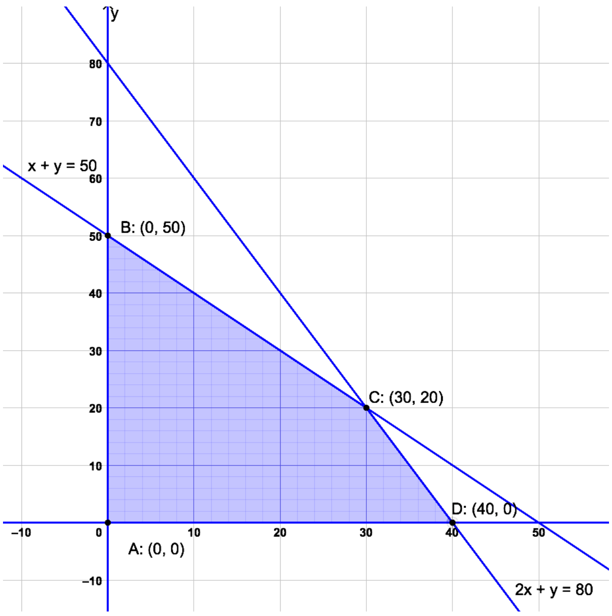
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

- `Restricciones` Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 50 & \rightarrow (0, 50) \quad \& \quad (50, 0) \\ ② \; 2x + y \leq 80 & \rightarrow (0, 80) \quad \& \quad (40, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	50	200
C	30	20	230
D	40	0	200

Luego el máximo de la función ese 230 que se produce en el punto $C(30, 20)$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x \leq 2 \\[2ex] \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.*

b) *(1 punto) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = 4$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2-2x}{x+2} = 2$
- $f(2) = \dfrac{2+2}{2-1} = 4$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) \implies f(x) \text{ no es continua en } x = 2$$

b) Cuando $x < 2$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \implies f'(x) = \dfrac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.

b) (1 punto) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.
Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{“El cliente busca billete de transporte”}$$
$$H \equiv \text{“El cliente busca un hotel”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(T) = 0.75 \quad \& \quad P(H) = 0.8 \quad \& \quad P(T \cap H) = 0.65$$

a) $P(T \cup H) = P(T) + P(H) - P(T \cap H) = 0.75 + 0.8 - 0.65 = 0.9$

b) $P(T \mid H) = \dfrac{P(T \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0.65}{0.8} = 0.8125$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media $\mu = 4$ gramos y desviación típica $\sigma = 0.5$ gramos.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0.25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral , $\overline{X}$, pese más de 12.25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(4, 0.5) \quad \xrightarrow{n} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(4, {}^{0.5}/_{\sqrt{n}})$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.25$, siendo $1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.25 \implies 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{n}} \leq 0.25 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.5}{0.25}\right)^2 = 15.36$$

y por tanto $\boxed{n = 16}$

b) $X : \mathcal{N}(12, 0.5) \quad \xrightarrow{n=25} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(12, {}^{0.5}/_{\sqrt{25}}) = \mathcal{N}(12, 0.1)$

$$P\left(\overline{X} > 12.25\right) = P\left(Z > \frac{12.25 - 12}{0.1}\right) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z < 2.5)$$

$$= 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Junio 2018
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay+z & = & 1 \\ ax+y+(a-1)z & = & a \\ x+y+z & = & a+1 \end{array}\right\}$$

a) *(1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a=3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Ponemos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -a+1=0 \Longrightarrow a=1$$

- Si $a \neq 1$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 3 = \text{ran}A^* = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sist. Comp. Det.
- Si $a=1 \quad \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}A < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A^* = 3$

  $$\text{ran}A = 2 \neq \text{ran}A^* = 3 \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Resolvemos el sistema para $a=3$ por el método de Gauss.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow x + 3\cdot(-3/2) + 12 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -8\cdot(-3/2) - z = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y = 3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -13/2 \\ y = -3/2 \\ z = 12 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

a) (1 punto) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a)
- $x+1=0 \implies x=-1 \implies \text{dom(f)} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- `A.Horizontal` $\quad y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$

- `A.Oblícua` Haciendo la división $\dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$ obtenemos la recta $y = x-2$.
  También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx+n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\cdot(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-(x^3+2x^2+x)}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2-x}{(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -2$$

- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-1$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

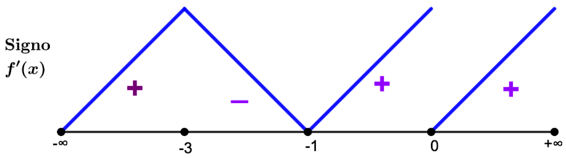
b) Para hallar los puntos singulares haremos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$$

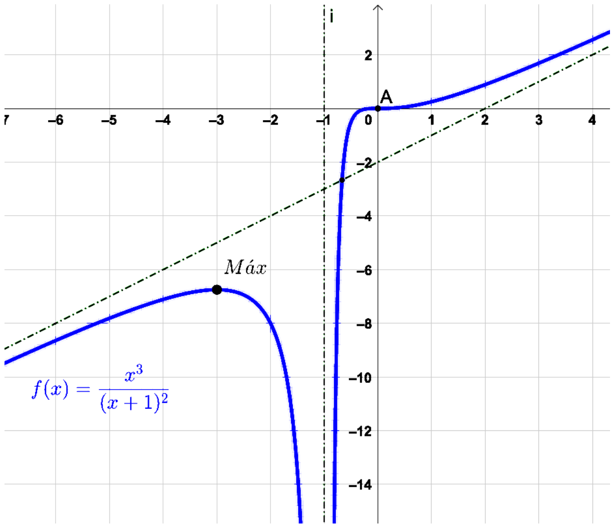
$$= \frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x^2\cdot\left(x^2+4x+3\right) = 0 \Rightarrow x = \{-1,\ -3,\ 0\}$$

Para evaluar el signo de $f'(x)$ suele ser útil factorizar la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{x^2\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x+3)}{(x+1)^{\cancel{4}3}} = \frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}$$



La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ y *decreciente* en $(-3,-1))$ y tiene un *máximo* en $x=-3$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=2x^3-5x^2+3x.$$

a) *(1 punto) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.*

b) *(1 punto) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.*

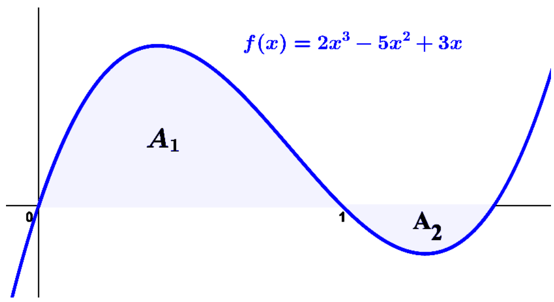
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$$2x^3-5x^2+3x=x\cdot(2x^2-5x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\2x^2-5x+3=0\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}\Rightarrow x=\{1,\ {}^3\!/_2\}\end{cases}$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x=0$, $x=1$ y $x={}^3\!/_2$, planteamos el área de manera que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0,1)$ y A_2 en $(1,3)$.

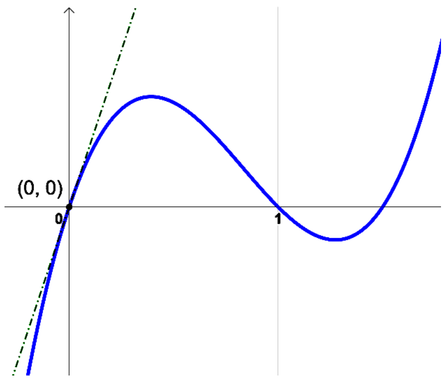


$$A_1=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(2x^3-5x^2+3x)\,dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right)-(0)$$
$$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_1^{3/2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 = \left(\frac{81}{32} - \frac{135}{24} + \frac{27}{8}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{9}{32} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{96}$$
$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96}\ u^2$$

b) El punto de tangencia es
$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 0$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 3$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - 0 = 3 \cdot (x - 0)$$
$$r \equiv y = 3x$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad la probabildad de que un hombre trabaje es de 0.8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

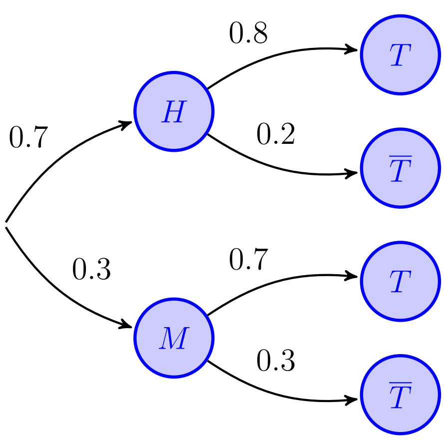
a) (1 punto) Una persona que trabaja.

b) (1 punto) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.
Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El primer nombre del buzon es masculino”}$$
$$M \equiv \text{“El primer nombre del buzon es femenino”}$$
$$T \equiv \text{“La persona trabaja”}$$



a) $P(T) = P\Big((H \cap T) \cup (M \cap T)\Big)$
$$= P(H \cap T) + P(M \cap T)$$
$$= P(H) \cdot P(T \mid H) + P(M) \cdot P(T \mid M)$$
$$= 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.77$$

b) $P(H \mid T) = \dfrac{P(H \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(H) \cdot P(T \mid H)}{P(T)}$
$$= \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.77} = 0.727$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 10$ descargas.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99.5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra de 10 horas la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=40} \overline{X} = 99.5$$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{40}} = 3.1$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = \left(\overline{X} - E; \overline{X} + E\right) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (96.4, 102.6)}$$

b) $$X : \mathcal{N}(100, 10) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}(100, {}^{10}\!/_{\sqrt{10}}) = \mathcal{N}(100, 3.16)$$

$$P\left(100 < \overline{X} < 110\right) = P\left(\frac{100 - 100}{3.16} < Z < \frac{110 - 100}{3.16}\right) = P(0 < Z < 3.16)$$

$$= P(Z < 3.16) - P(z < 0) = 0.9992 - 0.5 = 0.4992$$

Junio 2018 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

donde m es un parámetro real.

a) *(1 punto) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.*

b) *(1 punto) Para $m = 0$ considérese la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Exprésese X en función de A y B y calcúlese X:*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = 6 - 2m = 0 \implies m = 3$. Luego $\exists\, A^{-1},\ \forall m \in \mathbb{R} - \{3\}$

b) Para $m = 0 \implies A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 6 - 2 \cdot 0 = 6 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ -1 & 3/2 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \le 6\,; \quad 4x + y \le 12\,; \quad x \ge 0\,; \quad y \ge 0$$

a) *(1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *(1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = \dfrac{8x+3y}{5}$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \le 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \; 4x + y \le 12 & \rightarrow (0,12) \quad \& \quad (3,0) \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

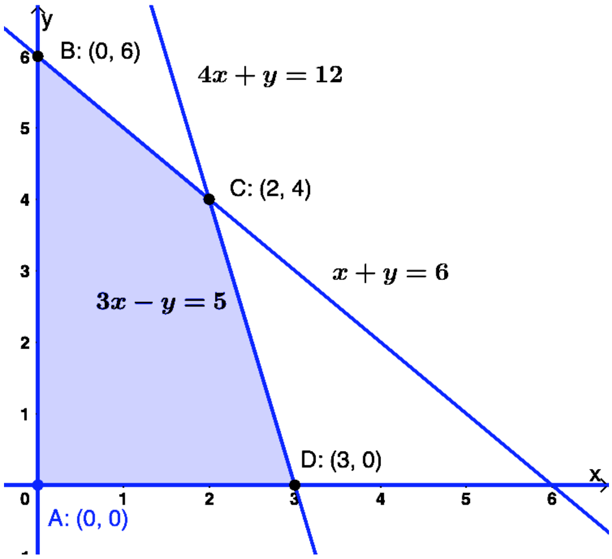
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = \frac{8x+3y}{5}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	6	$^{18}/_{5}$
C	2	4	$^{28}/_{5}$
D	3	0	$^{24}/_{5}$



Por tanto el *máximo* es de $^{28}/_{5}$ y se produce en el punto $C(2,4)$, mientras que el *mínimo* es 0 y se alcanza en el punto $A(0,0)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

a) (1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f'(x)$, siendo f' la función derivada de f.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- $x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$
- $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$
- $m_r = f'(x_0) = f'(0) = -1$
- $r \equiv y - y_0 = m_r(x - x_0) \implies y - 1 = -1 \cdot (x - 0) \implies \boxed{r \equiv y = -x + 1}$

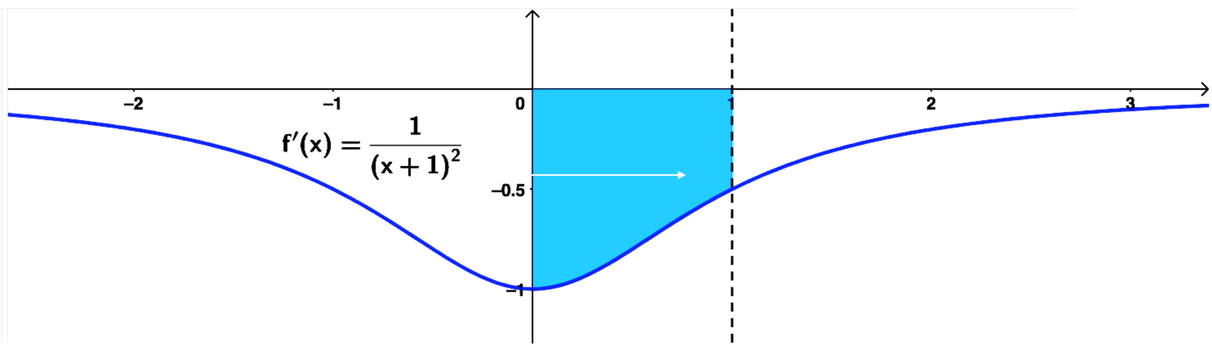
b) Hallamos los puntos de corte de $f'(x)$ con el eje OX.

$$-\frac{1}{(x+1)^2} = 0 \implies 1 = 0 \implies \nexists \text{ Pto. corte } OX$$

Lo que define un único recinto de integración delimitado por las rectas verticales: $A_1 = (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$Area = |A_1| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se toma un coche al azar de la Comunidad de Madrid. Se sabe que la probabilidad de que tenga motor diésel es 0.4*. La probabilidad de que tenga mas de* 8 *años es* 0.5*. Finalmente se sabe que la probabilidad de que tenga más de ocho años o motor diésel es* 0.55*. Calcúlese la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Tenga motor diésel sabiendo que tiene más de ocho años.

b) (1 punto) No tenga motor diésel ni tenga más de ocho años.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$D \equiv \text{"El coche tiene motor diésel"}$$
$$O \equiv \text{"El coche tiene más de ocho años"}$$

Del enunciado sabemos las siguientes probabilidades:

$$P(D) = 0.4 \quad \& \quad P(O) = 0.5 \quad \& \quad P(D \cup O) = 0.55$$

a) $P(D \mid O) = \dfrac{P(D \cap O)}{P(O)} = \dfrac{P(D) + P(O) - P(D \cup O)}{P(O)} = \dfrac{0.4 + 0.5 - 0.55}{0.5} = 0.70$

b) $P(\overline{D} \cap \overline{O}) = P\left(\overline{D \cup O}\right) = 1 - P(D \cup O) = 1 - 0.55 = 0.45$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ h y desviación típica $\sigma = 0.25$ h.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 15 individuos y se obtiene una media muestral $\overline{x} = 2$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Supóngase que $\mu = 2$ h. calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1.85 y 2.15 horas.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 2 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.25}{\sqrt{15}} = 0.127$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1.873; 2.127)}$$

b) $X : \mathcal{N}(2, 0.25) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2, \dfrac{0.25}{\sqrt{20}} = 0.056\right)$

$$\begin{aligned} P(1.85 \leq \overline{X} \leq 2.15) &= P\left(\frac{1.85 - 2}{0.056} \leq Z \leq \frac{2.15 - 2}{0.056}\right) = P(-2.68 \leq Z \leq 2.68) \\ &= P(Z \leq 2.68) - P(Z \leq -2.68) = P(Z \leq 2.68) - P(Z \geq 2.68) \\ &= P(Z \leq 2.68) - [1 - P(Z \leq 2.68)] = 2 \cdot P(Z \leq 2.68) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9963 - 1 = 0.9926 \end{aligned}$$

Junio 2018 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x-y+az=-1 \end{array}\right\}$$

a) *(1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a=0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como se trata de un S.C.I. solo tenemos que resolver las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rr} \Rightarrow & 2x + \frac{3-\lambda}{3} + \lambda = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & 3y + \lambda = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{3-\lambda}{3} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2a-1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_2 + F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 0}$$

- Si $a \neq 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & \square & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{rr} \Rightarrow & 2x + \frac{3-\lambda}{3} + \lambda = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & 3y + \lambda = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{3-\lambda}{3} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese si $f(x)$ es una función continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Calcúlense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si las tuviese.

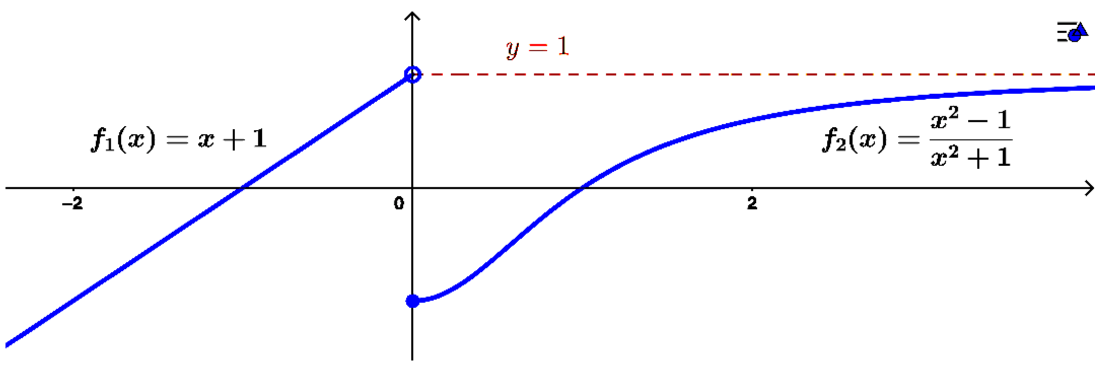
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- Si $x < 0$, $f(x) = x + 1$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, que es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = -1$
  - $f(0) = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

  Como los límites laterales son distintos la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b)
- `A. Horizontal`
  - $y = \lim\limits_{x\to -\infty} (x+1)$ Como se trata de una recta no hay asíntotas de ningún tipo en esta rama
  - $y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1 \implies$ A.H. en $y = 1 \implies \nexists$ A.O.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$$

a) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) (1 punto) Calcúlense sus máximos y mínimos locales si los tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Derivamos la función y calculamos sus puntos singulares:

$$f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 0 \implies x = \{-3, -2\}$$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$ y *decreciente* en $(-3, -2)$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

b) $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $(-3, -27)$ y un *mínimo relativo* en $(-2 - 28)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Entre los músicos que ensayan en un determinado local de Madrid, un 30 % sabe tocar la batería, un 80 % sabe tocar la guitarra y un 20 % sabe tocar tanto la batería como la guitarra. Se elige uno de esos músicos al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) No sepa tocar la batería si se conoce que sabe tocar la guitarra.

b) (1 punto) Conocido que no sabe tocar la guitarra, no sepa tocar la batería.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$B \equiv \text{"El músico sabe tocar la batería"}$$
$$G \equiv \text{"El músico sabe tocar la guitarra"}$$

Del enunciado sabemos las siguientes probabilidades:

$$P(B) = 0.3 \quad \& \quad P(G) = 0.8 \quad \& \quad P(B \cap G) = 0.2$$

a) $P(\overline{B} \mid G) = \dfrac{P(\overline{B} \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(G) - P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0.8 - 0.2}{0.8} = 0.75$

b) $P(\overline{B} \mid \overline{G}) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap \overline{G}\right)}{P\left(\overline{G}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{B \cup G}\right)}{P(\overline{G})} = \dfrac{1 - P(B \cup G)}{1 - P(G)}$

$$= \frac{1 - [P(B) + P(G) - P(B \cap G)]}{1 - P(G)} = \frac{1 - (0.3 + 0.8 - 0.2)}{1 - 0.8} = 0.5$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0.2$ kg.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.05 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1.5$ kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.2) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 0.05 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{n}} < 0.05 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{0.2}{0.05}\right)^2 = 61.46 \implies \boxed{n = 62}$$

b) $X : \mathcal{N}(1.5, 0.2) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1.5, \frac{0.2}{\sqrt{20}} = 0.045\right)$

Si la suma de los pesos de 20 ejemplares es de 32 kg, quiere decir que la media será $\overline{x} = \frac{32}{20} = 1.6$ kg

$$P(\overline{X} > 1.6) = P\left(Z > \frac{1.6-1.5}{0.045}\right) = P(Z > 2.22) = 1 - P(Z < 2.22)$$
$$= 1 - 0.9868 = 0.0132$$

Julio 2018 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto) Calcúlese* $\left[\left(A \cdot A^\top\right)^2 - 2A \cdot A^\top\right]^{11}$

b) *(1 punto) Determínense el número de filas y columnas de la matriz* X *que verifica que* $X \cdot A^\top = B^\top$*. Justifíquese si* $A^\top$ *es una matriz invertible y calcule la matriz* X*.*

Nota: $M^\top$ *denota la matriz traspuesta de la matriz* M*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) $A \cdot A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A \cdot A^\top\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \cdot A^\top\right)^2 - 2A \cdot A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\left(A \cdot A^\top\right)^2 - 2A \cdot A^\top\right]^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\underbrace{X}_{1\times 2} \cdot \underbrace{A^\top}_{2\times 3} = \underbrace{B^\top}_{1\times 3} \implies X \in \mathcal{M}_{1\times 2}$

La matriz $A^\top$ no es invertible porque no es cuadrada.

$$X \cdot A^\top = B^\top \implies \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{pmatrix} y & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \geq 4;\ x + 2y \leq 12;\ x \leq 4;\ -x + 2y \leq 12\right\}$$

a) *(1 punto) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *(1 punto) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

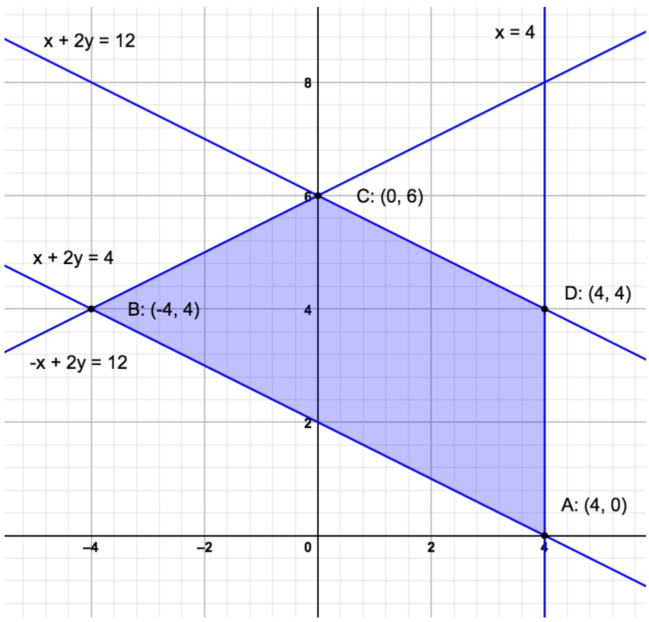
Solución.

- `Función objetivo:` $f(x, y) = 3x - y$
- `Región S:` Escribimos restricciones puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \ x + 2y \geq 4 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (4,0) \\ ② \ x + 2y \leq 12 & \rightarrow (0.6) \quad \& \quad (12,0) \\ ③ \ x \leq 4 & \rightarrow (4,0) \\ ④ \ -x + 2y \leq 12 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (-12,0) \end{cases}$$

- `Región factible:` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma
- `Optimización de la fución objetivo:` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	4	0	12
B	-4	4	-16
C	0	6	-6
D	4	4	8



Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $A(4, 0)$ y vale 12, mientras que el *mínimo* se produce en $B(-4, 4)$ y vale -16.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x}{1-4x^2}$$

a) *(1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

b) *(1 punto) Estúdiense las asíntotas de f.*

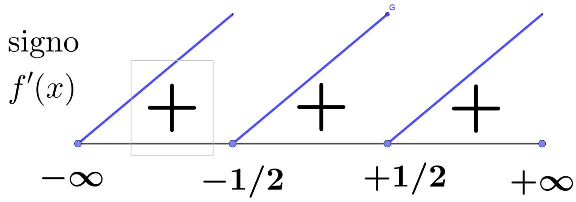
(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1-4x^2 - x\cdot(-8x)}{(1-4x^2)^2} = \frac{4x^2+1}{(1-4x^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2+1=0 \Rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

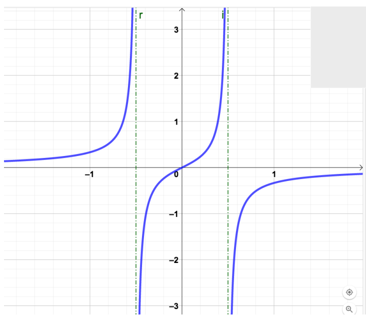


La función $f(x)$ es *Creciente* en $(-\infty, -{}^1\!/\!_2) \cup (-{}^1\!/\!_2, {}^1\!/\!_2) \cup ({}^1\!/\!_2, +\infty)$

b)
- `A.Horizontal` $\quad y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0 \implies y = 0$
- `A.Oblícua` $\quad \nexists$ A.O.
- `A. Vertical` $\quad f(x)$ tiene una asíntota vertical en $1-4x^2=0 \Rightarrow x = \pm{}^1\!/\!_2$

$$\lim_{x\to -1/2} f(x) = \left[\frac{-1/2}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1/2^-} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{-1/2}{0^-}\right] = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1/2^+} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1/2} f(x) = \left[\frac{1/2}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1/2^-} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{1/2}{0^+}\right] = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to 1/2^+} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{1/2}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

a) (1 punto) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) (1 punto) Si el 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

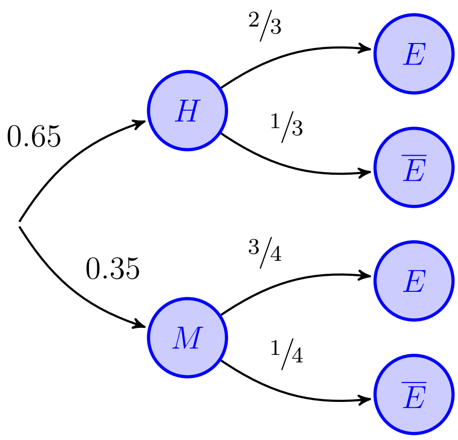
a) Denominamos los sucesos:

$$He \equiv \text{“El hombre elegido ha entrenado”}$$
$$Me \equiv \text{“La mujer elegida ha entrenado”}$$

$$P(He \cup Me) = P(He) + P(Me) - P(He \cap Me) = P(He) + P(Me) - P(He) \cdot P(Me)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$$

b) Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“La persona elegida es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“La persona elegida es mujer”}$$
$$E \equiv \text{La persona ha entrenado}$$



$$P(E) = P\big((H \cap E) \cup (M \cap E)\big)$$
$$= P(H \cap E) + P(M \cap E)$$
$$= P(H) \cdot P(E \mid H) + P(M) \cdot P(E \mid M)$$
$$= 0.65 \cdot \frac{2}{3} + 0.35 \cdot \frac{3}{4} = 0.6958$$

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{P(H) \cdot P(E \mid H)}{P(E)}$$
$$= \frac{0.65 \cdot {}^{2}\!/_{3}}{0.6958} = 0.6227$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para μ sea a lo sumo de 23550 km.*

b) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 24000) \qquad \& \qquad n =? \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95 \qquad \& \qquad 2E \leq 23550$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$2E \leq 23550 \implies 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 23550 \implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{24000}{23550}\right)^2 = 15.95$

$\implies \boxed{n = 16}$

b) $X : \mathcal{N}(150000, 24000) \quad \xrightarrow{n=25} \quad \overline{X} : \mathcal{N}\left(150000, \dfrac{24000}{\sqrt{25}} = 4800\right)$

$$P(144240 \leq \overline{X} \leq 153840) = P\left(\frac{144240-150000}{4800} \leq \overline{X} \leq \frac{153840-150000}{4800}\right)$$
$$= P(-1.2 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -1.2)$$
$$= P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq 1.2) = P(Z \leq 0.8) - [1 - P(Z \leq 1.2)]$$
$$= 0.7881 - (1 - 0.8849) = 0.673$$

Julio 2018 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 3y + z & = & a \\ 2x + ay - 6z & = & 8 \\ x - 3y - 5z & = & 4 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -6a - 12 = 0 \Longrightarrow a = -2$

- Si $a \neq -2 \quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 4$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 3F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 3\cdot 0 + 1 \cdot 0 = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 8\cdot 0 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 18z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

a) *(1 punto) Determínese, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?*

b) *(1 punto) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Nos piden los máximos relativos de la función beneficio:

$$f(x) = x^3 - 12x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2$$
$$f''(x) = 6x \implies \begin{cases} f''(-2) = -12 < 0 & \implies (\cap) \implies \text{Máximo} \\ f''(2) = 12 > 0 & \implies (\cup) \implies \text{Mínimo} \end{cases}$$

Y por tanto el máximo relativo del beneficio se produce para un índice igual a -2 y vale $f(-2) = 16$ millones de euros.

b) Nos encontramos en el punto de abscisa $x = 4$ de la función beneficio y queremos saber si la función crece o no en ese punto.

$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 = 36 > 0 \implies \text{el beneficio crecerá}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x & , \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{2}{3+x} & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense el dominio de $f(x)$ y estúdiese su continuidad.

b) (1 punto) Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) El dominio de $f_1(x) = x^3 + 2e^x$ es todo $\mathbb{R}$, mientras que el de $f_2(x) = \dfrac{2}{3+x}$ es $\mathbb{R} - \{-3\}$, pero $x = -3$ no pertenece al intervalo donde $f_2(x)$ ha sido definida. Por tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $f(x) = x^3 + 2e^x$ que es continua por ser la suma de dos funciones continuas (polinomio y exponencial).
- Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2}{3+x}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$, luego es continua cuando $x > 0$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^3 + 2e^x\right) = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{3+x}\right) = \dfrac{2}{3}$
  - $f(0) = \dfrac{2}{3+0} = \dfrac{2}{3}$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \implies$ hay una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

Por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 2e^x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} + 2e^x\right]_{-1}^{0} = (0+2) - \left(\frac{1}{4} + 2e^{-1}\right) = \frac{7}{4} - \frac{2}{e}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0.4 \quad \& \quad P(B) = 0.6 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.8$$

Calcúlese:

a) (1 punto) $P(A \cap B)$

b) (1 punto) $P\left(\overline{A \cup B} \mid A\right)$

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.6 - 0.8 = 0.2$

b) $P\left(\overline{A \cup B} \mid A\right) = \dfrac{P\left((\overline{A \cup B}) \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{P\left((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{0}{0.4} = 0$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) (1 punto) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del $95\,\%$, el margen de error en la estimación no supere el $3\,\%$ $(\pm 3\,\%)$.

b) (1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del $90\,\%$ para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

El intervalo de confianza para una proporción es el siguiente:

$$I.C.(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.03$, siendo $1-\alpha = 0.95$ y $\hat{p} = 0.5$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$E \leq 0.03 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \leq 0.03 \implies 1.96\sqrt{\dfrac{0.5\cdot 0.5}{n}} \leq 0.03$

$\implies n \geq \left(\frac{1.96\cdot 0.5}{0.03}\right)^2 = 1067.11$ y por tanto $\boxed{n = 1068}$

b) $\hat{p} = \dfrac{90}{450} = 0.2 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.8$

$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.645\cdot\sqrt{\dfrac{0.2\cdot 0.8}{450}} = 0.031$

$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.169, 0.231)}$

2019

Curso 2018/19

Modelo 2019

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) *(1 punto) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.*

b) *(1 punto) Considérese la ecuación matricial $A \cdot X = A \cdot B + B$. Para $m = 5$, exprésese X en función de A y B y calcúlese la matriz X.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = 3m - 12 \neq 0 \implies m \neq 4$$

b) Para $m = 5$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 3 \cdot 5 - 12 = 3$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$A \cdot X = A \cdot B + B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B)$

$X = \underbrace{A^{-1} A}_{I} \cdot B + A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = B + A^{-1} \cdot B}$ Hallamos la matriz inversa de A

por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} X = B + A^{-1} \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 8 & 13 & -12 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$-2x + 3y \leq 4; \quad 2x + y \geq 4; \quad 2x - y \leq 4.$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 0.5x + \frac{1}{3}y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

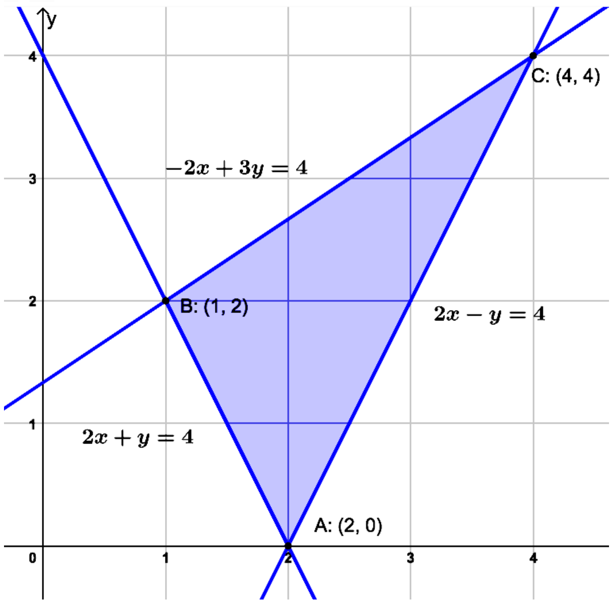
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 0.5x + \frac{1}{3}y$$

- `Restricciones` Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ -2x + 3y \leq 4 & \rightarrow (0, 4/3) \quad \& \quad (-2, 0) \\ ② \ 2x + y \geq 4 & \rightarrow (0, 4) \quad \& \quad (2, 0) \\ ③ \ 2x - y \leq 4 & \rightarrow (0, -4) \quad \& \quad (2, 0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	0	1
B	1	2	$7/6$
C	4	4	$10/3$

Luego la función objetivo tiene un *mínimo* en $A(2, 0)$, que vale 1 y un *máximo* en $C(4, 4)$ que vale $10/3$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

a) (1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

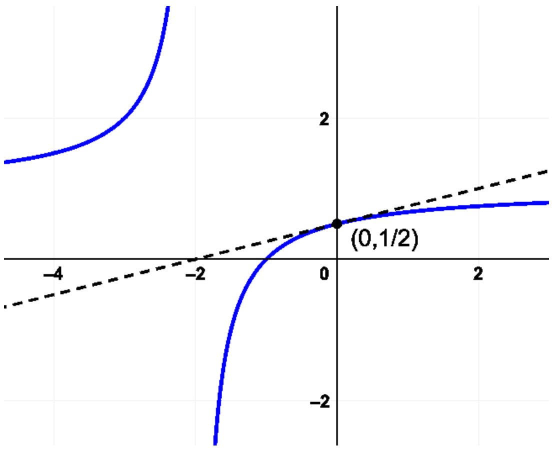
b) (1 punto) Calcúlense sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) El punto de tangencia es

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 1/2$



$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+x-2)-(x^2-1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 1/4$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r\cdot(x-x_0)$$

$$r \equiv y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot(x-0)$$

$$\boxed{r \equiv x - 4y + 2 = 0}$$

b)

- `A.Horizontal` $\quad y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1 \Rightarrow$ A.H. en $y=1$
- `A. Vertical` Hallamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \implies x = \{-2, 1\}$
  - $\lim_{x\to-2} f(x) = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$
  - $\lim_{x\to 1} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cdot\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$

  Por tanto solo habrá A. Vertical en $x=-2$. En $x=1$ lo que tendremos será un ”agujero”, pues el punto no pertenece al dominio de definición de la función $f(x)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una determinada sede de la EVAU hay un 45 % de alumnos de la modalidad de Ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACCSSII). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen MACCSSII. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de MACCSSII. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

a) *(1 punto) Se examine de MACCSSII.*

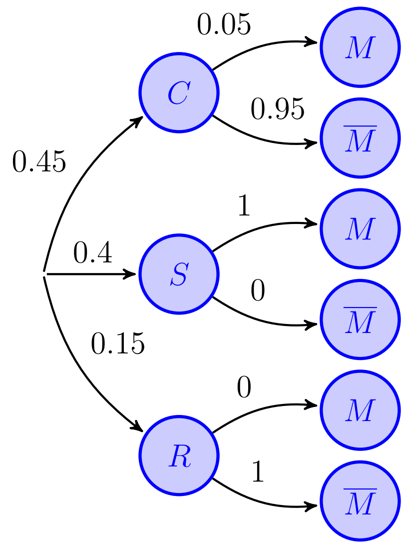
b) *(1 punto) Sabiendo que se examina de MACCSS sea un alumno de la modalidad de Ciencias.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

$C \equiv$ "El alumno es de Ciencias" $\quad S \equiv$ "El alumno es de Ciencias Sociales"

$R \equiv$ "El alumno es de otra modalidad" $\quad M \equiv$ "El alumno se examina de MACCSSII"



a) $P(M) = P\big((C \cap M) \cup (S \cap M) \cup (R \cap M)\big)$

$$= P(C \cap M) + P(S \cap M) + P(R \cap M)$$

$$= P(C) \cdot P(M \mid C) + P(S) \cdot P(M \mid S)$$

$$+ P(R) \cdot P(M \mid R) = 0.45 \cdot 0.05$$

$$+ 0.4 \cdot 1 + 0.15 \cdot 0 = 0.4225$$

b) $P(C \mid M) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(C) \cdot P(M \mid C)}{P(M)}$

$$= \frac{0.45 \cdot 0.05}{0.4225} = 0.0533$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes, P, que estarían dispuestos a contratarlo.

a) (1 punto) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, Determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % (±2 %).

b) (1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C.(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.02$, siendo $1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tablaa} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E \leq 0.02 \implies z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq 0.02 \implies 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.02$$

$$\implies n \geq \left(\frac{1.96 \cdot 0.5}{0.02}\right)^2 = 2401 \text{ y por tanto } \boxed{n = 2401 \text{ encuestados}}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{85}{500} = 0.17 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.83$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.10 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.17 \cdot 0.83}{500}} = 0.0276$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p} - E;) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.1424; 0.1976)}$$

Modelo 2019
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x+2y+z &=& 1 \\ x+3y+z &=& 2 \\ 5x-y+az &=& -1 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 16a = 0 \Longrightarrow a = 0$

- Si $a \neq 0$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} \xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sist. Comp. Indet. (∞ soluciones)

b) Como para $a = 0$ estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 6F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & -5 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow x + 3\cdot\frac{11-5\lambda}{16} + \lambda = 2 \\ \Rightarrow -16y - 5\lambda = -9 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{21-11\lambda}{16} \\ y = \frac{11-5\lambda}{16} \quad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & si\ x < -1 \\ e^{2x+2} & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual $f(x)$ es una función continua en $x = -1$.

b) (1 punto) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en $x = -1$

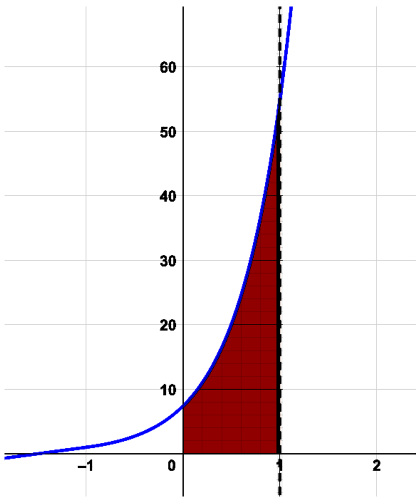
$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2x + a = a - 2 \\ \bullet \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} e^{2x+2} = 1 \\ \bullet\ f(-1) = e^{2\cdot(-1)+2} = e^0 = 1 \end{array}\right\} \implies a - 2 = 1 \implies \boxed{a = 3}$$

b) Entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$, la función $f(x) = e^{2x-2}$. Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$$y = 0 \implies e^{2x-2} = 0 \implies \nexists \text{ puntos de corte con eje X}$$

Por tanto se define un único intervalo de integración $A_1 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2x+2}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right) \\ Area &= |A_1| = \left|\frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)\right| \\ &= \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)\ u^2 \simeq 23,6\ u^2 \end{aligned}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

a) *(1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

b) *(1 punto) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{2}$$

	$\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right)$	$\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$	$\left(1+\sqrt{2}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Luego la función $f(x)$ es *decreciente* en $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}, +\infty\right)$ y *creciente* en $\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *mínimo local* en $\left(1-\sqrt{2}, -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ y un *máximo local* en $\left(1+\sqrt{2}, \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0.2*. La probabilidad de que, siendo extranjero, sea hombre es* 0.45*. Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es* 0.1*. calcúlese la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Conocido que es español, sea un hombre.

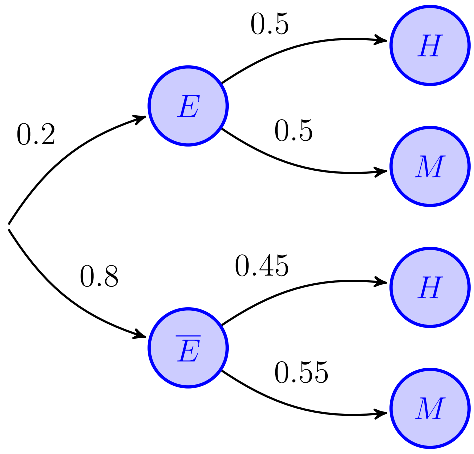
b) (1 punto) Sea una mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El cliente es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“El cliente es mujer”}$$
$$E \equiv \text{“El cliente es español”}$$



a) $P(M \mid E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0.1}{0.2} = 0.5$

$\implies P(H \mid E) = 1 - 0.5 = 0.5$

b) $P(M) = P\Big((E \cap M) \cup (\overline{E} \cap M)\Big)$

$= P(E \cap M) + P(\overline{E} \cap M)$

$= P(E) \cdot P(M \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(M \mid \overline{E})$

$= 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.55 = 0.54$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0.1$ kg.

a) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimción de μ sea menor que 0.025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *(1 punto) Sabiendo que $\mu = 0.7$ kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0.65 kg.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Llamamos $X \equiv$ "Contenido en azúcares en los botes de miel (kg)"

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.025$, siendo $1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}} \leq 0.025 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.1}{0.025}\right)^2 = 61.46 \implies \boxed{n = 62}$$

b) $$X : \mathcal{N}(0.7, 0.1) \quad \xrightarrow{n=20} \quad \overline{X} : \mathcal{N}\left(0.7; \frac{0.1}{\sqrt{20}} = 0.022\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 0.65) = P\left(Z \leq \frac{0.65 - 0.7}{0.022}\right) = P(Z \leq -2.24) = P(Z \geq 2.24)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2.27) = 1 - 0.9875 = 0.0125$$

Junio 2019
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.

b) (1 punto) Determínese si las matrices C y $(C^\top \cdot C)$, donde $C^\top$ denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo calcúlense las inversas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos $|A - 2B|$ y vemos para qué valor de k se anula.

$$A - 2B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2B| = 2 \cdot (k-2) - 24 + 0 - (0 + 1 + 0) = 2k - 29 = 0 \implies \boxed{k = 29/2}$$

b) Para que una matriz tenga inversa ha de ser cuadrada y tener determinante no nulo. Como $C_{3\times 2} \implies \nexists C^{-1}$

$$C^\top \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|C^\top \cdot C\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \exists \left(C^\top \cdot C\right)^{-1}$$

$$\left(C^\top \cdot C\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas.
Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene.
Para que haya suficiente para todos los asistentes tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) (1 punto) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) (1 punto) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

	Helado	Horchata	Restricción
h trabajo/litro	1	2	≤ 20
	≤ 15		

- `Incógnitas` $x \equiv$ "litros de helado"
  $y \equiv$ "litros de horchata"

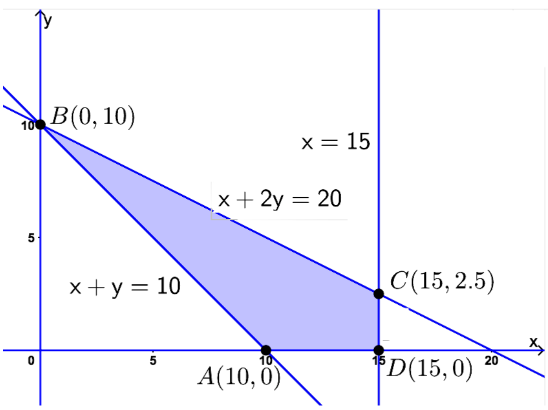
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \ x + 2y \leq 20 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (20,0) \\ ③ \ x \leq 15 & \rightarrow (15,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x) = 25x + 12y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	0	250
B	0	10	120
C	15	2.5	405
D	15	0	375

Por tanto el *máximo* beneficio se produce en el punto $C(15, 2.5)$ y vale 405 euros.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) (1 punto) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.

b) (1 punto) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad y convexidad de esta función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x^2 - 4x - 6)\,dx = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + k$

$(0, 3) \in f(x) \implies f(0) = 3 \implies k = 3 \implies \boxed{f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 3}$

b) Hallamos los puntos singulares

$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \implies x = -1$ y $x = 3$

$$f''(x) = 4x - 4 \implies \begin{cases} f''(-1) = -8 < 0 & \Rightarrow (\cap) \Rightarrow \text{Máximo en } (-1, 19/3) \\ f''(3) = 8 > 0 & \Rightarrow (\cup) \Rightarrow \text{Minimo en } (3, -15) \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 4 = 0 \xrightarrow{P.I.} x = 1 \implies \begin{cases} \text{Si } x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0 & \xrightarrow{(\cap)} \text{Cóncava} \\ \text{Si } x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 & \xrightarrow{(\cup)} \text{Convexa} \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.8 \quad y \quad P(A \cap \overline{B}) = 0.1$$

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) (1 punto) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \dfrac{0.1}{1 - 0.8} = 0.5$

$P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0.6 \cdot (1 - 0.8) = 0.12$

Como $P(A \cap \overline{B}) \neq P(A) \cdot P(\overline{B}) \implies$ los sucesos A y $\overline{B}$ no son independientes

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0.6 - 0.1 = 0.5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) (1 punto) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99.2 % para estimar el precio medio mensual μ, de las clases de Pilates.

b) (1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

Nos dicen que la varianza $\sigma^2 = 49 \implies \sigma = 7$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 7) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{7}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(\mu, 0.875)$

$1 - \alpha = 0.992 \overset{Tabla}{\Longrightarrow} z_{\alpha/2} = 2.65 \qquad \& \qquad \overline{x} = 34$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.65 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{64}} = 2.32$

$I.C._{992\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{992\,\%}(\mu)(31.68; 36.32)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 95\,\% \qquad \& \qquad E < 3$

$1 - \alpha = 0.95 \overset{Tabla}{\Longrightarrow} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.96 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{n}} < 3 \implies n > \left(\dfrac{1.96 \cdot 7}{3}\right)^2 = 20.92 \implies \boxed{n = 21 \text{ centros}}$

Junio 2019
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínese los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.*

b) *(1 punto) Resuélvase el sistema para $m=1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -m & 0 \end{array}\right)$$

a) Los sistemas homogéneos son siempre compatibles, pues tienen al menos la solución trivial. Para tener soluciones distintas de la trivial el sistema ha de ser Compatible Indeterminado, lo que implica que ran$A<3$, es decir que $|A|=0$.

$$|A| = m^2-1=0 \implies m=\{-1,1\}$$

Si $m=\{-1,1\}$ el sistema es SCI (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema cuando $m=1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow -x+0+\lambda=0 \ \Rightarrow & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y=0 \ \Rightarrow & \Rightarrow \\ \Rightarrow z=\lambda \ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \quad , \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

a) *(1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.*

b) *(1 punto) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

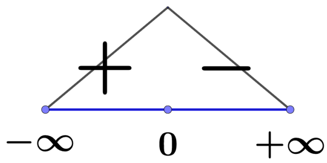
Solución.

a) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} = 0 \implies x = 0$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \ \forall x < 0 & \textit{Creciente} \\ f'(x) < 0 \ \forall x > 0 & \textit{Dereciente} \end{cases}$$

signo $f'(x)$



- `A. Vertical` $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \implies \nexists$Asíntota Vertical
- `A.Horizontal` $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{8}{x^2+4} = \left[\frac{8}{\infty}\right] = 0$

b) El punto de tangencia es $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(2) = 1$

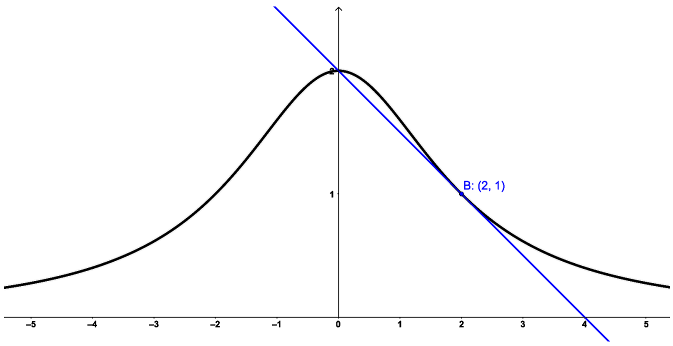
$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(2) = -\frac{1}{2}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)$$

$$\boxed{r \equiv x + 2y - 4 = 0}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & si\ x \leq 0 \\ 1 - x^2 & si\ 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\ x > 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores del parámetro k.

b) (1 punto) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

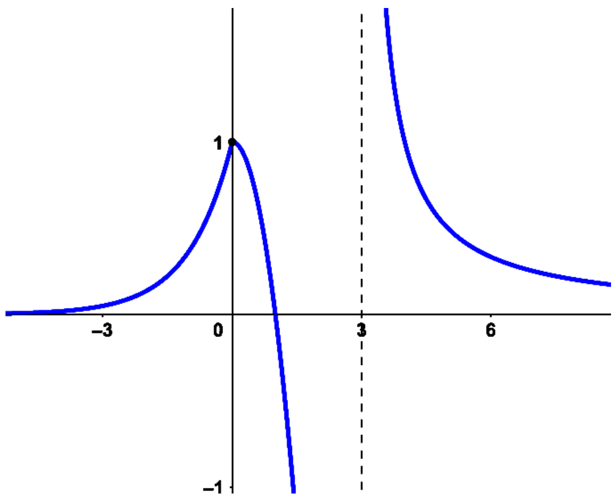
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Tenemos que estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $f(x) = e^x + k$ que es continua por ser la suma de dos funciones continuas (exponencial y constante).
- Si $0 < x < 3$, $f(x) = 1 - x^2$ que es continua por ser un polinomio.
- Si $x > 3$, $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$, luego es continua en $x > 3$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^x + k) = 1 + k$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - x^2\right) = 1$
  - $f(0) = e^0 + k = 1 + k$

  Luego si $1 + k = 1 \implies k = 0$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$. Por el contrario, si $k \neq 0$ hay una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.
- Si $x = 3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(1 - x^2\right) = -8$
  - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \left[\dfrac{1}{0}\right] = +\infty$
  - $f(3) = 1 - 3^2 = -8$ Luego en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito



b) Dividimos el área en dos recintos: $A_1(-1,0)$ y $A_2(0.1)$
e^x no se anula en A_1 y $1-x^2$ tampoco se anula en A_2, de esta forma tenemos:

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\Big]_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 1 - x^2\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Area} = |A_1| + |A_2| = 1 - \frac{1}{e} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} = 1.299\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0.60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0.30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0.15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

a) (1 punto) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

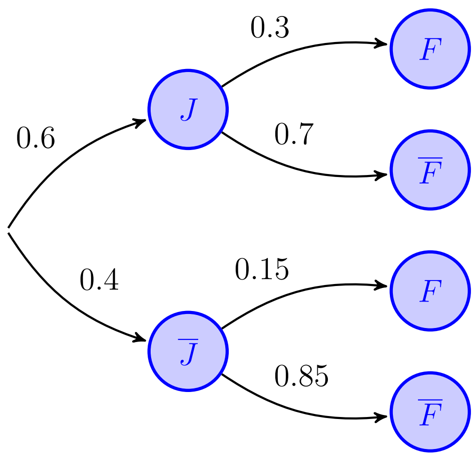
b) (1 punto) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$J \equiv$ "El niño juega más de lo recomendado"
$F \equiv$ "El niño tiene fracaso escolar"



a) $P(F) = P\Big((J \cap F) \cup (\overline{J} \cap F)\Big)$
$= P(J \cap F) + P(\overline{J} \cap F)$
$= P(J) \cdot P(F \mid J) + P(\overline{J}) \cdot P(F \cap \overline{J})$
$= 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.15 = 0.24$

b) $P(\overline{J} \mid F) = \dfrac{P(\overline{J} \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(\overline{J}) \cdot P(F \mid \overline{J})}{P(F)}$

$P(\overline{J} \mid F) = \dfrac{0.4 \cdot 0.15}{0.24} = 0.25$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5° y 6° de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1.5$ kilogramos.

a) (1 punto) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0.49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5.75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu; 1,5) \xrightarrow{n=?}$ I.C. de amplitud $2E = 0.49$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies \frac{0.49}{2} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \implies n = \left(\frac{1.96 \cdot 1.5}{0.245}\right)^2 \Rightarrow \boxed{n = 144 \text{ mochilas}}$$

b) $X : \mathcal{N}(6; 1.5) \xrightarrow{n=225} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6; \frac{1.5}{\sqrt{225}}\right) = \mathcal{N}(6; 0.1)$

$$P(\overline{X} \geq 5.75) = P\left(Z \geq \frac{5.75 - 6}{0.1}\right) = P(Z \geq -2.5) = P(Z \leq 2.5) = 0.9938$$

Junio 2019 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+(a+2)z=1 \\ x+y+az=0 \\ (a-1)x+2z=a+1 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a=2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a-1 & 0 & 2 & a+1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2-3a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{0, 3\}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=0 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A^*)=2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A^*)=3$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche} \text{Sistema Incompatible } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\cdot(-3) + 4\cdot 2 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 2\cdot 2 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}}$$

———— ∘ ————

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se consideran las funciones reales de variable real

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 5x + 20 \quad \& \quad g(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

a) *(1 punto) Hállese el punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente -3 y determínese la ecuación de esta recta tangente.*

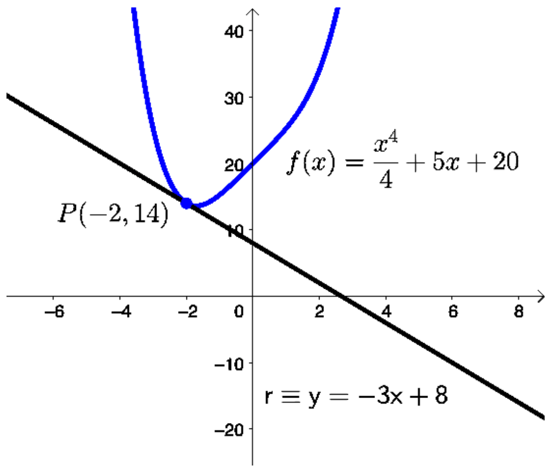
b) *(1 punto) Calcúlese el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de g, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje OX sea igual a 2 u^2.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Sea $P(x_0, y_0)$ el punto de tangencia.

$$f'(x) = x^3 + 5$$
$$m_r = f'(x_0) \implies -3 = x_0^3 + 5$$
$$\implies x_0 = -2 \implies y_0 = f(-2) = 14$$
$$\boxed{P(-2, 14)}$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - 14 = -3\cdot(x+2)$$
$$\boxed{r \equiv y = -3x + 8}$$



b) Hallamos los puntos de corte de la función $g(x)$ y el eje OX.

$$g(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2} = 0 \implies \nexists \text{ Pto. corte en } (0,1)$$

Esto es debido a que $\dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ y para que la suma sea cero $\dfrac{ax}{x^2+1} < 0$.

Como $\begin{cases} a > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \implies x < 0$. Por lo que en el intervalo $(0,1)$ no habrá puntos

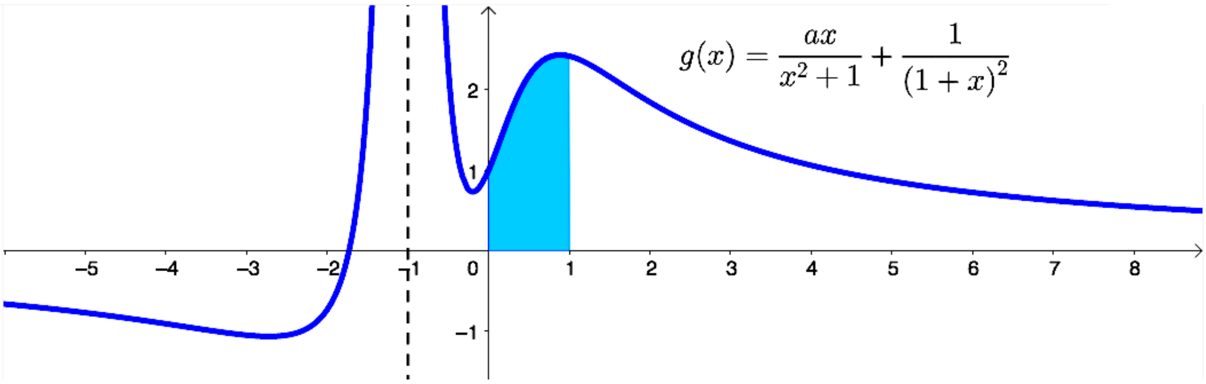
de corte.
Tenemos por tanto un único recinto de intetración $A_1 = (0.1)$.

$$A_1 = \int_0^1 g(x\,dx) = \int_0^1 \left(\frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = a \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

$$+ \int_0^1 (1+x)^{-2}\, dx = \frac{a}{2} \ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{1+x}\bigg]_0^1 = \left(\frac{a}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a}{2}\cancelto{0}{\ln 1} - 1\right)$$

$$= \frac{a}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{a \ln 2 + 1}{2}$$

$$Area = |A_1| = \left| \frac{a\ln 2 + 1}{2} \right| = \frac{a \ln 2 + 1}{2} = 2 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{3}{\ln 2} \simeq 4.33}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Dada la función real de variable real:*
>
> $$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$
>
> a) *(1 punto) Determínese el dominio y las asíntotas de $f(x)$.*
>
> b) *(1 punto) Obténganse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

a) Las raíces del denominador son: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \{1, 3\}$ por lo que el dominio de la función será: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador.

  - $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

  - $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{9}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A.Horizontal` $y = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ A.H. en $y = 1$

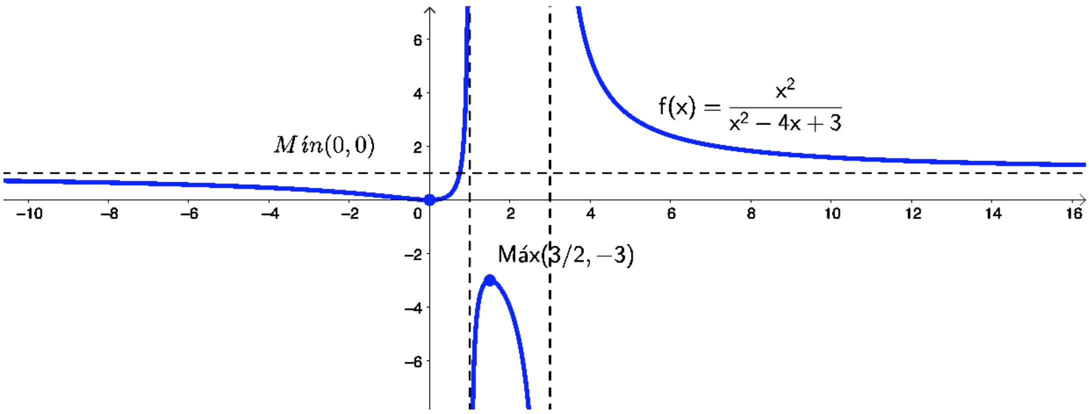
b) Hallamos los puntos singulares y los representamos en la recta real junto con las asíntotas verticales:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4x+3) - x^2\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x^2 + 6x - \cancel{2x^3} + 4x^2}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x\cdot(x-3/2)}{(x^2-4x+3)^2} = 0 \implies \begin{cases} -4x = 0 \implies x = 0 \\ x - 3/2 = 0 \implies x = 3/2 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	(0.1)	$(1, 3/2)$	$(3/2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	+	-	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0.1) \cup (1, 3/2)$ y *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(3/2, -3)$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una panadería se elabora pan de dos tipos: blanco y cereales. Uno de cada tres panes es de cereales. Un pan blanco tiene la misma probabilidad de estar elaborado con masa congelada que con masa fresca, mientras que la probabilidad de que un pan de cereales se elabore con masa fresca es de 0.6*. Se elige un pan al azar. Determínese la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Esté elaborado con masa fresca.

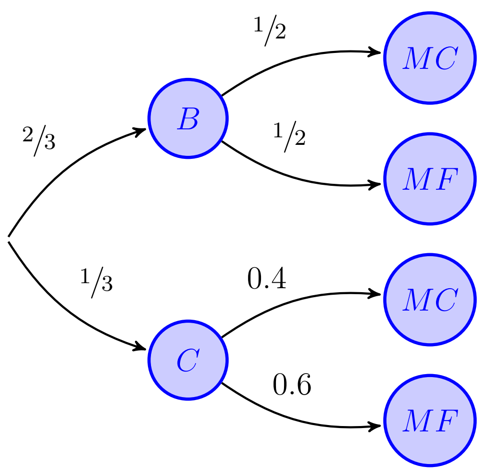
b) (1 punto) Sea de cereales sabiendo que está elaborado con masa congelada.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$B \equiv$ "El pan es blanco" $\qquad C \equiv$ "El pan es de cereales"

$MC \equiv$ "El pan es de masa congelada" $\qquad MF \equiv$ "El pan es de masa fresca"



a) $$\begin{aligned} P(MF) &= P\big((B\cap MF)\cup(C\cap MF)\big) \\ &= P(B\cap MF)+P(C\cap MF) \\ &= P(B)\cdot P(MF\mid B)+P(C)\cdot P(MF\mid C) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0.6 = 0.53 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(C\mid MC) &= \frac{P(C\cap MC)}{P(MC)} \\ &= \frac{P(C)\cdot P(MC\mid C)}{1-P(MF)} \\ &= \frac{1/3\cdot 0.4}{1-0.53} = 0.286 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 5 min, con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0.1587$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 5 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{10}{5}\right)^2 = 15.36 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(40, 5) \xrightarrow{n=?} \overline{X} : \mathcal{N}\left(40, \dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{10/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.1587 \implies P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.8413$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{\sqrt{n}}{5} = 1.00 \implies \sqrt{n} = 5 \implies \boxed{n = 25}$$

Junio 2019 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices A, B y C siguientes, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determínense los valores de a, b y c para que se verifique

$$C \cdot A = B \cdot C \quad y \quad |C| = 2$$

Nota: $|C|$ es el determinante de la matriz C.

b) (1 punto) Calcúlese, para los valores $a = b = c = 1$, $C^{-1} \cdot B \cdot C$ y B^{100}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $C \cdot A = B \cdot C \quad \& \quad |C| = 2$

$$C \cdot A = B \cdot C \implies \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6+2a & 6+2a \\ -3b+2c & -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -c \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 6+2a = 0 \implies \boxed{a = -3} \\ -3b+2c = -b \implies b = c \\ -3b+2c = -c \implies b = c \end{cases}$$

$$|C| = 2 \implies -2c - ab = 2 \xrightarrow[a=-3]{b=c} -2b + 3b = 2 \implies \boxed{b = c = 2}$$

b) Para $a = b = c = 1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = -3 \implies C^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} \cdot B \cdot C = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -B$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$B^n = \begin{cases} -B & \text{si } n \text{ es par} \\ B & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \implies B^{100} = -B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Para el mantenimiento de las piscinas de cierto hotel se quiere utilizar cloro de disolución lenta CL y cloro estabilizado (CE). El hotel quiere que la cantidad de cloro que se use en la temporada de verano, sea como mucho 500 kg y la cantidad de cloro de disolución lenta sea mayor que la cantidad de cloro estabilizado al menos en 100 kg. No podrán utilizarse más de 350 kg de cloro de disolución lenta ni menos de 100 kg de cloro estabilizado. Cada kg de cloro de disolución lenta cuesta 30 euros, mientas que cada kg de cloro estabilizado cuesta el doble.

a) (1 punto) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) (1 punto) Se desea que el gasto, respetando las características anteriores, sea el mínimo posible. Determínense las cantidades de cloro de cada tipo que deben usarse para minimizar los costes. Obténgase el valor del coste mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Kg de cloro de disolución lenta (CL)"
  $y \equiv$ "Kg de cloro estabilizado (CE)"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

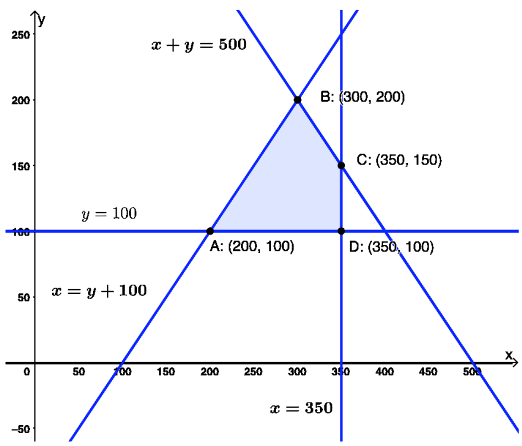
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 500 & \rightarrow (0,500) \quad \& \quad (500,0) \\ ② \; x \geq y + 100 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (300,400) \\ ③ \; x \leq 350 & \rightarrow (350,0) \\ ④ \; y \geq 100 & \rightarrow (0,100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo:` Coste del cloro. $f(x,y) = 30x + 60y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	200	100	12000
B	300	200	21000
C	350	150	19500
D	350	100	16500



Por tanto el *coste mínimo* es de 12000 euros y se produce con un consumo de 200 kg de cloro de disolució lenta (CL) y 100 kg de cloro estabilizado (CE).

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - a}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga tangente horizontal en $x = 3$.

b) (1 punto) Hállense las asíntotas de $f(x)$ para $a = 4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $m_r = f'(x_0) = f'(3) = 0$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - a) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - a)^2} = \frac{x^4 - 3ax^2}{(x^2 - a)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 3a)}{(x^2 - a)^2}$$

$$m_r = f'(3) = 0 \implies \frac{9 \cdot (9 - 3a)}{(9 - a)^2} = 0 \implies 9 - 3a = 0 \implies \boxed{a = 3}$$

b) Si $a = 4 \implies f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. Hallamos las asíntotas:

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$
  - $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle \lim_{x \to -2^-} f(x) = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty \\ \displaystyle \lim_{x \to -2^+} f(x) = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$
  - $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle \lim_{x \to 3^-} f(x) = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle \lim_{x \to 3^+} f(x) = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$
- `A.Horizontal` $\displaystyle y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \nexists\ A.H.$
- `A.Oblicua` $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 4)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - (x^3 - 4x)}{x^2 - 4}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{4x}{x^2 - 4}\right) = 0$$

Luego $\exists$ A.O. en $y = x$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{4} \quad \& \quad P(B \mid A) = \frac{1}{6} \quad \& \quad P(A) = \frac{2}{3}$$

Calcúlese:

a) (1 punto) $P\left(\overline{B} \cup \overline{A}\right)$.

b) (1 punto) $P\left(\overline{A} \cap B\right)$

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Antes de empezar vamos a ver qué podemos obtener de las probabilidades condicionadas que nos dan

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{2/3} = \frac{1}{6} \implies P(A \cap B) = \frac{1}{9}$$
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/9}{P(B)} = \frac{1}{4} \implies P(B) = \frac{4}{9}$$

Pasamos ahora a hallar lo que nos piden:

$$P\left(\overline{B} \cup \overline{A}\right) = P\left(\overline{B \cap A}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

b) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) Suponiendo $\mu = 3000$ €, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 € sea 0.20.

b) Suponiendo una desviación típica poblacional igual a 1000 € y el valor de μ desconocido, determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ, basado en la información de una muestra aleatoria simple de 100 locales comerciales en la que se observó un alquiler mensual medio de 3300 €.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(3000, \sigma) \xrightarrow{n=49} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} > 3125) = P\left(Z > \frac{3125 - 3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z > \frac{875}{\sigma}\right) = 1 - P(Z < \frac{875}{\sigma}) = 0.20$$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{875}{\sigma}\right) = 0.80 \xrightarrow{Tabla} \frac{875}{\sigma} = 0.845 \Longrightarrow \boxed{\sigma = 1035.5}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3300$

$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0.025 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1000}{\sqrt{100}} = 196$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (3104, 3496)}$

Julio 2019 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) (1 punto) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz cuadrada A tenga inversa el determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = a^2 + 0 + 4 - (2a + 4 + 0) = a^2 - 2a = a \cdot (a-2) = 0 \implies \boxed{a = \{0, 2\}}$$

b) Para $a = 3$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cuya inversa hallaremos por el método de los adjuntos.

$$|A| = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \qquad \& \qquad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies I \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

a) (1 punto) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.

b) (1 punto) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) $m_r = f'(x) = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4/3}$

b) Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX.

$$2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow 2x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Longrightarrow x = \{-2, 0, 2\}$$

lo que me genera un recinto de integración $A_1 = (0, 2)$. De esta forma:

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2x^3 - 8x)\,dx = \left.\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2 \cdot 2^4}{4} - \frac{8 \cdot 2^2}{2} - 0 = -8$$

Area $= |A_1| = |-8| = 8\ u^2$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} & si\ x < 3 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de f.

b) (1 punto) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$.

- Si $x < 3$ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$, luego no es continua en $x = -3$ en donde la función tiene una asíntota vertical.
- Si $x > 3$ $f(x) = x^2 - 4$ que es continua por ser un polinomio
- Si $x = 3$
  - $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\frac{27}{0}\right] = -\infty$

- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} x^2 - 4 = 5$
- $f(3) = 3^2 - 4 = 5$

Luego en $x = 3$ la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

De esta forma $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

b) Asíntotas Verticales: las analizamos en $x = \pm 3$

- $\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x \to -3^-} & \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim_{x \to -3^+} & \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$
- $\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} & \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} & x^2 - 4 = 5 \end{cases}$

Asíntotas Horizontales: No hay asíntotas horizontales

- $y = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -\infty \implies \nexists$ A.H.
- $y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 4 = +\infty \implies \nexists$ A.H.

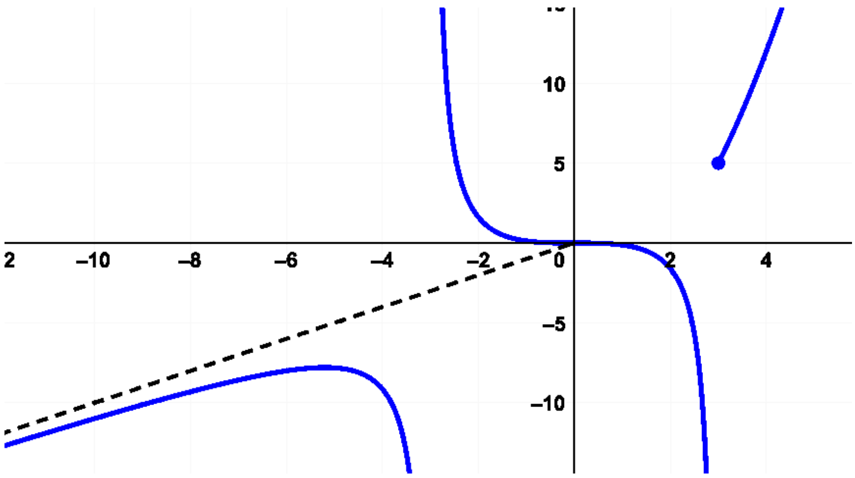
Asíntotas Oblicuas:

- Cuando $x \to -\infty$ la asíntota oblicua es

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -\infty} x + \frac{9x}{x^2 - 9} \implies y = x + 0^-$$

- Cuando $x \to +\infty$ no hay asíntota oblicua pues

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio.

a) (1 punto) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

E ≡ El alumno hace ejercicio regularmente
D ≡ El alumno desayuna diariamente

En el enunciado nos dicen que.

$$P(E) = \frac{2}{5} \qquad \& \qquad P(D) = \frac{2}{3} \qquad \& \qquad P(E \mid D) = \frac{9}{25}$$

a) Dos sucesos E y D son independientes si $P(E \cap D) = P(E) \cdot P(D)$.

$$P(E \mid D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{9}{25} \implies P(E \cap D) = \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{25}$$

$$P(E) \cdot P(D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \neq \frac{6}{25} \implies \text{ los sucesos } D \text{ y } E \text{ no son independientes}$$

b) $P(\overline{E} \cap \overline{D}) = P(\overline{E \cup D}) = 1 - P(E \cup D) = 1 - [P(E) + P(D) - P(E \cap D)]$

$$= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{6}{25}\right) = 1 - \frac{62}{75} = \frac{13}{75}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) *(1 punto) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.*

b) *(1 punto) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

Sea $X \equiv$ Peso de los paquetes de harina, entonces $X : \mathcal{N}(\mu, 25)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 560 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}} = 12.65$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (547.35; 572.65)}$$

b) $X : \mathcal{N}(560, 25) \xrightarrow{n=50} \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(560, \dfrac{25}{\sqrt{50}}\right) = \mathcal{N}(560, 3.54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565-560}{3.54}\right) = P(Z \geq 1.41) = 1 - P(Z \leq 1.41)$$

$$= 1 - 0.9207 = 0.0793$$

Julio 2019 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características.
El estanque deberá tener al menos 2 *metros de ancho y al menos* 5 *metros de largo. Además su largo debe ser al menos* 2 *veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta* 1000 *euros y cada metro de largo* 500 *euros. Y se cuenta con un presupuesto de* 9000 *euros.*

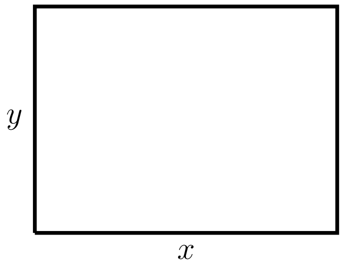
a) (1 punto) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensione del estanque.

b) (1 punto) Si se desea que el estanque, respetando esas características, tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

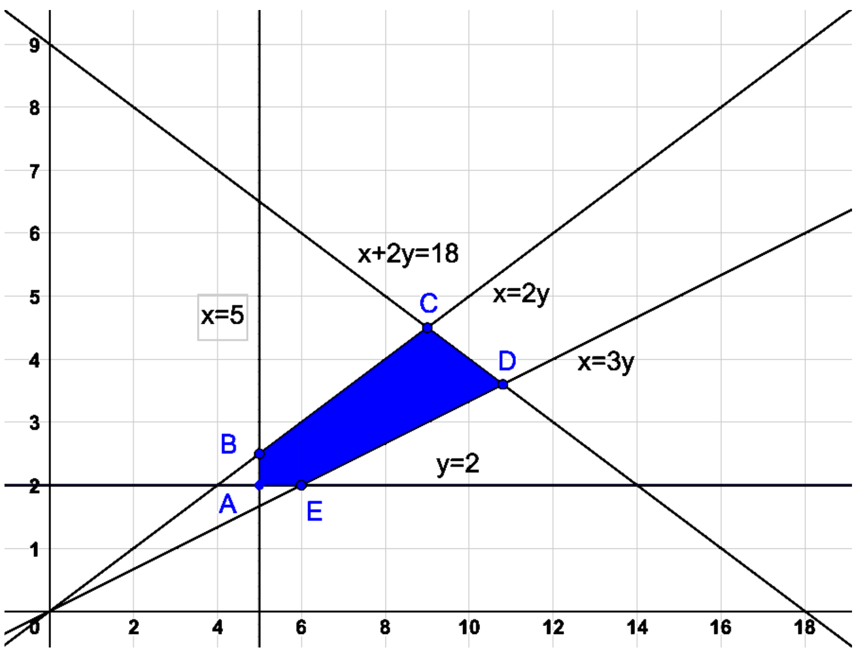
a)



Región Factible

$$\begin{cases} ① \ y \geq 2 & \rightarrow \quad (0,2) \\ ② \ x \geq 5 & \rightarrow \quad (5,0) \\ ③ \ x \geq 2y & \rightarrow \quad (0,0) \quad \& \quad (2,1) \\ ④ \ x \leq 3y & \rightarrow \quad (0,0) \quad \& \quad (3,1) \\ ⑤ \ x + 2y \leq 18 & \rightarrow \quad (18,0) \quad \& \quad (0,9) \\ x, \ y \geq 0 & \end{cases}$$

La ec. ⑤ sale de: $1000y + 500x \leq 9000 \implies x + 2y \leq 18$



b) Si queremos la solución con mayor ancho ($y_{\text{máx}}$) hemos de coger el punto de la frontera de la región factible con mayor ordenada. En este caso $C(9, 4.5)$, cuyo coste es de 9000 euros pues se encuentra sobre la recta ⑤ $\equiv x + 2y = 18$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcúlese A^{-1}.

b) (1 punto) Calcúlese B^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos la matriz A^{-1} por el método de los adjuntos.

$$|A| = 18 + 64 + 60 - (40 + 96 + 18) = -12 \quad \& \quad \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -18 & -22 & 23 \\ 6 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

b) Si llamamos $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot C \implies B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1}A}_{I} = \frac{1}{2} \cdot CA \implies B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot CA$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) *(1 punto) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.*

b) *(1 punto) Deteminense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Corte con OY: $x = 0 \implies y = 3 \implies (0,3)$
Corte con OX: $y = 0 \implies x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \xrightarrow{Ruffini} x = \{-3, 1\} \implies (-3,0) \quad \& \quad (1,0)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + x^2 - 5x + 3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x^2 - 5x + 3) = +\infty$

b) $m_r = f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4/3 \end{cases}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos con:

$$P(A) = 0.3 \quad \& \quad P(B \mid A) = 0.4 \quad \& \quad P(B \mid \overline{A}) = 0.6$$

. Calcúlese:

a) *(1 punto) $P(A \mid B)$*

b) *(1 punto) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$*

Nota: $\overline{S}$ *denota al suceso complementario de suceso S*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \implies P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$

$P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{P(B) - 0.12}{1 - 0.3} = 0.6$

$\implies P(B) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.12 = 0.54$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)} = \dfrac{0.12}{0.54} = 0.222$

b) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$

$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(B)} = \frac{1 - (0.3 + 0.54 - 0.12)}{1 - 0.54} = 0.609$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0.22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) (1 punto) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 habían faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $p = 0.22 \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.99 \quad \& \quad \varepsilon < 0.04$

$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < 0.04 \implies n > \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{0.04}\right)^2 = \left(2.575 \cdot \frac{\sqrt{0.22 \cdot 0.78}}{0.04}\right)^2 = 711.13$$

Luego $\boxed{n = 712 \text{ trabajadores}}$

b) $n = 1000 \quad \& \quad p = \dfrac{250}{1000} = 0.25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{1000}} = 0.0268$$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (0.2231; 0.2768)}$

Julio 2019 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcúlese $A \cdot B$ y determínense los valores de x para los cuales $A \cdot B$ es invertible.*

b) *(1 punto) Calculese la inversa de $A \cdot B$ cuando $x = 1$*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Hallamos la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz $A \cdot B$ sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero:

$$|A \cdot B| = -x + 2 \neq 0 \implies x \neq 2 \implies \exists (A \cdot B)^{-1} \ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

b) Si $x = 1 \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies |A \cdot B| = -1 + 2 = 1.$

Hallamos $(A \cdot B)^{-1}$ por el método de los adjuntos.

$$\mathrm{Adj}(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{|A \cdot B|} \cdot \mathrm{Adj}(A \cdot B)^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$3x - y \geq 5\,; \quad 3y - x \geq 1\,; \quad y + x \leq 7$$

a) (1 punto) Represéntese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Determínese el valor máximo de la función $f(x, y) = x + 4y$ en S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Función objetivo:`
$$f(x, y) = x + 4y$$

- `Región S:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

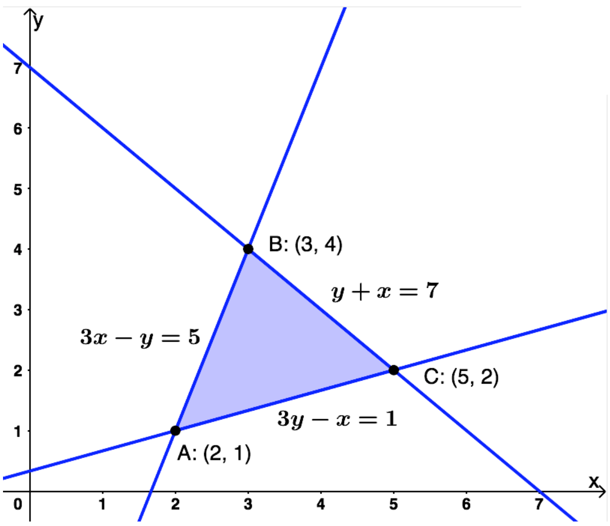
$$S = \begin{cases} ① \; 3x - y \geq 5 & \rightarrow (0, -5) \quad \& \quad (5/3, 0) \\ ② \; 3y - x \geq 1 & \rightarrow (0, 1/3) \quad \& \quad (-1, 0) \\ ③ \; y + x \leq 7 & \rightarrow (0, 7) \quad \& \quad (7, 0) \end{cases}$$

- `Función Objetivo:`
$$f(x, y) = x + 4y$$

- `Región factible:` Representamos S y calculamos los vértices de la misma.

- `Optimización de la fución objetivo:`

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	1	6
B	3	4	19
C	5	2	13



Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $B(3, 4)$ y vale 19.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

a) *(1 punto) Determínense las asíntotas verticales y horizontales de f, si las hubiese.*

b) *(1 punto) Calcúlese la derivada de $f(x)$, para los valores de x en donde f es derivable y determínese la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador: $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$
  - $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$
  - $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$
- `A.Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0 \implies$ A.H. en $y = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - (x+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2-2x-4}{(x^2-4)^2} \implies m_r = f'(1) = -\dfrac{7}{9}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una única carta, escogida al azar, es eliminada, sin ser vista, de una baraja española de 40 cartas, 10 cartas de cada palo (espadas, copas, oros y bastos). Una vez eliminada se escoge al azar otra carta, entre las qe quedan en el mazo, y se observa.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que la carta observada sea del palo de espadas.

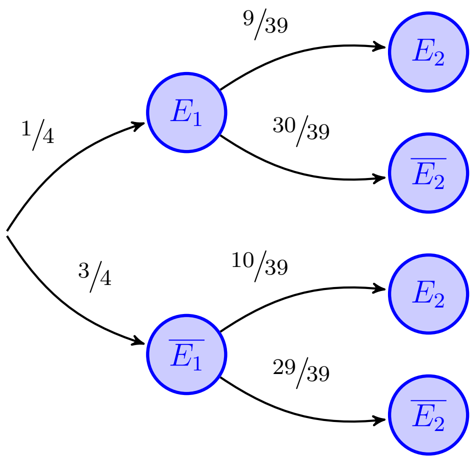
b) (1 punto) Si la carta observada no es del palo de espadas, calcúlese la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$$E_1 = \text{“La carta eliminada es de espadas”}$$
$$E_2 = \text{“La carta observada es de espadas”}$$



a) $$P(E_2) = P\Big((E_1 \cap E_2) \cup (\overline{E_1} \cap E_2)\Big)$$
$$= P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E_1} \cap E_2)$$
$$= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) + P(\overline{E_1}) \cdot P(E_2 \mid \overline{E_1})$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} + \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{39} = \frac{1}{4}$$

b) $$P(\overline{E_1} \mid \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_2})}$$
$$= \frac{P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1})}{1 - P(E_2)}$$
$$= \frac{3/4 \cdot 29/39}{1 - 1/4} = \frac{29}{39}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En las especificaciones de una máquina tragaperras se establece que la proporción P de veces que la máquina devuelve algo a quien la use es $1/4$.

a) (1 punto) Utilice la aproximación por la distribución normal para calcular la probabilidad de obtener al menos 20 devoluciones de 100 veces que se juega.

b) (1 punto) Sin tomar en cuenta las especificaciones, si en 100 juegos la máquina devolvió algo al jugador sólo en 15 ocasiones, calcúlese un intervalo de confianza del 99 % para la proporción P.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X:\mathcal{B}(100,{}^1\!/\!_4)\begin{cases} n>10 \\ np=100\cdot{}^1\!/\!_4=25>5 \\ nq=100\cdot{}^3\!/\!_4=75>5\end{cases} \xrightarrow{Yates} Y:\mathcal{N}\Big(np=25,\sqrt{npq}=4.33\Big)$

$$P(X\geq 20)=P(Y>19.5)=P\Big(Z>\frac{19.5-25}{4.33}\Big)=P(Z>-1.27)$$
$$=P(Z<1.27)=0.9880$$

b) $\hat{p}=\dfrac{15}{100}=0.15 \quad \& \quad \hat{q}=1-\hat{p}=0.85 \quad \& \quad 1-\alpha=0.99$

$$1-\alpha=0.99 \implies \alpha=0.01 \implies {}^\alpha\!/\!_2=0.005 \implies 1-{}^\alpha\!/\!_2=0.995 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2}=2.575$$

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}}=2.575\cdot\sqrt{\frac{0.15\cdot 0.85}{100}}=0.092$$

$$I.C._{95\,\%}(p)=(\hat{p}-E,\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p)=(0.058;0.242)}$$

Julio 2019 (coincidentes)
OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ ax-z=3 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\}$$

a) *(1 punto) Discútase la unicidad de la solución del sistema en función del valor de a.*

b) *(1 punto) Resuélvase el sistema para $a=1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) (1 punto) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a+2 = 0 \implies a = 2$$

- (1 punto) Si $a \neq 2$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=1$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$

estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad x + 4 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -y - (-6) = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -z = 6 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \\ z = -6 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 2 = 0 \\ \boxed{a = 2} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 1$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad z + 2 \cdot 4 = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad y - 3 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -x = 3 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} z = -6 \\ y = 4 \\ x = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ a + e^{-5x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese el valor de a para que la función sea continua en $x = 0$.

b) (1 punto) Para $a = 1/5$, calcúlese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1/5$ y la gráfica de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - x) = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(a + e^{-5x}\right) = a + 1 \\ \bullet\ f(0) = a + e^0 = a + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow a + 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -1}$$

b) Para $a = 1/5 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{5} + e^{-5x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Como nos piden el área comprendida entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1/5$ trabajaremos únicamente con $f_2(x) = \dfrac{1}{5} + e^{-5x}$

Los puntos de corte de $f_2(x)$ con el eje OX serán:

$$\frac{1}{5} + e^{-5x} = 0 \Longrightarrow e^{-5x} = -\frac{1}{5} \Longrightarrow \nexists \text{ Sol. pues } e^{-5x} > 0$$

Lo que determina un único recinto de integración $A_1 = (0, 1/5)$ formado por las rectas $x = 0$ y $x = 1/5$

$$A_1 = \int_0^{1/5} f_2(x)\,dx = \int_0^{1/5} \left(\frac{1}{5} + e^{-5x}\right) dx = \left.\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}e^{-5x}\right]_0^{1/5} = \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5e}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{6}{25} - \frac{1}{5e} \simeq 0.166$$

$$Area = |A_1| = \frac{6}{25} - \frac{1}{5e} \simeq 0.166\ u^2$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función de variable real

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x}$$

a) (1 punto) Determínense las asíntotas verticales y horizontales, si las hubiese.

b) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- `A. Vertical` Se busca las asíntotas verticales entre las raíces del denominador:

$$x^2-2x=0 \implies x\cdot(x-2)=0 \implies x=\{0,2\}$$

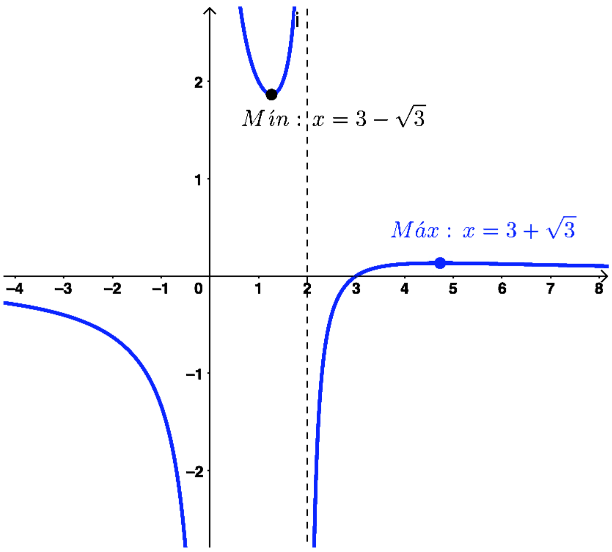
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \left[\dfrac{-3}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left[\dfrac{-3}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$
  - $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$
- `A.Horizontal` $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0 \implies$ A.H. en $y=0$
- `A.Oblícua` Como hay A. Vertical no existe oblícua.

b) Hallamos los puntos singulares y estudiamos el signo de la derivada, cuidando de incluir las asíntotas verticales:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-(x-3)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2} = 0 \implies x = 3\pm\sqrt{3}$$

	$\left(-\infty, 3-\sqrt{3}\right)$	$\left(3-\sqrt{3}, 0\right)$	$(0,2)$	$\left(2, 3+\sqrt{3}\right)$	$\left(3+\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	-	-	+	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0,2)\cup\left(2,3+\sqrt{3}\right)$ y *decreciente* en $\left(-\infty,3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3-\sqrt{3},0\right)\cup\left(3+\sqrt{3},+\infty\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $x=3-\sqrt{3}$ y un *máximo relativo* en $x=3+\sqrt{3}$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se lanza un dado para decidir si se va al cine o al teatro. Si sale 1 o 6 se va al teatro, en caso contrario al cine. Luego, se escoge una función al azar, de cine o teatro, según lo que haya indicado el dado. El 50 % de las funciones de teatro son comedias mientras que sólo 112 de las 448 funciones de cine lo son.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de ver una comedia.

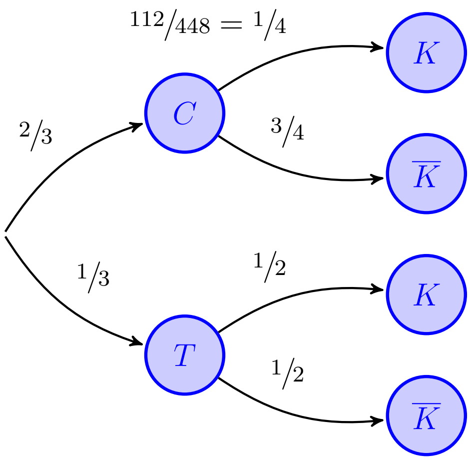
b) (1 punto) Si el resultado fue no ver comedia, calcúlese la probabilidad de que haya sido en el teatro.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“Se va al cine”}$$
$$T \equiv \text{“Se va al teatro”}$$
$$K \equiv \text{“Se ve una comedia”}$$



a) $$\begin{aligned} P(K) &= P\big((C \cap K) \cup (T \cap K)\big) \\ &= P(C \cap K) + P(T \cap K) \\ &= P(C) \cdot P(K \mid C) + P(T) \cdot P(K \mid T) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) $$P(T \mid \overline{K}) = \frac{P(T \cap \overline{K})}{P(\overline{K})} = \frac{P(T) \cdot P(\overline{K} \mid T)}{1 - P(K)} = \frac{{}^1/_3 \cdot {}^1/_2}{1 - {}^1/_3} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La factura, en euros, de una cena para una persona, reservando en pucherodelujo.com *se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media* $\mu = 25$ *y desviación típica* $\sigma = 5$.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el coste medio por comensal, de 9 personas escogidas al azar que reserven en la página, no sea mayor que 30 euros.

b) (1 punto) Determínese el número mínimo de comensales que debería tener una muestra aleatoria simple para que el coste medio por comensal no exceda los 30 euros con probabilidad no inferior a 0.95.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(25, 5) \xrightarrow{n=9} \overline{X} : \mathcal{N}\left(25, \frac{5}{\sqrt{9}} = 1.67\right)$$

$$P(\overline{X} < 30) = P\left(Z < \frac{30-25}{1.67}\right) = P(Z < 3) = 0.9987$$

b) $n =?$ & $1-\alpha = 0.95$ & $E \leq 5$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 5 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{5}{5}\right)^2 = 3.84 \implies \boxed{n = 4}$$

2020

Curso 2019/20

Modelo 2020

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que se verifique $A^2 = 2I$.

b) (1 punto) Para $a = 0$ y $b = 2$ determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b=2 & \Rightarrow (-2)^2-2=2 \checkmark \\ a+2=0 & \Rightarrow \boxed{a=-2} \\ ab+2b=0 & \Rightarrow -2\cdot(-2)+2\cdot(-2)=0 \checkmark \\ b+4=2 & \Rightarrow \boxed{b=-2} \end{cases}$$

b) Para $a = 0$ y $b = 2$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$XA = B - X \implies XA + X = B$$
$$X \cdot (A+I) = B \implies X \cdot \underbrace{(A+I)\cdot(A+I)^{-1}}_{I} = B \cdot (A+I)^{-1}$$
$$\boxed{X = B \cdot (A+I)^{-1}}$$

$$A+I=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad \& \quad |A+I|=1 \quad \& \quad (A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=B\cdot(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-x+a & si\ x<-8\\ \sqrt[3]{x} & si\ -8\leq x<1\\ \ln x & si\ x\geq 1\end{cases}$$

donde ln *denota el logaritmo neperiano y $a\in\mathbb{R}$. Se pide:*

a) (1 punto) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa $x=-8$ y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.

b) (1 punto) Obtener la recta tangente a la función en el punto $x=e$ y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

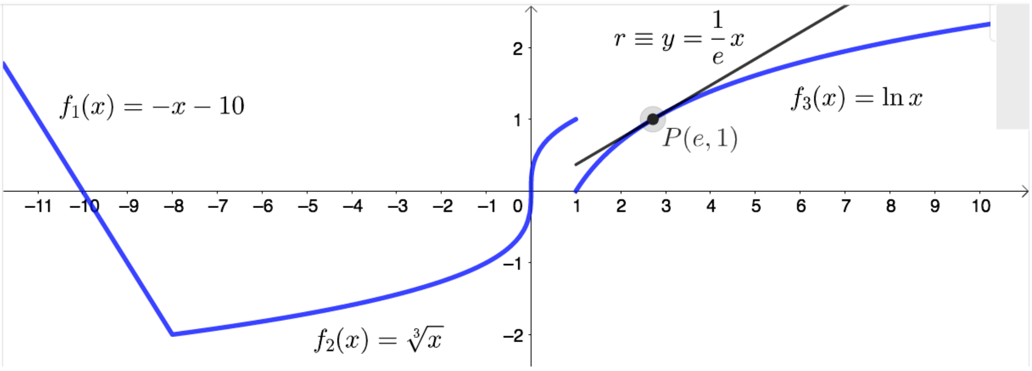
a)
- Si $x<-8\Rightarrow f(x)=-x+a$, que es continua en $\mathbb{R}$
- Si $-8<x<1\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x}$, que es continua en $\mathbb{R}$
- Si $x>1\Rightarrow f(x)=\ln x$, que es continua en $x>0$, luego continua
- Si $x=-8$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-8^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-8}(-x+a)=a+8\\ \lim\limits_{x\to-8^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-8}\sqrt[3]{x}=-2\\ f(-8)=\sqrt[3]{-8}=-2\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{c}f(x) \text{ será cont. en } x=-8 \text{ si:}\\ a+8=-2\Longrightarrow \boxed{a=-10}\end{array}$$

- Si $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{x}=1\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\ln x=0\\ f(1)=\ln 1=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{c}f(x) \text{ tiene una discontinuidad}\\ \text{de salto finito en } x=1\end{array}$$

b) Hallamos la recta tangente en $x=e$, en donde $f(x)=\ln x$.



$x_0 = e \implies y_0 = f(e) = \ln e = 1 \implies (x_0, y_0) = (e, 1)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \implies m_r = f'(x_0) = f'(e) = \frac{1}{e}$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 1 = \frac{1}{e} \cdot (x - e) \implies \boxed{y = \frac{1}{e}x}$

Como la pendiente de la recta $m_r = \dfrac{1}{e} > 0$, la recta es creciente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la curva

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

a) *(1 punto) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta* $y - 6x + 1 = 0$*, indicando su abscisa y ordenada.*

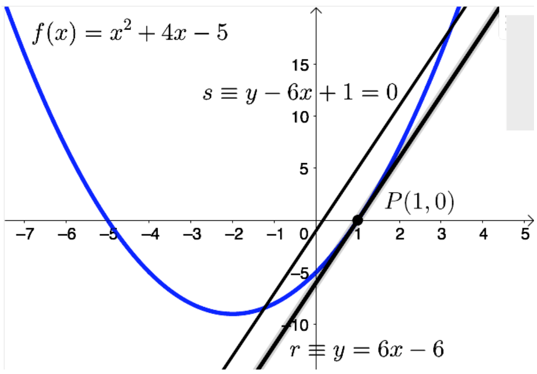
b) *(1 punto) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráfica de* $f(x)$ *y la curva* $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

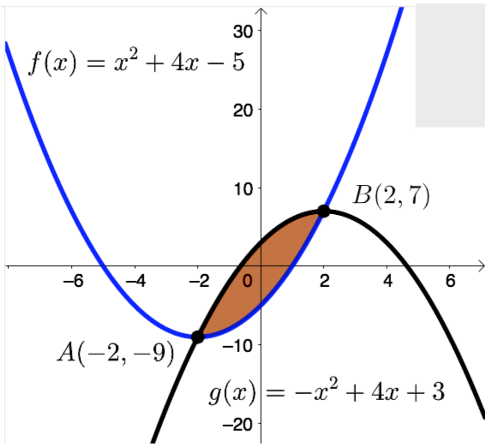
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) La recta r buscada es paralela a $s \equiv y - 6x + 1 = 0$

$$r \parallel s \implies m_r = m_s = 6$$
$$f'(x) = 2x + 4$$
$$m_r = f'(x_0) \implies 6 = 2x_0 + 4$$
$$x_0 = 1 \implies y_0 = f(1) = 0 \implies \boxed{P(1, 0)}$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y = 6 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = 6x - 6$$





b) Creamos una nueva función $h(x) = f(x) - g(x)$ y hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$h(x) = x^2 + 4x - 5 - (-x^2 + 4x + 3)$$
$$= 2x^2 - 8 = 0 \implies x = \pm 2$$

Luego tenemos un único recinto de integración $A_1 = (-2, 2)$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} h(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\,dx = \left.\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2 \cdot 2^3}{3} - 8 \cdot 2\right)$$
$$-\left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} - 8 \cdot (-2)\right) = -\frac{64}{3}$$
$$Area = |A_1| = \left|-\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que solo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

a) (1 punto) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.

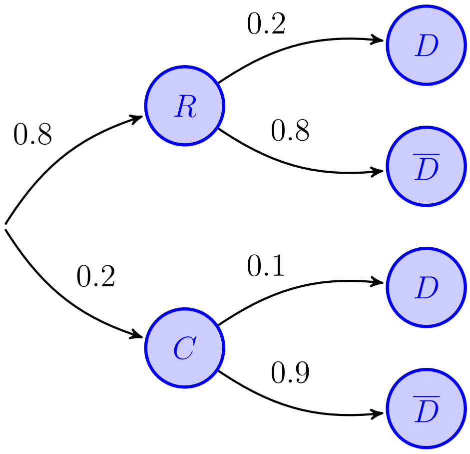
b) (1 punto) Sea devuelta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$R \equiv$ “La venta es de ropa”
$C \equiv$ “La venta es de complementos de moda”
$D \equiv$ “La compra es devuelta”



a) $P(R \cap D) = P(R) \cdot P(D \mid R)$
$= 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

b) $P(D) = P\big((R \cap D) \cup (C \cap D)\big)$
$= P(R \cap D) + P(C \cap D)$
$= P(R) \cdot P(D \mid R) + P(C) \cdot P(D \mid C)$
$= 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.18$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0.09 mg^2.

a) (1 punto) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.

b) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0.05 mg con un nivel de confianza del 98 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) Nos dice que la varianza $\sigma^2 = 0.09 \implies \sigma = 0.3$

$X \equiv$ "Cantidad de principio activo" $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 0.3) \xrightarrow{n=400} \overline{x} = 13$

$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.005 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \dfrac{0.3}{\sqrt{400}} = 0.039$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (12.961; 13.039)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1-\alpha = 98\,\% \qquad \& \qquad E < 0.05$

$1-\alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.1 \implies 1-\alpha/2 = 0.99 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{0.3}{\sqrt{n}} < 0.05 \implies n > \left(\dfrac{2.325 \cdot 0.3}{0.05}\right)^2 = 194.6 \implies \boxed{n = 195}$

Modelo 2020
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Proporcione el valor de m para que $A \cdot B = C^\top$

b) (1 punto) Para $m = 0$ calcule B^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Vamos a obligar a que $A \cdot B = C^\top$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{C^\top}$$

Igualando ahora elemento a elemento tenemos:

$$\begin{cases} 2m-1 = 3 & \Longrightarrow \boxed{m = 2} \\ m+2 = 4 & \Longrightarrow m = 2 \checkmark \\ m-1 = 1 & \Longrightarrow m = 2 \checkmark \end{cases}$$

b) Para $m = 0$ la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |B| = 1$

$$\text{Adj}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj}B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ay + z = 6 \\ 2x - y + z = a - 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Discuta el sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -1 - 3a = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

- Si $a \neq -\frac{1}{3}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -\frac{1}{3} \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 6 \\ 2 & -1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{56}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Como $a \neq -1/3$, estamos ante un S. C. D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 5F_2 + 3F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 2 + 1 = 6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 1 = -11 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 7z = 7 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2}$$

a) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) (1 punto) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ *y* $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x^2} + \sqrt{2}x\cdot(-2x)e^{-x^2} = \sqrt{2}e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$(\sqrt{2}/2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

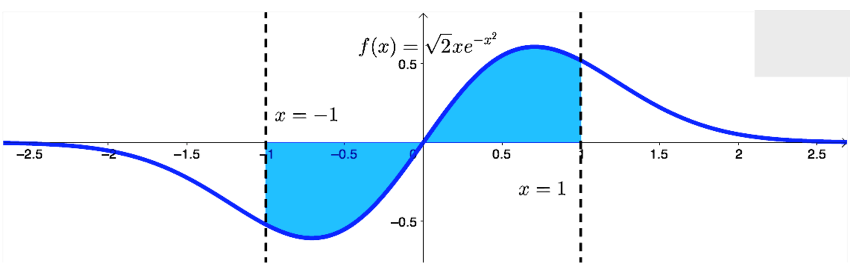
La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y *decreciente* en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y un *máximo relativo* en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2}xe^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{2}xe^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt{2}x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$\stackrel{\text{L'Hòpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt{2}}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{-\sqrt{2}}{+\infty}\right] = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2} = 0 \implies \begin{cases} \sqrt{2}x \implies x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

Lo que, junto con las rectas verticales, define dos recintos de integración: $A_1(-1, 0)$ y $A_2(0, 1)$.



$$A_1 = \int_{-1}^{0} \sqrt{2}xe^{-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}\Big]_{-1}^{0} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2e}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} \sqrt{2}xe^{-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}\Big]_{0}^{1} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2e}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{e}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{1}{e}\right) \simeq 0.894\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se lanza un dado para decidir el número de veces que se lanza una moneda.

a) (1 punto) Obtenga la probabilidad de no observar ninguna cruz.

b) (1 punto) Dado que no se observó ninguna cruz, ¿cuál es la probabilidad de haber lanzado la moneda 2 veces?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) El número de cruces obtenidas al lanzar una moneda al aire n veces es una variable binomial $X : \mathcal{B}(n, 1/2)$, pues la probabilidad de obtener una cruz es $p = 1/2$, y por tanto $q = 1 - p = 1/2$.
La probabilidad de sacar r cruces en los n lanzamientos será:

$$P(X=r) = \binom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r} = \binom{n}{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{r+n-r} = \binom{n}{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Y, más en concreto, la probabilidad de obtener cero cruces en n lanzamientos será $P(X=0) = \binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Llamamos ahora $D_i \equiv$ "Sacar i en el lanzamiento del dado", con una probabilidad $P(D_i) = \frac{1}{6}$.

De esta forma la probabilidad de lanzar el dado y obtener cero cruces será:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(D_1 \cap X = 0) + P(D_2 \cap X = 0) + \cdots + P(D_6 \cap X = 0)\\
&= P(D_1)\cdot P(X=0 \mid D_1) + \cdots + P(D_6)\cdot P(X=0 \mid D_6)\\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\\
&= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right] = \frac{1}{6}\cdot S_6 = \left\{\begin{array}{c}\text{Prog. geométrica}\\ a_1 = 1/2 \quad \& \quad r = 1/2\\ S_n = \dfrac{a_n r - a_1}{r-1}\end{array}\right\}\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{6}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right] = 0.164
\end{aligned}$$

b) $$P(X=0 \mid D_2) = \frac{P(X=0\cap D_2)}{P(D_2)} = \frac{P(D_2)\cdot P(X=0\mid D_2)}{P(D_2)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{0.164} = 0.2541$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450$ g.

a) *(1 punto) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\overline{x} = 2700$ g, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.*

b) *(1 punto) Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000$ g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pesen en media entre 3000 g y 3450 g.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Peso sandías (g)" & $X : \mathcal{N}(\mu, 450) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 2700$ & $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{450}{\sqrt{25}} = 176.4$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (2523.6, 2876.4)}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 450) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{450}{\sqrt{4}}\right) = \mathcal{N}(3000, 225)$

$$P(3000 < X < 3450) = P\left(\frac{3000 - 3000}{225} < Z < \frac{3450 - 3000}{225}\right) = P(0 < Z < 2)$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

Julio 2020 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay=0 \\ x+2z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{array}\right\}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a=0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 - a = -a \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-1, 0\}$$

- Si $a \neq \{-1, 0\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es neceesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -2 & 0 \\ 0 & a & a-1 & a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-1, 0\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $a = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) *(1 punto) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en en este punto.*

b) *(1 punto) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{4x - x^3 + (12x + 4x^2)}{3x + x^2} = \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2}$$

a) $3x + x^2 = 0 \implies x = \{-3, 0\} \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$
Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0 \implies \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot (-x^2 + 4x + 16)}{\cancel{x} \cdot (3 + x)} = \frac{16}{3}$$

Por tanto para que f(x) sea continua en $x = 0$, $f(0) = \dfrac{16}{3}$

b)
- `A. Vertical` Buscamos las A. verticales entre las raíces del denominador.
  - $$\lim_{x \to -3} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} = \left[\frac{15}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \left[\dfrac{15}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \left[\dfrac{15}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
  - $$\lim_{x \to 0} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} = \frac{16}{3} \implies \nexists \text{ A. V. en } x = 0.$$
- `A. Horizontal` $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.
- `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x^2 + x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-1}{1} = -1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} + x\right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-\cancel{x^3} + 4x^2 + 16x + (3x^2 + \cancel{x^3})}{3x + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{7x^2 + 16x}{3x + x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 7$$

Luego $f(x)$ tiene asíntota oblicua en $y = -x + 7$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) *(1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.*

b) *(1 punto) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

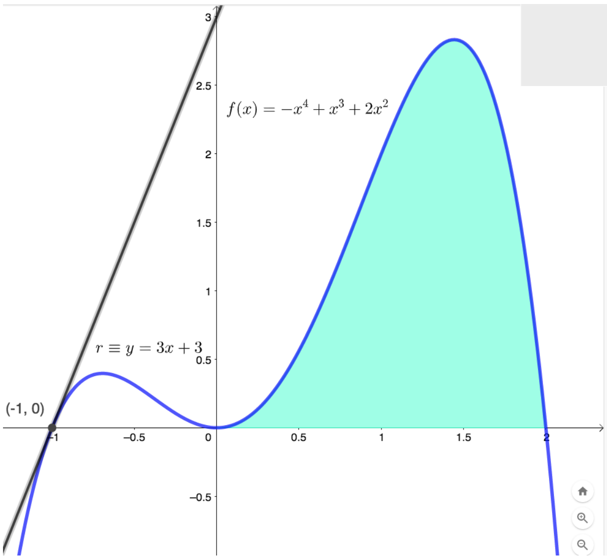
a) $x_0 = -1 \implies y_0 = f(x_0) = 0$

$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x$

$m_r = f'(x_0) = f'(-1) = 3$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$
$y - 0 = 3(x + 1)$

$\boxed{r \equiv y = 3x + 3}$



b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX

$$-x^4 + x^3 + 2x^2 = -x^2 \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \implies x = \{-1, 2\} \end{cases}$$

Y teniendo en cuenta que nos piden el área para $x > 0$ queda definid0 un único recinto de integración $A_1 = (0, 2)$

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\Big]_0^2 = \left(-\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3}\right) - 0 = \frac{44}{15}$$

$$Area = |A_1| = \frac{44}{15} = 2.93\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0.5, 0.6 y 0.45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) (1 punto) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

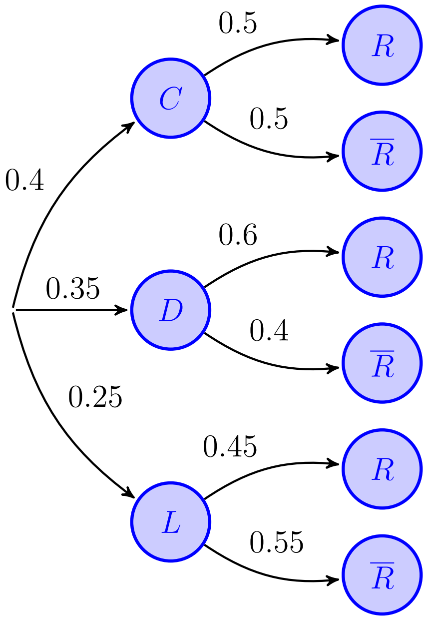
(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ "Senderismo en río Cuervo" $\quad D \equiv$ "Senderismo en río Duratón"

$L \equiv$ "Senderismo en río Lobos" $\quad R \equiv$ "Llueve durante la excursión"



a) $P(\overline{R}) = P\Big((C\cap \overline{R}) \cup (D\cap\overline{R}) \cup (L\cap\overline{R})\Big)$

$= P(C\cap\overline{R}) + P(D\cap\overline{R}) + P(L\cap\overline{R})$

$= P(C)\cdot P(\overline{R}\mid C) + P(D)\cdot P(\overline{R}\mid D)$

$+ P(L)\cdot P(\overline{R}\mid L) = 0.4\cdot 0.5$

$+ 0.35\cdot 0.4 + 0.25\cdot 0.55 = 0.4775$

b) $P(C\mid R) = \dfrac{P(C\cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(C)\cdot P(R\mid C)}{1-P(\overline{R})}$

$= \dfrac{0.4\cdot 0.5}{1-0.4775} = 0.3828$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0.5 km.

a) *(1 punto) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0.05 km con un nivel de confianza del 95.44 %.*

b) *(1 punto) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

a) $n = ? \quad \& \quad X : \mathcal{N}(\mu, 0.5) \quad \& \quad E \leq 0.05 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.9544$

$$1-\alpha = 0.9544 \Rightarrow \alpha = 0.0456 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0228 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.9772 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.00$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.05 \implies n \geq \left(2 \cdot \frac{0.5}{0.05}\right)^2 = 400 \implies \boxed{n = 400 \text{ bolígrafos}}$$

b) $X : \mathcal{N}(2, 0.5) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(2, \dfrac{0.5}{\sqrt{16}} = 0.125)$

$$P\left(\overline{X} \geq \frac{30}{16}\right) = P(\overline{X} \geq 1.875) = P\left(Z \geq \frac{1.875-2}{0.125}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413$$

Julio 2020 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.*

b) *(1 punto) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = -4I \implies \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} m - 4 = 0 \implies \boxed{m = 4} \\ m^2 - 5m = -4 \implies m = \{\cancel{1}, 4\} \\ -m + 4 = 0 \implies m = 4 \checkmark \end{cases}$$

b) Para $m = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \implies |A| = 4 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 15 \quad \& \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \quad \& \quad y - x \leq 10 \quad \& \quad y + 20 \geq 2x$$

a) (1 punto) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) (1 punto) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

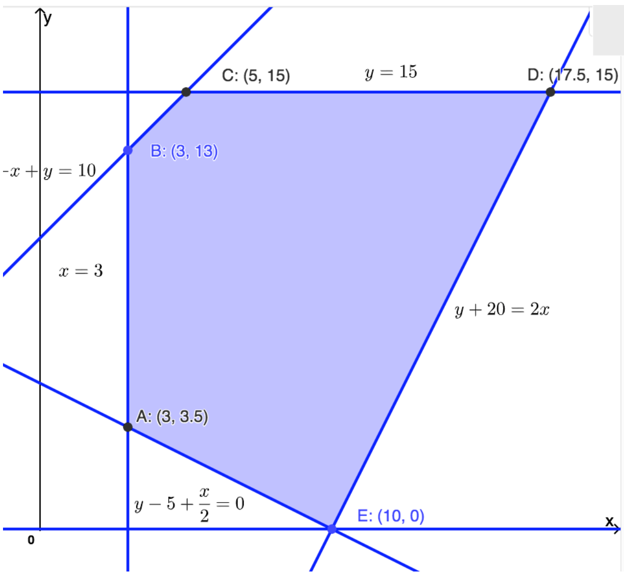
Solución.

- `Región Factible` Escribimos la región S y los puntos necesarios para su representación

$$S \equiv \begin{cases} \textcircled{1}\ x \geq 3 & \rightarrow (3,0) \\ \textcircled{2}\ 0 \leq y \leq 15 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (0,15) \\ \textcircled{3}\ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (10,0) \\ \textcircled{4}\ y - x \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (5,15) \\ \textcircled{5}\ y + 20 \geq 2x & \rightarrow (10,0) \quad \& \quad (15,10) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3	3.5	6.5
B	3	13	16
C	5	15	20
D	17.5	15	32.5
E	10	0	10

Por tanto $f(x)$ tiene un *mínimo* igual a 6.5 en $A(3, 3.5)$ y un *máximo* igual a 32.5 en $D(17.5, 15)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x+k)e^{\frac{-x}{2}}$$

a) (1 punto) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la función en dicho punto.

b) (1 punto) Para $k = 1$ señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3\left[e^{\frac{-x}{2}} + (x+k)e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 3e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{k}{2}\right)$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 0 \implies 3e^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right) = 0 \implies 3e^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right) = 0$

$\implies \frac{1}{2} - \frac{k}{2} = 0 \implies k = 1$

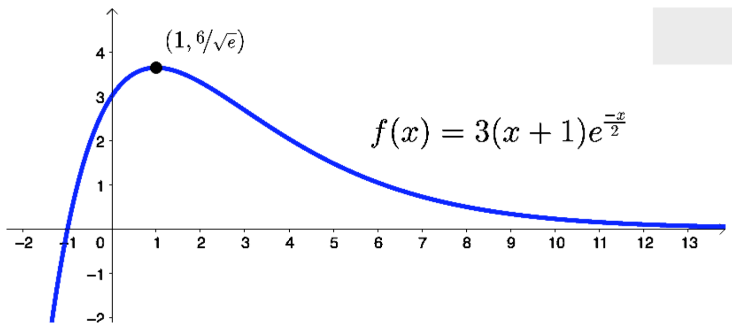
$f(1) = 3(1+1)e^{\frac{-1}{2}} = \frac{6}{\sqrt{e}}$

b) Para $k = 1 \implies f(x) = 3(x+1)e^{\frac{-x}{2}}$

$f'(x) = 0 \implies 3e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{-x}{2}} \cdot (1-x) = 0 \implies x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 1)$ y *decreciente* en $(1, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(1, 6/\sqrt{e})$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la Probabilidad de que un microondas se estropee durante el periodo de garantía es 0.02. *Esta probabilidad se eleva a* 0.05 *para hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el periodo de garantía, la marca amplía ésta por dos años más. El* 40 % *de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.*

a) *(1 punto) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el periodo de garantía.*

b) *(1 punto) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el periodo de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos independientes

$$M \equiv \text{"El microondas se estropea durante el periodo de garantía"}$$
$$H \equiv \text{"El horno eléctrico se estropea durante el periodo de garantía"}$$
$$G \equiv \text{"El cliente conserva la factura de compra"}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(M) = 0.02 \quad \& \quad P(H) = 0.05 \quad \& \quad \overbrace{P(M \cap H)}^{Independientes} = P(M) \cdot P(H) \quad \& \quad P(\overline{G} \mid M) = 0.4$$

a) $P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0.02 + 0.05 - 0.02 \cdot 0.05 = 0.069$

b) $P(M \cap G) = P(M) \cdot P(G \mid M) = P(M) \cdot \left[1 - P(\overline{G} \mid M)\right] = 0.02 \cdot (1 - 0.4) = 0.012$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) *(1 punto) En una muestra aleatoria simple de* 10 *lavadoras los consumos de agua en un lavado con este producto fueron los siguientes:*

$$40 \quad 45 \quad 38 \quad 44 \quad 41 \quad 40 \quad 35 \quad 50 \quad 40 \quad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % *para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.*

b) *(1 punto) A partir de una muestra de* 64 *lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de* 5 *litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de agua (litros)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.7)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.7) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \dfrac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = 41$

$1-\alpha = 0.90 \implies \alpha = 0.10 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{10}} = 3.64$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E, \overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (37.36; 44.64)}$

b) $n = 64 \quad \& \quad 2E = 5 \implies E = 2.5$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{7}{\sqrt{64}} = 2.5 \implies z_{\alpha/2} = 2.857 \xrightarrow{Tabla} 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.9979$

$1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.9979 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0.0021 \Rightarrow \alpha = 0.0042 \Rightarrow 1-\alpha = 0.9958 \Rightarrow 99.58\,\%$

Julio 2020 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule A^2 y A^{10}.

b) (1 punto) Calcule $(AA - 3I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

b)

$$AA - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|AA - 3I| = 4 \implies (AA - 3I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considere la región del plano S definida por:

$$x - y \geq 0, \qquad y + 2x \leq 8, \qquad 0 \leq y \leq 2$$

a) *(1 punto) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.*

b) *(1 punto) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

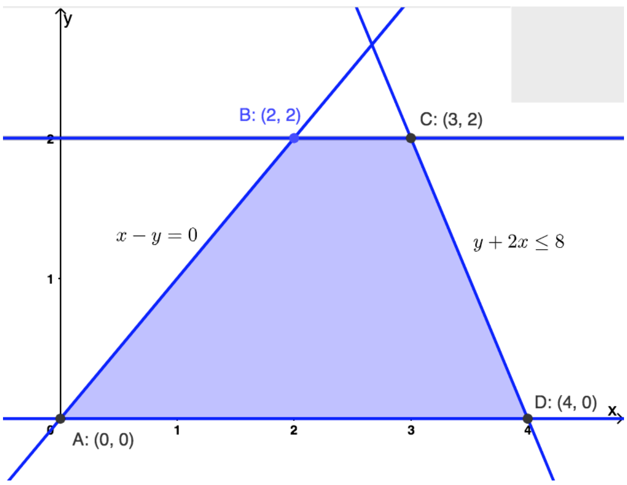
Solución.

- `Región Factible` Escribimos la región S y los puntos necesarios para su representación

$$S \equiv \begin{cases} ① \; x - y \geq 0 & \to (0,0) \quad \& \quad (4,4) \\ ② \; y + 2x \leq 8 & \to (0,8) \quad \& \quad (4,0) \\ ③ \; 0 \leq y \leq 2 & \to (0,0) \quad \& \quad (0,2) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 4x - y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	2	2	6
C	3	2	10
D	4	0	16

Por tanto $f(x)$ tiene un *mínimo* igual a 0 en $A(0,0)$ y un *máximo* igual a 16 en $D(4,0)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

a) *(1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = -1$ de la función $f(x)$ sea un máximo relativo.*

b) *(1 punto) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

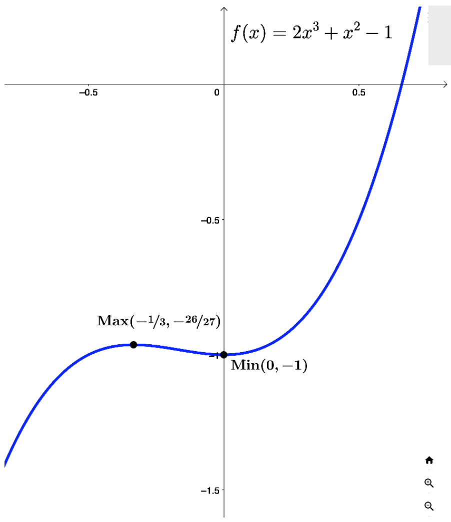
a) Para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = -1 \implies \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax \implies f'(-1) = 6 - 2a = 0 \implies \boxed{a = 3}$$
$$f''(x) = 12x + 2a \implies f''(-1) = -12 + 2a < 0 \implies a < 6 \checkmark$$

b) Para $a = 1$ la función es $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

$$f'(x) = 6x^2 + 2x = 0 \implies 2x \cdot (3x + 1) = 0$$
$$\implies x = \{0, -1/3\}$$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decrec. $\searrow$	Creciente $\nearrow$



La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1/3) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1/3, 0)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0. - 1)$ y un *máximo relativo* en $(-1/3, -26/27)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) El espectáculo sea gratuito y no se realize en la calle.

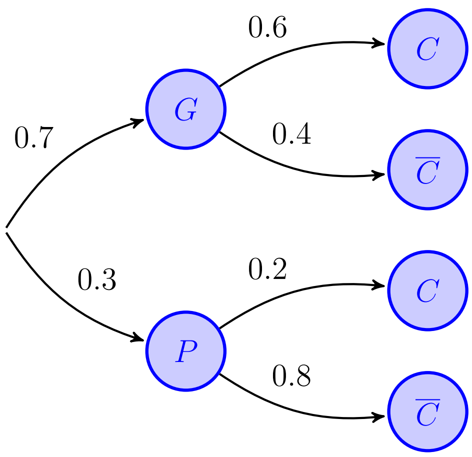
b) (1 punto) El espectáculo se realice en la calle.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$G \equiv \text{“El espectáculo es gratuito”}$$
$$P \equiv \text{“El espectáculo es de pago”}$$
$$C \equiv \text{“El espectáculo se hace en la calle”}$$



a) $P(G \cap \overline{C}) = P(G) \cdot P(\overline{C} \mid G) = 0.7 \cdot 0.4$
$= 0.28$

b) $P(C) = P\big((G \cap C) \cup (P \cap C)\big)$
$= P(G \cap C) + P(P \cap C)$
$= P(G) \cdot P(C \mid G) + P(P) \cdot P(C \mid P)$
$= 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.48$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{"Salario medio bruto anual (euros)"} \longrightarrow X : (\mu, 900)$$

a) $n = ?\quad \& \quad E \leq 200 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 200 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{900}{200}\right)^2 = 77.79 \implies \boxed{n = 78 \text{ euros}}$$

b) $X : \mathcal{N}(1889, 900) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1889, \dfrac{900}{\sqrt{64}} = 112.5\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 1900\right) = P\left(Z \geq \frac{1900-1889}{112.5}\right) = P(Z \geq 0.098) = 1 - P(Z \leq 0.098)$$

$$= 1 - 0.5398 = 0.4602$$

Julio 2020 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2a \\ 2x + ay + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a + 4 = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_1 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -x - (-7/2) - (-5/4) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y = 7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z = 5 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 11/4 \\ y = -7/2 \\ z = -5/4 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2a+6 \\ 0 & 0 & a-2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 2 = 0 \\ \boxed{a = 2} \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -x - (-5/4) - (-7/2) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z - (-7/2) = 6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y = 7 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 11/4 \\ z = -5/4 \\ y = -7/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

a) *(1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.*

b) *(1 punto) Para $a = 2$, calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $x = 1 \implies f''(1) = 0$

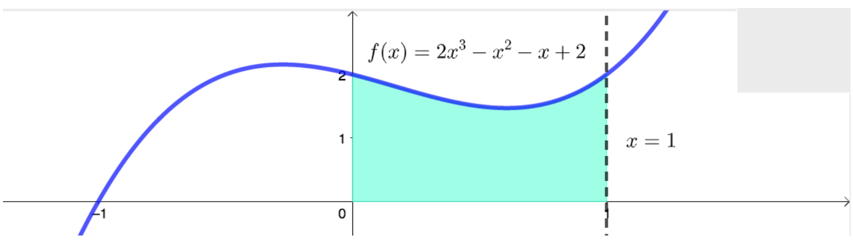
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 \\ f''(x) = 6ax - 2 \end{array}\right\} \implies f''(1) = 6a - 2 = 0 \implies \boxed{a = 1/3}$$

b) Para $a = 2$ la función $f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$
Los puntos de corte de la función con el eje OX son:

$$2x^3 - x^2 - x + 2 \overset{Ruffinni}{=} (x+1)\cdot(2x^2 - 3x + 2) = 0 \implies x = -1$$

que junto con las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$ determinan un único recinto de integración $A_1 = (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)\,dx = \left.\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - 0 = \frac{5}{3}$$
$$Area = |A_1| = \left|\frac{5}{3}\right| = 1.667\ u^2$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} & si\ x > 1 \\ -x^2 & si\ x \leq 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$*. ¿Es la función* $f(x)$ *continua en todo su dominio?.*

b) (1 punto) Calcule las asíntotas de $f(x)$*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para determinar $\lim_{x\to 1} f(x)$ tenemos que hallar los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(-x^2) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x-3)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

y por tanto

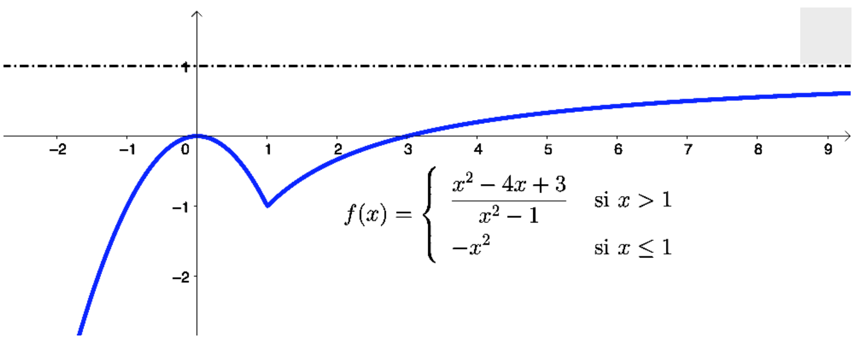
$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

Veamos la continuidad de la función $f(x)$.

- Si $x < 1$, $f(x) = -x^2$, continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$, continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, luego $f(x)$ es continua en $x > 1$.
- Si $x = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.

En definitiva $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b)
- `A. Vertical` $\nexists$ A.V. pues $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- `A. Horizontal`
  - Cuando $x \to -\infty$ hay una rama parabólica.
  - $y = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ A.H. en $y = 1$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un kiosco de prensa del aeropuerto de Madrid el 40 % de las ventas son periódicos y el resto revistas. Un 90 % de las publicaciones están en castellano. Además se sabe que un 8 % del total de las publicaciones son revistas en otro idioma. Calcule la probabilidad de que una publicación elegida al azar:

a) (1 punto) Sea un periódico, dado que está publicado en otro idioma distinto del castellano.

b) (1 punto) Sea un periódico o esté publicado en otro idioma distinto del castellano.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$P \equiv$ "La venta es un periódico" $\quad R \equiv$ "La venta es una revista"

$C \equiv$ "La edición es en castellano" $\quad O \equiv$ "La edición es en otro idioma"

Escribimos los datos en una tabla de contingencia supuesto un total de 100 publicaciones.

	P	R	**Total**
C	38	52	90
O	2	8	10
Total	40	60	100

a) $P(P \mid O) = \dfrac{2}{10} = 0.2$

b) $P(P \cup O) = P(P) + P(O) - P(P \cap O) = \dfrac{40}{100} + \dfrac{10}{100} - \dfrac{2}{100} = 0.48$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$ euros.

a) *(1 punto) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.*

b) *(1 punto) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 5100$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{500}{\sqrt{100}} = 82.25$$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (5017.75; 5182.25)}$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \quad \& \quad n = 36 \quad \& \quad E = 160$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{500}{\sqrt{36}} = 160 \implies z_{\alpha/2} = 1.92$$

$z_{\alpha/2} = 1.92 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.9726 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0274 \Rightarrow \alpha = 0.0548 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.9452$

Septiembre 2020
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ *con* $a \in \mathbb{R}$.

a) *(1 punto) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad*
$A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) *(1 punto) Calcule A^{-1} para $a = -1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4+5a^2 & 25a \\ 5a & 9+5a^2 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 4+5a^2 & 25a \\ 5a & 9+5a^2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+5a^2 & 0 \\ 0 & -6+5a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = -I \implies \begin{pmatrix} -6+5a^2 & 0 \\ 0 & -6+5a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\implies -6+5a^2 = -1 \implies \boxed{a = \pm 1}$$

b) Para $a = -1$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \implies |A| = 1 \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) (1 punto) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

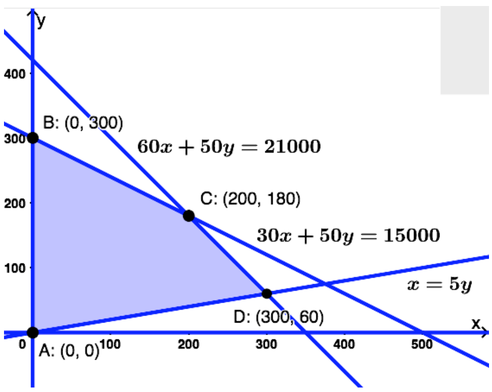
	Sustrato A	Sustrato B	Restricción
Tierra vegetal (kg/m^3)	60	50	< 21000
Horas de trabajo (h/m^3)	30	50	< 15000
Beneficio (£$/m^3$)	50	60	

- `Incógnitas` Llamamos x e y a los m^3 de cada tipo de sustrato.
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para representarlas

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ 60x + 50y \leq 21000 & \rightarrow (0, 4420) \quad \& \quad (3683, 0) \\ \textcircled{2}\ 30x + 50y \leq 15000 & \rightarrow (0, 300) \quad \& \quad (500, 0) \\ \textcircled{3}\ x \leq 5y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (500, 100) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` (Coste en €) $\qquad f(x, y) = 50x + 60y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice.

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	300	18000
C	200	180	20800
D	300	60	18600



El *coste máximo* es de 20800 €, elaborando 200 m^3 del sustrato tipo A y 180 m^3 del B.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{2x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) (1 punto) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a)
$$\left.\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2x^2+1} = 2 \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(2m + \ln x) = 2m \\ \bullet f(1) = 2m + \cancelto{0}{\ln 1} = 2m \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$

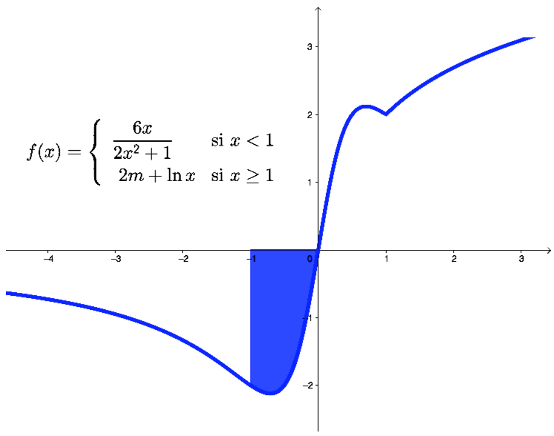
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$
$$2 = 2m \implies \boxed{m = 1}$$

Para $x < 1$, $f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1} \implies f'(x) = \dfrac{6\cdot(2x^2+1) - 6x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2}$

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX entre las rectas $x = -1$ y $x = 0$ (en la rama de $f_1(x)$).

$$f_1(x) = \frac{6x}{2x^2+1} = 0 \implies x = 0$$

Para el cálculo del área definimos el intervalo $A_1 = (-1, 0)$.



$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{6x}{2x^2+1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = 2x^2+1 \\ du = 4x\,dx \implies \dfrac{1}{4x}du = dx \end{array}\right\}$$
$$= \int_{-1}^{0} \frac{6\cancel{x}}{u}\cdot\frac{1}{4\cancel{x}}du = \frac{3}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{u}\,du = \frac{3}{2}\ln u\Big]_3^1 = \frac{3}{2}\ln(2x^2+1)\Big]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\cancelto{0}{\ln 1} - \ln 3\right) = -\frac{3}{2}\ln 3 = -\ln\left(3\sqrt{3}\right) \simeq -1.648$$

$$Area = |A_1| = \ln\left(3\sqrt{3}\right) \simeq 1.648\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \mid B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ *y* $P(A) = \dfrac{2}{3}$. *Calcule:*

a) (1 punto) $P(A \cup \overline{B})$.

b) (1 punto) $P\Big(\overline{A} \cap B\Big) \cup (\overline{B} \cap A)$.

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

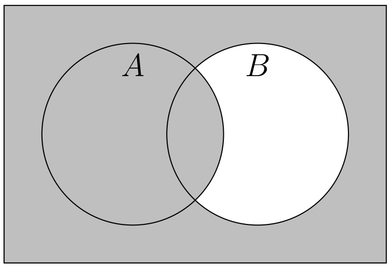
Solución.

Del enunciado tenemos:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{4} \quad \& \quad P(A) = \frac{2}{3} \quad \& \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{4}$

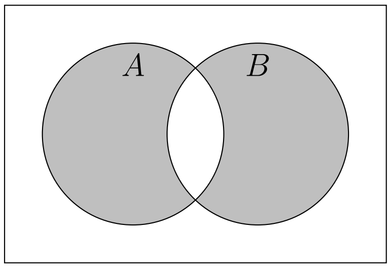
$$\Longrightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$



$$\begin{aligned} P(A \cup \overline{B}) &= 1 - P(\overline{A} \cap B) \\ &= 1 - \Big[P(B) - P(A \cap B)\Big] \\ &= 1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{19}{24} \\ P\Big(\overline{A} \cap B\Big) \cup (\overline{B} \cap A) &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{19}{24} - \frac{1}{24} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) *(1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *(1 punto) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $\mu = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0.9940$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \quad \& \quad n =? \quad \& \quad E < 20 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} < 20 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{60}{20}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = 6\right)$

$$P(\overline{X} \leq 220) = P(Z < \frac{220-\mu}{6}) = 0.9940 \xrightarrow{Tabla} 2.51 = \frac{220-\mu}{6} \implies \boxed{\mu = 204.94}$$

Septiembre 2020
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 3a + 4 = 0 \implies a = \{-1, 4\}$$

- Si $a \neq \{-1, 4\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$$

$\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq$ nº incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-1, 4\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 5F_3 - 9F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 3 \cdot (-1/2) = 1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y - (-3/2) = -1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = -6 \;\Rightarrow \qquad\quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ F_1 \leftrightarrow F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & a-4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & a+4 & 2-a & a-6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ (a+4) \cdot F_2 + a \cdot F_3 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 + 3a + 4 & a^2 - 5a + 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a^2 + 3a + 4 = 0 \\ \boxed{a = \{-1, 4\}} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 4\} \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPAT. DETERMINADO
- Si $a = -1 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE
- Si $a = 4 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 1$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -z - 4 \cdot (-1/2) + 3 \cdot (-1/2) = 2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 1/2 = 1 \qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x = -2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} z = -3/2 \\ y = -1/2 \\ x = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

a) (1 punto) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.

b) (1 punto) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

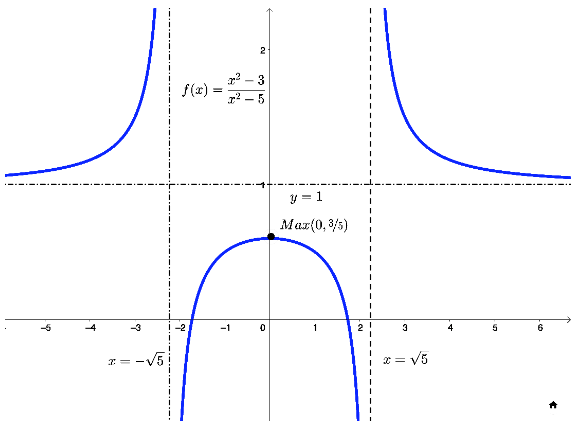
a) $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax^2 - 3}{x^2 - 5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = a = -1 \implies \boxed{a = -1}$

b) Para $a = 1 \implies f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 5}$ & $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{5}\right\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 5) - 2x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 5)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 5)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$\left(-\infty, -\sqrt{5}\right)$	$\left(-\sqrt{5}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{5}\right)$	$\left(\sqrt{5}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, 0\right)$ y *decreciente* en $\left(0, \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$, y tiene un *máximo relativo* en $(0, 3/5)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real

$$f(x) = e^{2x} + x$$

a) *(1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.*

b) *(1 punto) Calcule*

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

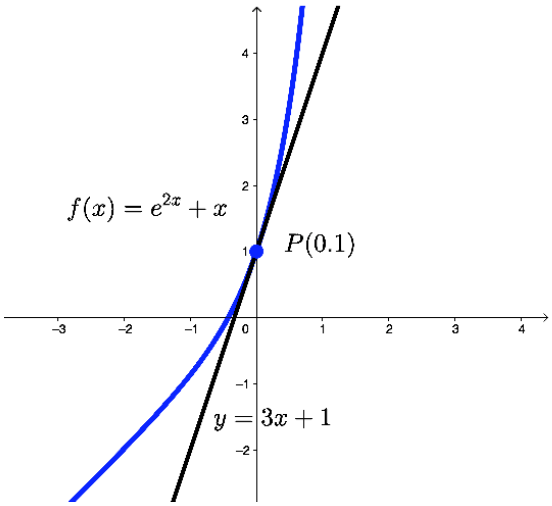
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a)
- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow P(0.1)$
- $f'(x) = 2e^{2x} + 1$
- $m_r = f'(x_0) = f'(0) = 3$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

  $r \equiv y - 1 = 3 \cdot (x - 0)$

  $\boxed{r \equiv y = 3x + 1}$



b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^{2x} + x)\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_0^1 x\,dx$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\,du = dx \end{array} \right\} = \int_0^1 e^u \cdot \frac{1}{2}\,du + \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left.\frac{1}{2}e^u\right]_0^2 + \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left.\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 + \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left.\frac{1}{2} \cdot (e^{2x} + x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [(e^2 + 1) - (1 + 0)] = \frac{1}{2} \cdot e^2 \simeq 3.695$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un instituto se decide que los alumnos solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0.7*. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es* 0.2*. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que*

a) (1 punto) Sea el examen de un alumno.

b) (1 punto) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

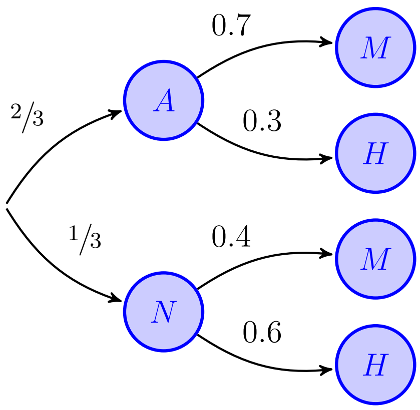
Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{“El examen está escrito en azul”} \\ N &\equiv \text{“El examen está escrito en Negro”} \\ M &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumna”} \\ H &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumno”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \& \quad P(M \mid A) = 0.7 \quad \& \quad P(N \cap H) = 0.2$$

$$P(N \cap H) = P(N) \cdot P(H \mid N) = \frac{1}{3} \cdot P(H \mid N) = 0.2 \implies P(H \mid N) = 0.6$$



a) $$\begin{aligned} P(H) &= P\big((A \cap H) \cup (N \cap H)\big) \\ &= P(A \cap H) + P(N \cap H) \\ &= P(A) \cdot P(H \mid A) + P(N) \cdot P(H \mid N) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.6 = 0.4 \end{aligned}$$

b) $$P(H \mid N) = \frac{P(N \cap H)}{P(N)} = \frac{0.2}{1/3} = 0.6$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarde en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximare por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) *(1 punto) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26.9, 37.1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del $98.92\,\%$. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.*

b) *(1 punto) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 36 minutos de media para completar el recorrido.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad I.C.(26.9, 37.1) \quad \& \quad 1-\alpha = 0.9892$

$$1-\alpha = 0.9892 \Rightarrow \alpha = 0.0108 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0054 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.9946 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.55$$

$$\overline{x} = \frac{26.9+37.1}{2} = 32$$

$$E = \frac{37.1-26.9}{2} = 5.1$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.55 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 5.1 \implies n > \left(2.55 \cdot \frac{10}{5.1}\right)^2 \implies \boxed{n = 25}$$

b) $X : \mathcal{N}(30, 10) \xrightarrow{n=160} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2.5\right)$

$$P(25 \leq \overline{X} \leq 35) = P(\frac{25-30}{2.5} < Z < \frac{35-30}{2.5}) = P(-2 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 2)$$

$$= P(Z \leq 2) - \left[1 - P(Z \leq 2)\right] = 2P(Z \leq 2) - 1 \xrightarrow{Tabla}$$

$$2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

2021

Curso 2020/21

Modelo 2021
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) (1 punto) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b + ac & 2c & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A - B \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b + ac & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 2a = a - 1 & \Rightarrow \quad a = -1 \\ 2c = c - 1 & \Rightarrow \quad c = -1 \\ 2b + ac = b - 1 & \Rightarrow \quad b = -2 \end{cases}$$

b) Para $a = b = c = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = 1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)^{\top} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) (1 punto) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) (1 punto) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la infegral $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a)
- Extremo relativo en $x = -3 \implies f'(-3) = 0$
  $f'(x) = 2ax + b \implies f'(-3) = -6a + b = 0 \implies b = 6a$
- $r \equiv y = 6x + 8$ es la recta tangente en $x_0 = 0$

  $y_0 = 8 = f(x_0) = f(0) = c \implies \boxed{c = 8}$

  $f'(0) = 6 \implies \boxed{b = 6} \implies b = 6a \implies \boxed{a = 1}$

Y por tanto:

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, $f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x}\,dx = \int_1^e 2x\,dx + \int_1^e dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x^2 + x + \ln x\Big]_1^e = \left(e^2 + e + \cancelto{1}{\ln e}\right) - \left(1 + 1 + \cancelto{0}{\ln 1}\right) = e^2 + e - 1$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

a) (1 punto) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $x^2 = 0 \implies x = 0$, luego $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

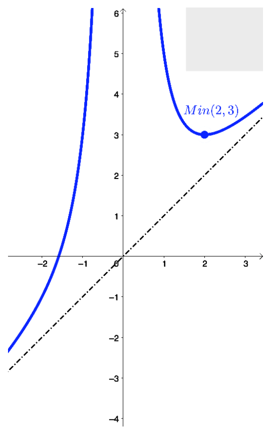
$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3+4}{x^2}$$

- `A. Vertical` Analizamos los puntos que no pertenecen al dominio.
  - $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
- `A. Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.
- `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x\cdot x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{\cancel{x^3} + 4 - \cancel{x^3}}{x^2}\right] = 0$$

Luego la función $f(x)$ tiene una A. Oblícua en $y = x$.



b) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - 8x}{x^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 2)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(2, 3)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

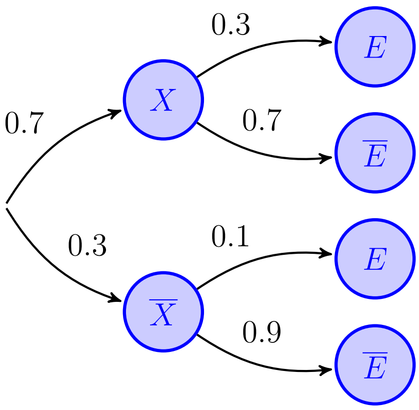
b) (1 punto) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los siguientes sucesos:

$$X \equiv \text{“La verdura es de proximidad”}$$
$$E \equiv \text{“La verdura es ecológica”}$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{E}) &= P\Big((X \cap \overline{E}) \cup (\overline{X} \cap \overline{E})\Big) \\ &= P(X \cap \overline{E}) + P(\overline{X} \cap \overline{E}) \\ &= P(X) \cdot P(\overline{E} \mid X) + P(\overline{X}) \cdot P(\overline{E} \mid \overline{X}) \\ &= 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.76 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(X \cup E) &= P(X) + P(E) - P(X \cap E) \\ &= P(X) + 1 - P(\overline{E}) - P(X) \cdot P(E \mid X) \\ &= 0.7 + 1 - 0.76 - 0.7 \cdot 0.3 = 0.73 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (**2 *puntos***)

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.1) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 30$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.25 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4.38$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (25.62; 34.38)}$$

b) $X : \mathcal{N}(28, 10) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = 3.16\right)$

$$P\left(28 \leq \overline{X} \leq 30\right) = P\left(\frac{28 - 28}{3.16} \leq Z \leq \frac{30 - 28}{3.16}\right) = P(0 \leq Z \leq 0.63)$$

$$= P(Z \leq 0.63) - P(Z \leq 0) = 0.7357 - 0.5 = 0.2357$$

Modelo 2021
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factble, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas`

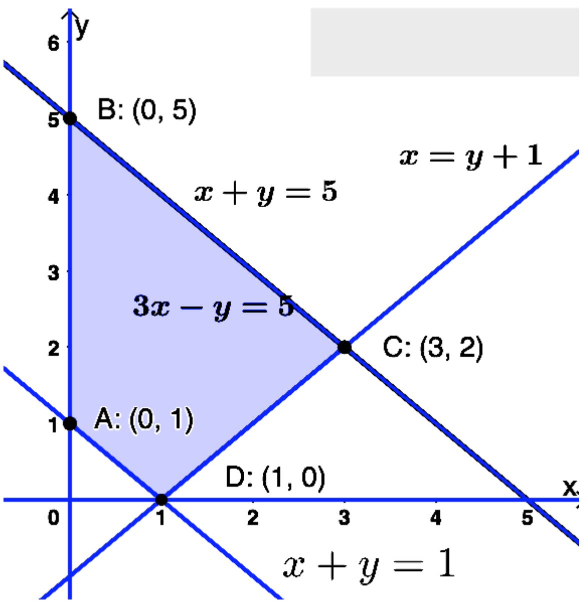
$$x \equiv \text{“Hectáreas dedicadas al cultivo de trigo”}$$
$$y \equiv \text{“Hectáreas dedicadas al cultivo de cebada”}$$

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x+y \leq 5 & \to (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; x+y \geq 1 & \to (0,1) \quad \& \quad (1,0) \\ ③ \; x \leq y+1 & \to (5,4) \quad \& \quad (1,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 200x + 60y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	1	60
B	0	5	300
C	3	2	720
D	1	0	200

Por tanto el *beneficio máximo* es de 720 euros y se produce destinando 3 hectáreas al cultivo de trigo y 2 al de cebada.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =2a-1 \\ 2x+y+az & =1 \\ x+ay+z & =1 \end{array}\right.$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2+3a-2 = 0 \implies a = \{1,2\}$$

- Si $a \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$$

$$\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche} \text{Sist. Incompatible (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2 - 1/2 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -(-2) - 2z = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = -2 \\ z = -1/2 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -4a+3 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-2a \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & a-2 & -1 & -4a+3 \\ 0 & 0 & a-1 & 2-2a \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1, 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \square \\ -1 & \square & -1 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compat. Determinado
- Si $a = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Indeterminado
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible (Depende dónde despejes $z = -1$ o $z = 5$)

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2 - 1/2 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z - (-2) = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = -2 \\ x = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.*

b) *(1 punto) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) $x^2 - 9 = 0 \implies x = \{-3, 3\}$, pero $-3 < 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$
Para que $f(x)$ sea derivable ha de ser continua en $x = 0$.

- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 + ax - \frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{9}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x^2-9} = -\frac{1}{9}$
- $f(0) = -\dfrac{1}{9}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & , \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 9 - 2x \cdot (x+1)}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2-9)^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x + a) = a$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2-9)^2} = -\frac{9}{81} = -\frac{1}{9}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, y por tanto en $\text{Dom}(f) \implies a = -\dfrac{1}{9}$.

b) Para $a = 0$ la función será: $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{9} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$

- `A. Vertical` Analizamos los puntos que no pertenecen a $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.
  - $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x^2-9} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 3^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$
- `A. Horizontal`
  $\displaystyle y = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) = +\infty \Rightarrow$ Rama parabólica
  $\displaystyle y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2-9} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow$ A.H. en $y = 0$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C) = 0.4$, $P(D) = 0.6$ y $P(C \cup D) = 0.8$ Calcule:*
>
> *a) (1 punto) $P(C \mid D)$.*
>
> *b) (1 punto) $P\left(\overline{C \cap D} \mid C\right)$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)*

Solución.

Del enunciado tenemos:

$$P(C) = 0.4 \quad \& \quad P(D) = 0.6 \quad \& \quad P(C \cup D) = 0.8$$

a) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$

$\Longrightarrow\ P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cup D) = 0.4 + 0.6 - 0.8 = 0.2$

$$P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.2}{0.6} = 0.33$$

b) $$P\left(\overline{C \cap D} \mid C\right) = \frac{P\left(\overline{C \cap D} \cap C\right)}{P(C)} = \frac{P\left(\left(\overline{C} \cup \overline{D}\right) \cap C\right)}{P(C)} = \frac{P\left(\cancelto{\emptyset}{\overline{C} \cap C} \cup \overline{D} \cap C\right)}{P(C)}$$

$$= \frac{P\left(\overline{D} \cap C\right)}{P(C)} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0.4 - 0.2}{0.4} = 0.5$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar un muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 100 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \tfrac{300}{\sqrt{n}} < 100 \implies n > \left(1.96 \cdot \tfrac{300}{100}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 300) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{300}{\sqrt{50}} = 42.43\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 2700\right) = P\left(Z \geq \frac{2700-3000}{42.43}\right) = P(Z \geq -7.07) = P(Z \leq 7.07) \simeq 1$$

Junio 2021
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.*

b) *(1 punto) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $A = A^{-1} \implies A \cdot A = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \implies A^2 = I$

$$A^2 = I \implies \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a^2+1 = 1 && \Rightarrow \boxed{a = 0} \\ &\Rightarrow 2a = 0 && \Rightarrow a = 0 \\ &\Rightarrow b^2 = 1 && \Rightarrow \boxed{b = \pm 1} \end{aligned}$$

b) Para $a = b = 2$ la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad |A| = 6 \qquad \& \qquad \text{Adj}A^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^\top = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) *(1 punto) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

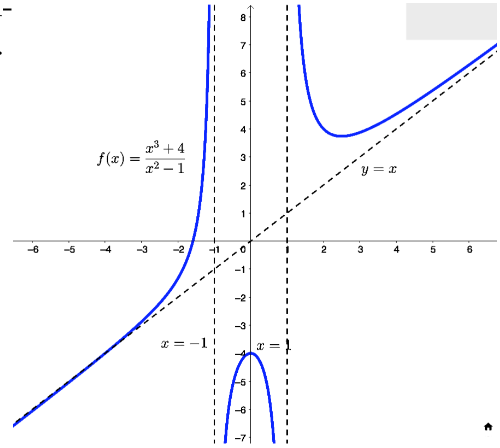
Solución.

a) $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- `A. Vertical` Buscamos las A. V. entre los puntos que no pertenecen al domino de la función.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\frac{5}{0}\right] \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



- `A.Horizontal` $\quad y = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ *A.H.*

- `A.Oblícua` $\quad$ será una recta de la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3} + 4 - \cancel{x^3} + x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+x}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x$

b) $x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = -4 \implies (x_0, y_0) = (0, -4)$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot ()(x^2-1) - (x^3+4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x\cdot(x^3-3x-8)}{(x^2-1)^2}$$

$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 0$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y + 4 = 0\cdot(x-0) \implies \boxed{r \equiv y = -4}$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & si\ x \leq 1 \\ \ln x & si\ x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln *la función logaritmo neperiano.*

a) *(1 punto) Determine para qué valores de a la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x < 1$, $f(x) = x^2 - ax$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 1$, $f(x) = \ln x$, que es continua en $x > 0$, luego continua en $x > 1$.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - ax\right) = 1 - a$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$
  - $f(1) = 1 - a$

  Para que la función sea continua en $x = 1$ se tiene que:

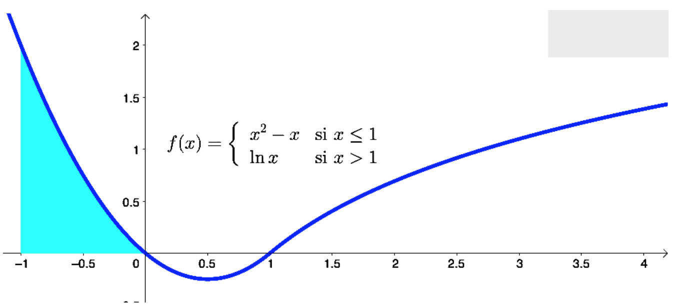
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies 1 - a = 0 \implies \boxed{a = 1}$$

b) Para $a = 1$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como nos piden el área delimitada por las rectas verticales $x = -1$ y $x = 0$, estaremos en todo momento en la rama $f_1(x) = x^2 - x$.
Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX: $x^2 - x = 0 \implies x = \{0, 1\}$.
Lo que define un único recinto de integración $A(-1, 0)$.

$$A = \int_{-1}^{0} f_1(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - x\right)dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

$$Area = |A| = \frac{5}{6}\,u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

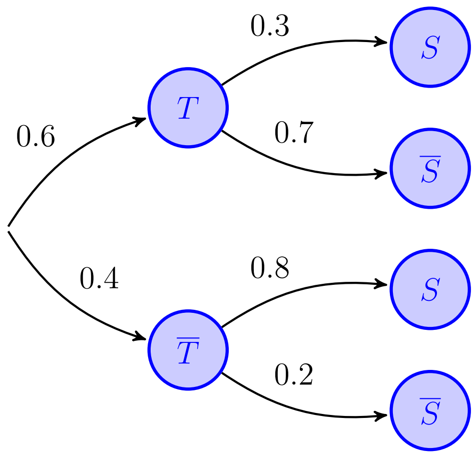
b) (1 punto) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$T \equiv \text{“El empleado teletrabaja”}$$
$$S \equiv \text{“El empleado tiene trastorno del sueño”}$$



a) $P(\overline{S} \cap T) = P(T) \cdot P(\overline{S} \mid T)$
$= 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

b) $P(\overline{T} \mid \overline{S}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} \overset{\circledast}{=} \dfrac{0.4 \cdot 0.2}{0.5} = 0.16$

$\circledast\ P(\overline{S}) = P\Big((T \cap \overline{S}) \cup (\overline{T} \cap \overline{S})\Big)$
$= P(T \cap \overline{S}) + P(\overline{T} \cap \overline{S})$
$= P(T) \cdot P(\overline{S} \mid T) + P(\overline{T}) \cdot P(\overline{S} \mid \overline{T})$
$0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) (1 punto) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) (1 punto) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $n = 500 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{320}{500} = 0.64 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.36 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.96$

$$1 - \alpha = 0.96 \implies \alpha = 0.04 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.02 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.98 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.055$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}} = 0.0441$$

$$I.C._{96\,\%}(p) = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{96\,\%}(p) = (0.5959; 0.6841)}$$

b) $p = 0.5 \quad \& \quad q = 1 - p = 0.5 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95 \quad \& \quad E \leq 0.05$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.05 \implies n \geq 384.16 \implies \boxed{n = 385}$$

Junio 2021
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y+a^2z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a=1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3a^2 - 3 = 3 \cdot \left(a^2 - 1\right) = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-1 \vee a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=1$ por el método de Gauss. Sabiendo que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + (\lambda - 2) - \lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y + 2\lambda = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda - 2 \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & a^2+1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 3F_3 - 2F_2 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3a^2-3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a^2 - 3 = 0 \\ \boxed{a = \pm 1} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 1\} \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \square & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Deter.
- Si $a = 1 \vee a = -1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Indet.

b) La resolución del sistema para $a = 1$ no tiene diferencias respecto a lo que hemos hecho anteriormente.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1.5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

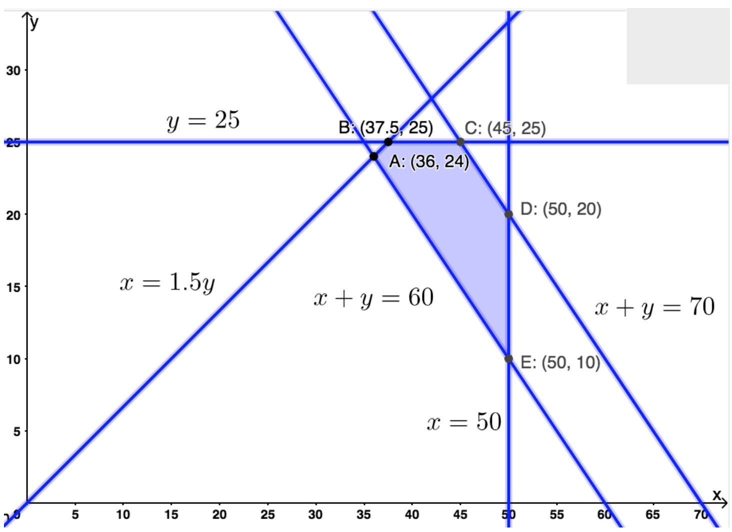
- `Incógnitas` $x \equiv$ "kg de almendras en la mezcla"
  $y \equiv$ "kg de avellanas en la mezcla"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \geq 1.5y & \to (0,0) \quad \& \quad (40,60) \\ ② \ x+y \geq 60 & \to (0,60) \quad \& \quad (60,0) \\ ③ \ x+y \leq 70 & \to (0,70) \quad \& \quad (70,0) \\ ④ \ x \leq 50 & \to (50,0) \\ ⑤ \ y \leq 25 & \to (0,25) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + 2y$

- `Región factible`
  Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.`
  Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	36	24	84
B	37.5	25	87.5
C	45	25	95
D	50	20	90
E	50	10	70

Por tanto el *máximo beneficio* será de 95 euros y se produce con una mezcla de 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$.

a) (1 punto) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) (1 punto) Calcule $\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right) \cdot e^x = 0 \implies \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \implies x = \{-3, 1\} \\ e^x = 0 \implies \nexists \ Sol. \end{cases}$$

Lo que define tres entornos $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ y $1, +\infty$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-3, 1)$, y tiene un *máximo relativo* en $(-3, {}^6/_{e^3})$ y un *mínimo relativo* en $(1, -2e)$.

b) $$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx = \int_1^2 e^{-x} \cdot \left(x^2 - 3\right) \cdot e^x\, dx = \int_1^2 \left(x^2 - 3\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.5 \qquad \& \qquad P(\overline{B} \mid A) = 0.4 \qquad \& \qquad P(A \cup B) = 0.9$$

a) (1 punto) Calcule $P(B \mid \overline{A})$.

b) (1 punto) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B . Justifique la respuesta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $P(\overline{B} \mid A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{0.5} = 0.4 \implies P(\overline{B} \cap A) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2$

$$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - P(A \cap B) = 0.2 \implies P(A \cap B) = 0.3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\implies P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0.9 + 0.3 - 0.5 = 0.7$$

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.7 - 0.3}{1 - 0.5} = 0.8$$

b) $\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35 \end{array}\right\} \implies \left| \begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}\right.$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) (1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117.3444; 124.6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Consumo de pan (kg)"

$$X : \mathcal{N}(120, 20) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}\left(120, \frac{20}{\sqrt{36}} = 3.33\right)$$

$$P(\overline{X} < 125) = P\left(Z < \frac{125 - 120}{3.33}\right) = P(Z < 1.5) = 0.9332$$

b) $n = 81 \quad \& \quad I.C.(117.3444; 124.6556)$

$$\overline{x} = \frac{117.3444 + 124.6556}{2} = 121 \qquad \& \qquad E = \frac{124.6556 - 117.3444}{2} = 3.6556$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{3.6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1.645 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.95$$

$$1 - \alpha/2 = 0.95 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies \alpha = 0.1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0.9 = 90\,\%}$$

Junio 2021 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = \pm 2 \implies \nexists A^{-1}$ si $a = \pm 2$

b) Para $a = 1:$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -6 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

a) (1 punto) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) ▪ `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

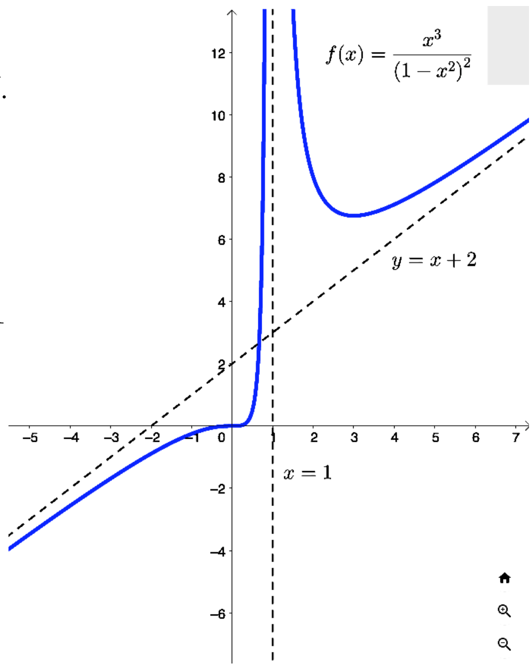
$$(1-x)^2 = 0 \implies x = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

▪ `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

▪ `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$



$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - mx\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{(1-x)^2} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 2x^2 - x}{(1-x)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x+2}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x + 2$.

b) Determinamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(1-x)^{\cancel{2}} + x^3\cdot 2\cdot \cancel{(1-x)}}{1-x^{\cancel{4}3}} = \frac{3x^2 - x^3}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow x^2\cdot(3-x) = 0 \Rightarrow x = \{0, 3\}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Luego la función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$ y *decreciente* en $(1, 3)$ y tiene un *mínimo relativo* en $(3, {}^{27}/_{4})$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) *(1 punto) Determine el valor de a para que la función tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.*

b) *(1 punto) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x^2 + ax\right) dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{ax^2}{2} + C$

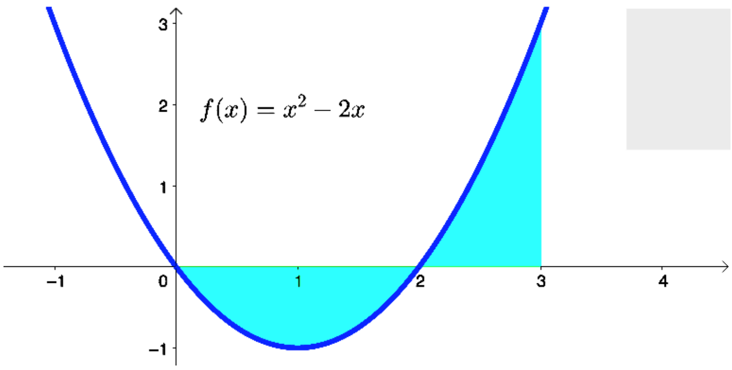
$$\left.\begin{array}{l} F(0) = 3 \implies C = 3 \\ F(2) = 9 \implies \dfrac{8}{3} + 2a + C = 9 \implies a = \dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \implies f(x) = x^2 + \frac{5x}{3}$$

b) Para $a = -2 \implies f(x) = x^2 - 2x$
Hallamos los puntos de corte con el eje OX: $x^2 - 2x = 0 \implies x = \{0, 2\}$
Lo que define dos recintos de integración $A_1 = (0.2)$ y $A_2 = (2, 3)$

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0 = -\frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = (9 - 9) - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{8}{3}\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) La segunda bola seleccionada sea negra.

b) (1 punto) Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sea el suceso:

$$N_i \equiv \text{"Sacar una bola negra en la extracción } i\text{"}$$

a) $P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N}_1 \cap N_2) = \dfrac{3}{12} \cdot \dfrac{2}{11} + \dfrac{9}{12} \cdot \dfrac{3}{11} = \dfrac{1}{4}$

b) $P(N_1 \cap N_2 \mid N_2) = \dfrac{P((N_1 \cap N_2) \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{11}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) (1 punto) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) (1 punto) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución. $X \equiv \text{"Peso barra mantequilla (gr)"} \quad \& \quad X : \mathcal{N}(\mu, 4)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 254$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{15}} = 2.024$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{E} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (251.98; 256.02)}$

b) $X : \mathcal{N}(250, 4) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = \mathcal{N}(250, 0.8)$

$P(\overline{X} \geq 248) = P\Big(Z \geq \dfrac{248 - 250}{0.8}\Big) = P(Z \geq -2.5) = P(Z < 2.5) = 0.9938$

Junio 2021 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones*

$$-2x + y \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 \quad \& \quad x + y \leq 3 \quad \& \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) *(1 punto) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ sobre la región S.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Solución.

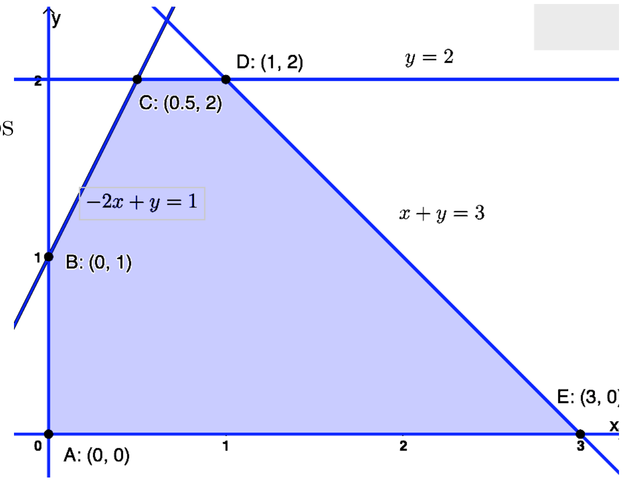
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ -2x + y \leq 1 & \to (0,1) \quad \& \quad (2,5) \\ ② \ 0 \leq y \leq 2 & \to (0,2) \\ ③ \ x + y \leq 3 & \to (0,3) \quad \& \quad (3,0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = x + y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	1	1
C	0.5	2	2.5
D	1	2	3
E	3	0	3

Por tanto el *mínimo* de $f(x,y)$ se produce en $A(0,0)$ y vale 0, mientras que el *máximo* se produce en los puntos $D(1,2)$ y $E(3,0)$ y vale 3.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valore de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Nº de juguetes de 1 €"}$$
$$y \equiv \text{"Nº de juguetes de 2 €"}$$
$$z \equiv \text{"Nº de juguetes de 5 €"}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{5} = y \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{x}{3} \\ x + 2y + 5z = 228 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 228 \\ 5y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -456 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 5F_3 + 7F_2 \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -57 & -2280 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\cdot 8 + 5 \cdot 40 = 228 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y - 40 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -57z = -2280 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 12 \\ y = 8 \\ z = 40 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) *(1 punto) Calcule a, b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1,2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.*

b) *(1 punto) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1,2)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $(x_0, y_0) = (1,2) \implies f(1) = 2 \implies a + b + 2 = 2 \implies \odot\ a + b = 0$

$$f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = -4 \implies 2a - b + 2 = -4 \implies \odot\ 2a - b = -6$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a - b = -6 \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{c} a = -2 \\ b = 2 \end{array}}$$

b) $$\left.\begin{array}{llll} (x_0, y_0) = (1,2) & \implies f(1) = 2 & \implies & \odot\ a + b = 0 \\ f''(x) = 2a + \dfrac{2b}{x^3} & \implies f''(1) = 0 & \implies & \odot\ 2a + 2b = 0 \end{array}\right\} \implies \boxed{a = -b}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos con: $\quad P(A) = \dfrac{2}{5} \quad \& \quad P(B) = \dfrac{1}{2} \quad \& \quad P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{4}{5}$

a) *(1 punto) Calcule $P(A \cap \overline{B})$.*

b) *(1 punto) ¿Son A y B incompatibles?*

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B}}{P(\overline{B})} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{5} \implies P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{5}$$

b) $$P(A \cap \overline{B}) = \underbrace{P(A)}_{2/5} - P(A \cap B) = \frac{2}{5} \implies P(A \cap B) = 0 \implies A \text{ y } B \text{ son incompat.}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0.2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) (1 punto) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$P \equiv \text{"Proporción de cajas grandes sobre el total"}$$

a) $n = ? \quad \& \quad p = 0.2 \quad \& \quad q = 1 - p = 0.8 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \leq 0.08 \implies n \geq 165.77 \implies \boxed{n = 166}$$

b) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{25}{200} = 0.125 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.875 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{200}} = 0.046$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.079; 0.171)}$$

Julio 2021 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto) Calcule los valores del parámetro real* a *para los cuales la matriz* A *tiene inversa.*

b) *(1 punto) Para* $a = 2$ *calcule, si existe, la matriz* X *que satisface* $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = -a - 1 = 0 \implies a = -1 \implies \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Para $a = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ & $|A| = -2 - 1 = -3$

$$\text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0.5 *euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos* 6000 *metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de* 5000 *metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de* 8000 *metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.*

a) *(1 punto) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.*

b) *(1 punto) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "m de cable A2020"
  $y \equiv$ "m de cable B2020"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

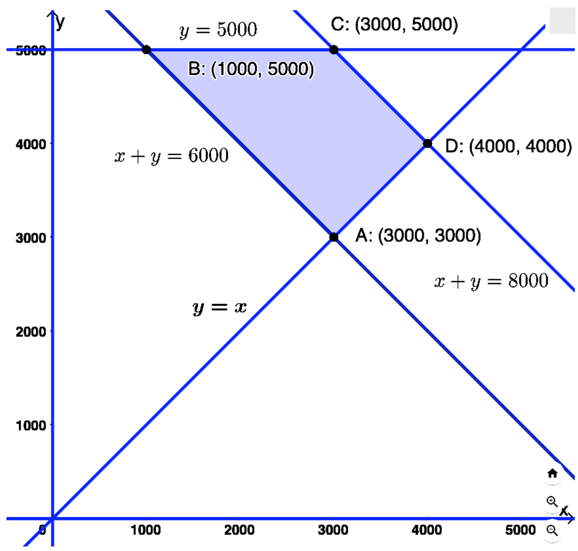
$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 6000 & \to (0, 6000) \quad \& \quad (6000, 0) \\ ② \; y \leq 5000 & \to (0, 5000) \\ ③ \; x + y \leq 8000 & \to (8000, 0) \quad \& \quad (8000, 0) \\ ④ \; y \geq x & \to (0, 0) \quad \& \quad (5000, 5000) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 2x + 0.5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	3000	3000	7500
B	1000	5000	4500
C	3000	5000	8500
D	4000	4000	10000



Por tanto el *coste mínimo* es de 4500 euros y se produce con una producción de 1000 m de A2020 y 5000 m de B2020.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si\ x \le 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si\ x > 3 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) `Continuidad:`

- Si $x < 3$, $f(x) = x^2 - x - 1$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 3$, $f(x) = \dfrac{3a}{x}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, luego continua en $x > 3$.
- Si $x = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3a}{x} = a \\ f(0) = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) \text{ será continua en } x = 3 \text{ si:} \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3) \\ \qquad \Longrightarrow \boxed{a = 5} \end{array}\right.$$

`Derivabilidad:` Para $a = 5$ la función será:

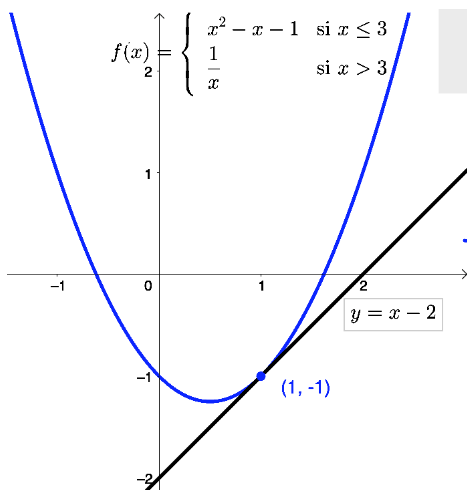
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{15}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -\dfrac{15}{x^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 5 \\ f'(3^+) = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} \text{Como } f'(3^-) \ne f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \end{array}\right.$$

b) Para $a = 1$ la función $f(x)$ será:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 1 \Longrightarrow y_0 = f_1(x_0) = f_1(1) = -1$$
$$\Longrightarrow (x_0, y_0) = (1, -1)$$
$$f_1'(x) = 2x - 1$$
$$m_r = f_1'(x_0) = f_1'(1) = 1$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y + 1 = 1 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = x - 2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que

$$P(A) = 0.5 \qquad \& \qquad P(\overline{B}) = 0.8 \qquad \& \qquad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9$$

a) (1 punto) Estudie si los sucesos A y B son independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $P(\overline{B}) = 0.8 \implies P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.8 = 0.2$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.9 \implies P(A \cap B) = 0.1$

$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$

$P(A \cap B) = 0.1 = P(A) \cdot P(B) \implies A$ y B son sucesos independientes.

b) $$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap P(\overline{B}))}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})}$$

$$= \frac{1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right]}{P(\overline{B})} = \frac{1 - (0.5 + 0.2 - 0.1)}{0.8} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de los huevos (gr)"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 60$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 3.506$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (56.494; 63.506)}$$

b) $X : \mathcal{N}(59, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(59, \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right)$

$$\begin{aligned} P(57 < \overline{X} < 61) &= P\left(\frac{57-59}{{}^{8}/\sqrt{10}} < Z < \frac{61-59}{{}^{8}/\sqrt{10}}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - P(Z < -0.79) = P(Z < 0.79) - P(Z > 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - \big[1 - P(Z < 0.79)\big] = 2 \cdot P(Z < 0.79) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.7852 - 1 = 0.5704 \end{aligned}$$

Julio 2021 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x+2ay+z&=0\\ -x-ay&=1\\ -y-z&=-a \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a=3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0\\ -1 & -a & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a+1 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 6 + 4 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y + 4 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -8 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ -1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right) \overset{a \neq -1/2}{\sim} \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ \boxed{a = 1} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \square & 0 \\ 0 & 1 & \square & 1 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 3$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 4 - 6 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z - 3 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y = -2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ z = 4 \\ y = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

a) (1 punto) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $(x-1)^2 = 0 \implies x = 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio de la función

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists \ A.H.$$

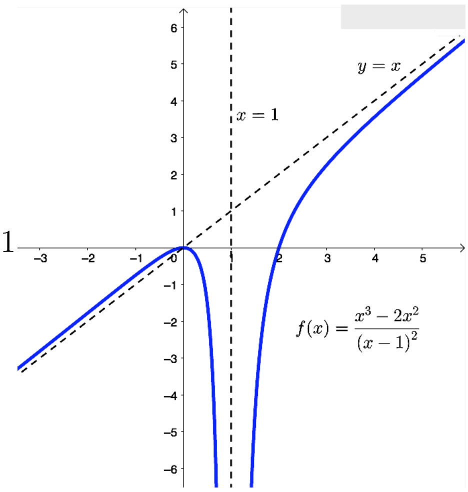
- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x^3 - 2x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - mx\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{x^3} + \cancel{2x^2} - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{(x-1)^2}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0 \implies A.O. \text{ en } y = x$$



b) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)\cdot(x-1)^{\cancel{2}} - (x^3 - 2x^2)\cdot 2\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 4x = 0 \implies x\cdot(x^2 - 3x + 4) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 1)$, y tiene un *máximo relativo* en $(0, 0)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:*
>
> $$f'(x) = 3x^2 + 8x$$
>
> *a) (1 punto) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.*
>
> *b) (1 punto) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)*

Solución.

a) $f'(x) = 3x^2 + 8x \implies f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(3x^2 + 8x\right) dx = x^3 + 4x^2 + C$

$f(1) = 11 \implies 1 + 4 + C = 11 \implies C = 6 \implies \boxed{f(x) = x^3 + 4x^2 + 6}$

b) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = x \cdot (3x + 8) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 8 = 0 \implies x = -8/3 \end{cases}$$

	$(-\infty, -8/3)$	$(-8/3, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -8/3) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-8/3, 0)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 6)$ y un *máximo relativo* en $(-8/3, 418/27)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0.02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0.06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) (1 punto) No sufra fracaso escolar.

b) (1 punto) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

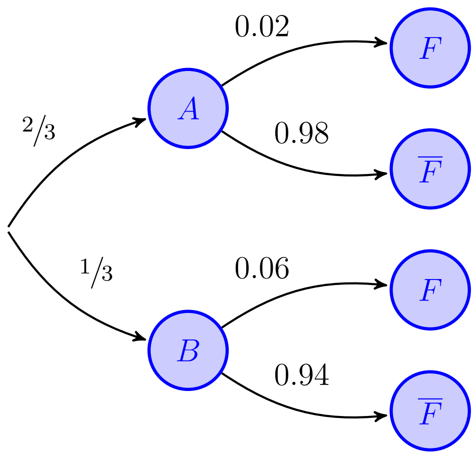
(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{“El alumno reside en el municipio } A\text{”} \\ B &\equiv \text{“El alumno reside en el municipio } B\text{”} \\ F &\equiv \text{“El alumno tiene fracaso escolar”} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \cdot P(B) + P(B) = 1 \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= P\big((A \cap \overline{F}) \cup (B \cap \overline{F})\big) \\ &= P(A \cap \overline{F}) + P(B \cap \overline{F}) \\ &= P(A) \cdot P(\overline{F} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A \mid F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{1 - P(\overline{F})} \\ &= \frac{{}^2\!/\!_3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.4 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) *(1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *(1 punto) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30.5 minutos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{"Tiempo para hacer el test (minuotos)"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (1.96 \cdot 3)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(32, 3) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}\left(32, \dfrac{3}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}(32, 0.75)$

$$P(\overline{X} < 30.5) = P\left(Z < \frac{30.5 - 32}{0.75}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

2022

Curso 2021/22

Modelo 2022
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) (1 punto) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2a - 4 = 0 \implies a = 2$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 3 \quad \& \quad 2x + y \leq 8 \quad \& \quad x + 2y \leq 10 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

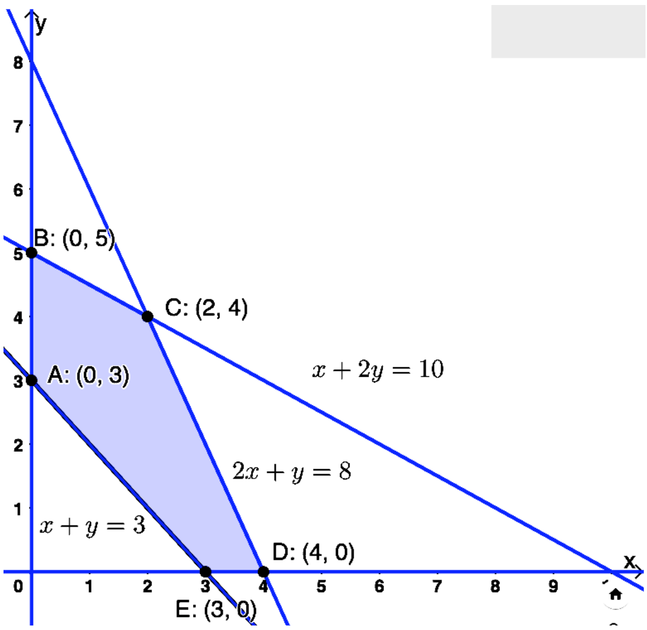
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 3 & \to (0,3) \quad \& \quad (3,0) \\ ② \; 2x + y \leq 8 & \to (0,8) \quad \& \quad (4,0) \\ ③ \; x + 2y \leq 10 & \to (0,5) \quad \& \quad (10,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + 3y$

- `Región factible` Representamos S y hallamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	3	9
B	0	5	15
C	2	4	16
D	4	0	8
E	3	0	6

Por tanto la *función factible* $f(x, y)$ tiene un valor máximo igual a 16 que se produce en el punto $C(2, 4)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

a) *(1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

b) *Calcule*

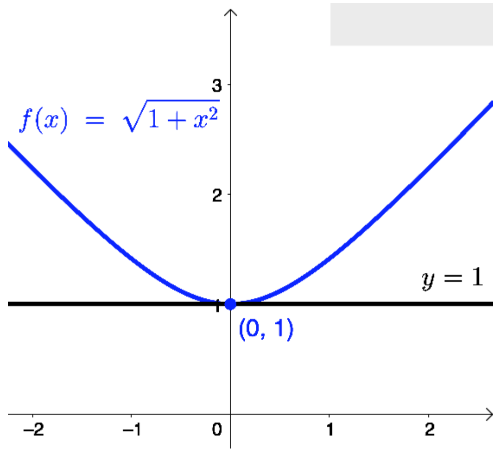
$$\int_0^1 2x \cdot f(x)\,dx$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) Recta tangente en $x = 0$

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 1 \\ &\implies (x_0, y_0) = (0,1) \\ f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ m_r &= f'(x_0) = f'(0) = 0 \\ r &\equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \\ y - 1 &= 0 \cdot (x - 0) \\ r &\equiv y = 1 \end{aligned}$$



b) $\displaystyle\int_0^1 2x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\sqrt{u}}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}\,\Big]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{8} - 1\right) \simeq 1,2189$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

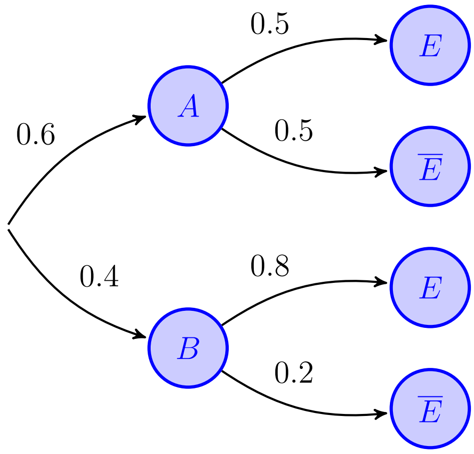
b) (1 punto) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El plato es del primer restaurante”}$$
$$B \equiv \text{“El plato es del segundo restaurante”}$$
$$E \equiv \text{“El plato es productos ecológicos”}$$



a) $P(E) = P\Big((A \cap E) \cup (B \cap E)\Big)$
$$= P(A \cap E) + P(B \cap E)$$
$$= P(A) \cdot P(E \mid A) + P(B) \cdot P(E \mid B)$$
$$= 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.62$$

b) $P(B \mid \overline{E}) = \dfrac{P(B \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{E} \mid B)}{1 - P(E)}$
$$= \frac{0.4 \cdot 0.2}{1 - 0.62} = 0.2105$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0.25 horas.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2.9 horas si $\mu = 2.75$ horas.*

b) *(1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(2.9388, 3.0613)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(2.75, 0.25) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2.75, \dfrac{0.25}{\sqrt{25}} = 0.05\right)$

$$P\left(\overline{X} < 2.9\right) = P\left(Z < \frac{2.9 - 2.75}{0.05}\right) = P(Z < 3) = 0.9987$$

b) $n = 64 \qquad \& \qquad IC = (2.9388, 3.0623)$

$$E = \frac{3.0623 - 2.9388}{2} = 0.06125 \xRightarrow{E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.25}{\sqrt{64}} = 0.06125 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$

Modelo 2022
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x-y+z &= 2 \\ x-y+az &= -1 \\ 2x+y+z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a=-2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3a+3 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=-2$ por el método de Gauss, sabiendo que como

$a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 + 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y - 1 = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ z = 1 \\ y = 1 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ \boxed{a = 1} \end{array}\right.$$

- Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE
- Si $a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \square & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = -2$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 + 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y - 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 2x - 3}$$

a) *(1 punto) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.*

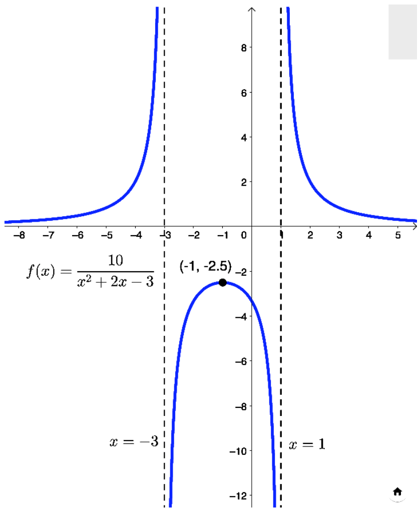
b) *(1 punto) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x = \{-3, 1\} \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre los puntos que no pertenecen al dominio.



$$\lim_{x\to -3} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{10}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{10}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{-20 \cdot (x+1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \implies -20 \cdot (x+1) = 0 \implies x = -1$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$+$	-	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$ y *decreciente* en $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(-1, -5/2)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & si\ x \leq 2 \\ \ln(x-1) & si\ x > 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.

b) (1 punto) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

- Si $x < 2$, $f(x) = ax^2 - 2x$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 2$, $f(x) = \ln(x-1)$, que es continua en $x - 1 > 0 \implies x > 1$, luego continua en $x > 2$.
- Si $x = 2$
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(ax^2 - 2x\right) = 4a - 4$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \ln(x-1) = 0$
  - $f(2) = a \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 4a - 4$

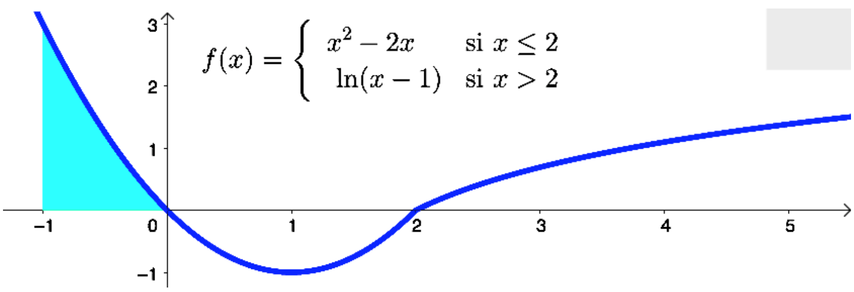
Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2 \implies \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$$4a - 4 = 0 \implies \boxed{a = 1}$$

Entre las rectas verticales $x = -1$ y $x = 0$ la función, para $a = 1$, $f(x) = x^2 - 2x$, que corta al eje OX en $x = 0$ y $x = 2$, lo que define un único recinto $A_1 = (-1, 0)$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

$$Area = |A_1| = \frac{4}{3} \simeq 1.333\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Entre los deportistas profesionales, el 50 % disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30 % está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10 % de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.

b) (1 punto) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$B \equiv$ "Los depostistas tienen **beca** de alto rendimiento"
$E \equiv$ "Los deportistas cursan **estudios superiores**"

$$P(B) = 0.5 \qquad \& \qquad P(E) = 0.3 \qquad \& \qquad P(B \cap E) = 0.1$$

a) $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = 0.7$

b) $P(\overline{B} \mid \overline{E}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(\overline{B \cup E})}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - P(B \cup E)}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - 0.7}{1 - 0.3} \simeq 0.4286$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) *(1 punto) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 98 % para estimar μ.*

b) *(1 punto) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 6) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 44$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{6}{\sqrt{81}} = 1.0967$$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (42.9033; 45.0967)}$

b) $n = ?$ & $2E \leq 3 \implies E \leq 1.5$ & $1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \leq 1.5 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{6}{1.5}\right)^2 = 61.47 \implies \boxed{n = 62}$$

Junio 2022

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.*

b) *(1 punto) Calcule A^{-1} para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 - 2a - 2 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{3}$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

El dueño de una empresa que organia fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche y por cada litro de leche debe echar como máximo 1.6 litros de chocolate. Además solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1 euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcular el beneficio que se obtiene.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de leche en la mezcla (litros)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de chocolate líquido en la mezcla (litros)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

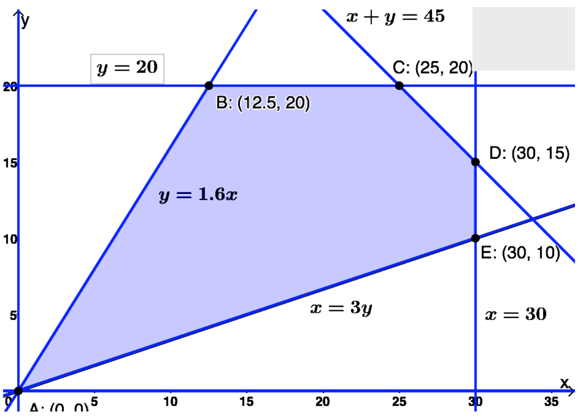
$$\begin{cases} ① \; x \leq 3y & \to (0,0) \quad \& \quad (30,10) \\ ② \; y \leq 1.6x & \to (0,0) \quad \& \quad (10,16) \\ ③ \; x+y \leq 45 & \to (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ ④ \; x \leq 30 & \to (30,0) \\ ⑤ \; y \leq 20 & \to (0,20) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

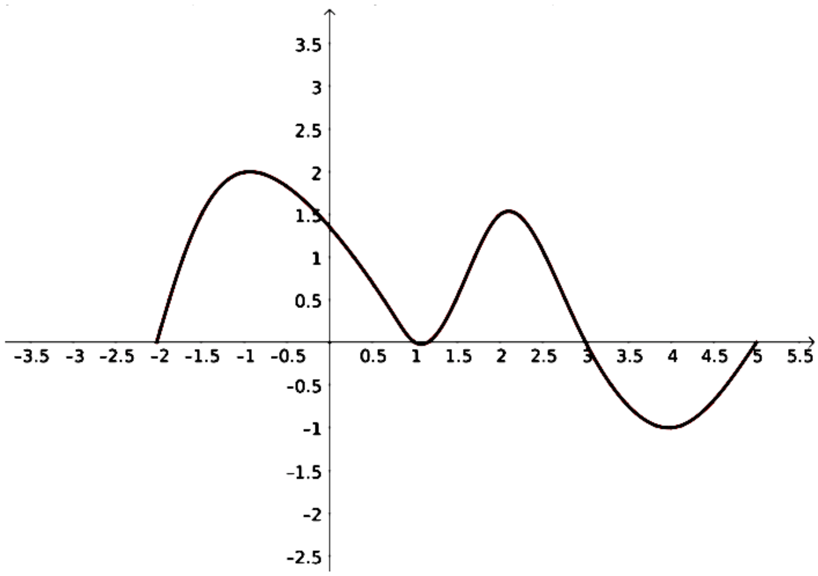
Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	12.5	20	52.5
C	25	20	65
D	30	15	60
E	30	10	50



El *beneficio máximo* es de 65 euros y se produce mezclando 25 litros de leche y 20 de chocolate líquido.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$.

a) (1 punto) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) (1 punto) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\, dx$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

a) Los intervalos en los que $f'(x) > 0$ corresponden a aquellos en los que la función es creciente, es decir: $(-2, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5)$.

b) La integral $\int_{-2}^{5} f(x)\, dx$ representa la suma de áreas acotadas por la función $f(x)$ y el eje OX entre los puntos $x = -2$ y $x = 5$. Las áreas situadas por encima del eje de abscisas tendrán signo positivo, mientras que las que están por debajo del citado eje tendrán signo negativo. Como las áreas que están por encima del eje OX son superiores a la que se encuentra por debajo del mismo, la integral pedida tendrá signo positivo.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.6 \qquad \& \qquad P(A \mid B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(A \mid B^c) = 0.8$$

, siendo B^c el suceso complementario de B.

a) (1 punto) Calcule $P(B)$.

b) (1 punto) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

Utilizaremos la notación $\overline{B}$ para el suceso complementario del suceso B.

a) $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.4 \implies P(A \cap B) = 0.4 \cdot P(B) \circledast$$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.6 - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{0.6 - 0.4 \cdot P(B)}{1 - P(B)} = 0.8 \implies 0.6 - 0.4 \cdot P(B) = 0.8 - 0.8 \cdot P(B)$$

$$\implies \begin{cases} 0.4 \cdot P(B) = 0.2 \implies \boxed{P(B) = 0.5} \\ P(A \cap B) = 0.4 \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2 \end{cases}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ \text{Los sucesos } A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los sacos de cemento (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 50$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (48.85; 51.15)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10.82 \implies \boxed{n = 11}$$

Junio 2022
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ ax - y - a = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a - 2a^2 = 2a \cdot (1 - a) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 - \frac{1}{4} = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5 - 4z = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1/4 \\ y = 1 \\ z = -1/4 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

a) (1 punto) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblícuas).

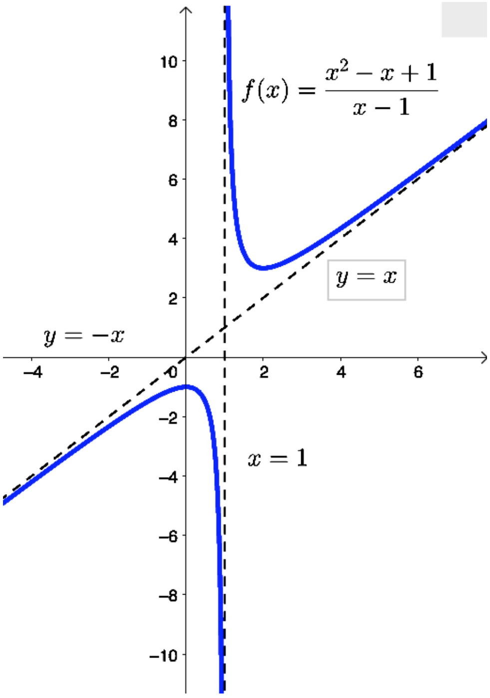
b) (1 punto) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) ▪ `A. Vertical` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



▪ `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

▪ `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - mx\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{x - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x$.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\cdot(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(2) = \dfrac{4-4}{(2-1)^2} = 0$, luego en $x = 2$ hay un punto singular

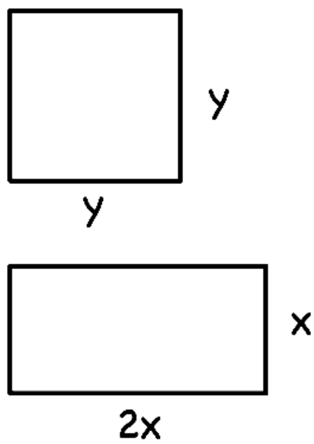
Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 *céntimos de* $euro/cm^2$ *para el cuadrado y* 10 *céntimos de* $euro/cm^2$ *para el rectángulo. Si el alambre inicial mide* 450 *cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.*
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 *cifras decimales para realizar los cálculos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

Nombramos las incógnitas como se muestra en la figura, de manera que:



$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = 4y + 6x = 450 \implies y = \dfrac{225-3x}{2} \\ C(x,y) = 0.16y^2 + 0.1 \cdot 2x \cdot x \end{array}\right\}$$

$$\implies C(x) = 0.16 \cdot \left(\frac{225-3x}{2}\right)^2 + 0.2x^2 = 0.56x^2 - 54x + 2025$$

$C'(x) = 1.12x - 54 = 0 \implies x = 48.214$

$C''(x) = 1.12 \implies C''(48.214) > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mín en $x = 48.214$

Por lo que la longitud de los trozos que hace mínimo el coste de fabricación de las figuras será: $6x = 289.284$ cm para el rectángulo y $450 - 289.284 = 160.716$ cm para el cuadrado.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

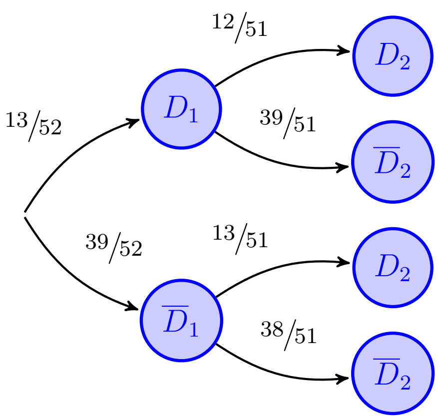
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) (1 punto) Si la carta observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución. Sean los sucesos:

$$D_i \equiv \text{“La carta de la extracción } i \text{ es de diamantes”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(D_2) &= P\Big((D_1 \cap D_2) \cup (\overline{D}_1 \cap D_2)\Big) \\ &= P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D}_1 \cap D_2) \\ &= P(D_1) \cdot P(D_2 \mid D_1) + P(\overline{D}_1) \cdot P(D_2 \mid \overline{D}_1) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(\overline{D}_1 \mid \overline{D}_2) &= \frac{P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)}{P(\overline{D}_2)} = \frac{P(\overline{D}_1) \cdot P(\overline{D}_2 \mid \overline{D}_1)}{1 - P(D_2)} \\ &= \frac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{38}{51} = 0.754 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) (1 punto) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73.8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) (1 punto) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=10} I.C.(58.2; 73.8)$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = \frac{73.8 - 58.2}{2} = 7.8 \implies E = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 7.8 \implies \boxed{\sigma = 12.58}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 6.32\right)$

$$\begin{aligned} P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) &= P\left(\frac{-10}{6.32} < Z < \frac{10}{6.32}\right) = P(-1.58 < Z < 1.58) \\ &= P(Z < 1.58) - P(Z < -1.58) = P(Z < 1.58) - P(Z > 1.58) \\ &= P(Z < 1.58) - \Big[1 - P(Z < 1.58)\Big] = 2 \cdot P(Z < 1.58) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9429 - 1 = 0.8858 \end{aligned}$$

Junio 2022 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $B = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) (1 punto) Calcule $A \cdot (A^2 - A^4)$.

b) (1 punto) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = A+aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A \cdot (A^2 - A^4) = A \cdot (A^2 - A^2) = A \cdot O = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = a^3 - a = a \cdot (a^2 - 1) = 0 \implies a = \{-1, 0, 1\} \implies \exists B^{-1} \; \forall a \neq \{-1, 0, 1\}$

$|AB| = |A| \cdot |B| = 0 \cdot |B| = 0 \implies \nexists (AB)^{-1} \; \forall a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Solo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5€ y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2€. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de sacos de 5 kg”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de sacos de 10 kg”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

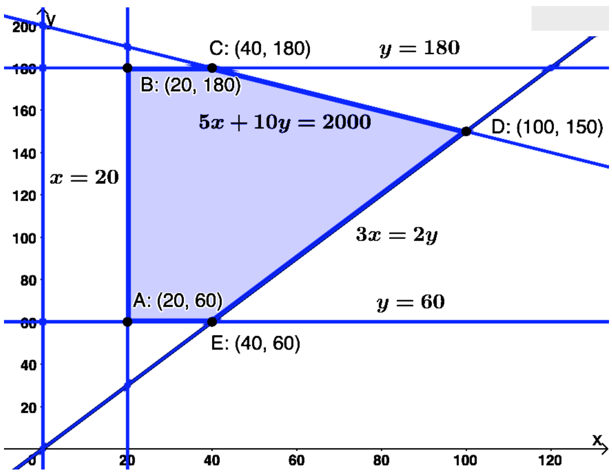
$$\begin{cases} ① \ 60 \leq y \leq 180 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (0,180) \\ ② \ 5x + 10y \leq 2000 & \rightarrow (0,200) \quad \& \quad (400,0) \\ ③ \ 3x \leq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (20,30) \\ ④ \ x \geq 20 & \rightarrow (20,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 2x + 5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	60	340
B	20	180	940
C	40	180	980
D	100	150	950
E	40	60	380



El *máximo beneficio* es de 980€ que se obtiene vendiendo 40 sacos de 5 kg y 180 de 10 kg.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & , \text{si } x < -2 \\ x^2 & , \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x + b & , \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, por lo que habrá que estudiar la continuidad de la función en sus fronteras. Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- Si $x = -2$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(2x - a) = -4 - a \\ \bullet \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4 \\ \bullet\ f(-2) = (-2)^2 = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow -4 - a = 4 \Longrightarrow \boxed{a = -8}$$

- Si $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x + b) = 1 + b \\ \bullet\ f(1) = (1)^2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 + b = 1 \Longrightarrow \boxed{b = 0}$$

b) Para $a = b = -8$ la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & , \text{si } x < -2 \\ x^2 & , \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x - 8 & , \text{si } 1 < x \end{cases}$

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} (2x + 8)\,dx + \int_{-2}^{0} x^2\,dx = x^2 + 8x\Big]_{-3}^{-2} + \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{0}$$

$$= (4 - 16) - (9 - 24) + 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{17}{3}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B) = 1/2$

a) (1 punto) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cup B) = 3/4$.

b) (1 punto) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cap B^c) = 1/4$.

Nota: B^c debota el suceso complementario de B.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) A y B independientes $\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot P(A)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow \frac{3}{4} = P(A) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot P(A) \Longrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - \dfrac{1}{2} \cdot P(A) = \dfrac{1}{2} \cdot P(A) = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

a) *(1 punto) Si la proporción poblacional fuese $P = 0.8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 6 %.*

b) *(1 punto) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de familias que tienen internet.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $n = ? \quad \& \quad p = 0.8 \implies q = 0.2 \quad \& \quad 2E < 0.06 \implies E < 0.03 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2.575\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{n}} \leq 0.06 \implies n \geq \left(\frac{2.575}{0.06}\right)^2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 294.69$$

$$\implies \boxed{n = 295}$$

b) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{170}{200} = 0.85 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0.15 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.85\cdot 0.15}{200}} = 0.0495$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.8005; 0.8995)}$$

Junio 2022 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales de pendiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ax + z = 1 \\ ax - y + z = 0 \\ ay + z = a + 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta la compatibiliad del sistema para diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a+1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 - 2a = a \cdot (-a - 2) = 0 \implies a = \{-2, 0\}$$

- Si $a \neq \{-2, 0\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Indet. (∞ Sol.)

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

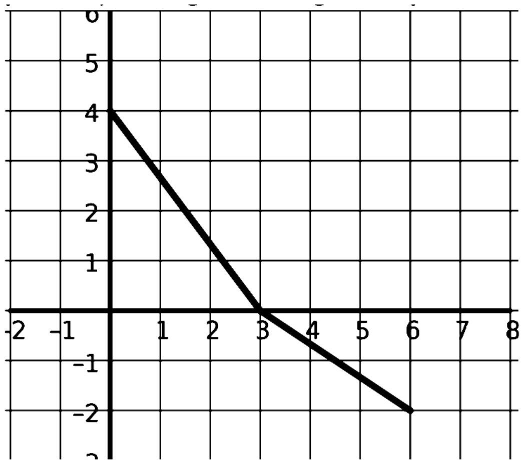
$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Indet. (∞ Sol.) (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow z = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + 1 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

La siguiente figura representa la gráfica de una función lineal a trozos $f : [0,6] \to \mathbb{R}$



a) *(1 punto) Determine razonadamente el valor de la integral definida* $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b) *(1 punto) ¿Cuál número es mayor* $\int_0^3 f(x)\,dx$ *o* $\int_0^6 f(x)\,dx$*? Razona tu respuesta.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) La integral $\int_0^3 f(x)\,dx$ indica la suma de áreas del recinto plano limitado por la función y el eje OX, siendo positivas las situadas por encima del eje de abscisas y negativas las que se encuentran por debajo.
Entre $x = 0$ y $x = 3$ tenemos un triángulo de área $A_1 = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6\ u^2$, situada por encima del eje OX. Por tanto $\int_0^3 f(x)\,dx = 6$

b) $\int_0^3 f(x)\,dx = 6 \quad \& \quad \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^6 dx = 6 - \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 6 - 3 = 3$
Por lo tanto $\int_0^3 f(x)\,dx > \int_0^6 f(x)\,dx$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

a) *(1 punto) Obtenga el valor de la constante K para que la recta tangente a la función en $x = 9$ sea paralela al eje de las x. Indique la expresión de dicha recta.*

b) *(1 punto) Para $K = 3$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y clasifique los extremos relativos de esta función.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x-K)^{\cancel{2}} - x^3 \cdot 2 \cdot \cancel{(x-K)}}{(x-K)^{\cancel{4}3}} = \dfrac{x^2 \cdot (x-3K)}{(x-K)^3}$

$$m_r = f'(x_0) = f'(9) = \frac{81 \cdot (9-3K)}{(9-K)^3} = 0 \implies 9 - 3K = 0 \implies \boxed{K = 3}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2} x_0 = 9 \implies y_0 = f(x_0) = f(9) = \frac{9^3}{(9-3)^2} = \frac{81}{4}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \frac{81}{4} = 0 \cdot (x-9) \implies \boxed{r \equiv y = \frac{81}{4}}$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot (x-9)}{(x-3)^3} = 0 \implies x = \{0, 9\}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, 9)$	$(9, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (9, +\infty)$ y *decreciente* en $(3, 9)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(9, {}^{81}/_{4})$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50 % de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30 % no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0.5, de que ganen los segundos es 0.7 y de que ganan los últimos es 0.9.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

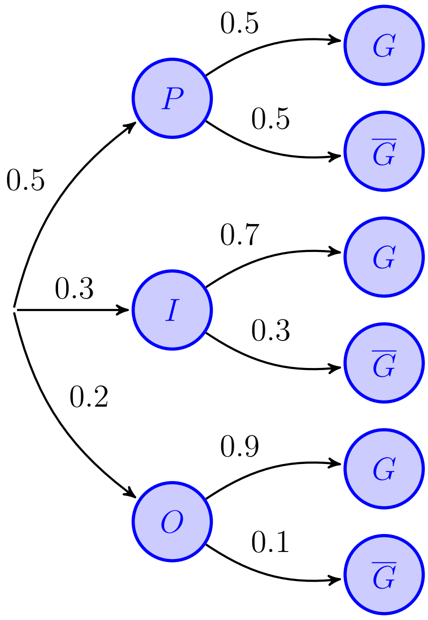
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$P =$ "El jugador es pesimista" $\qquad I =$ "El jugador es indiferente"

$O =$ "El jugador es opptimista" $\qquad G =$ "El jugador gana el juego"



a) $P(G) = P\Big((P \cap G) \cup (I \cap G) \cup (O \cap G)\Big)$

$$= P(P \cap G) + P(I \cap G) + P(O \cap G)$$
$$= P(P) \cdot P(G \mid P) + P(I) \cdot P(G \mid I)$$
$$+ P(O) \cdot P(G \mid O) = 0.5 \cdot 0.5$$
$$+ 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.64$$

b) $P(P \mid G) = \dfrac{P(P \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(P) \cdot P(G \mid P)}{P(G)}$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.64} = 0.3906$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?

b) (1 punto) Calcule $P(19 < \overline{X} < 22)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(20, 5) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(20, \dfrac{5}{\sqrt{25}} = 1\right)$

b) $$\begin{aligned} P(19 < \overline{X} < 22) &= P\left(\frac{19-20}{1} < Z < \frac{22-20}{1}\right) = P(-1 < Z < 2) \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - P(Z > 1) \\ &= P(Z < 2) - \Big[1 - P(Z < 1)\Big] = 0.9772 - (1 - 0.8413) = 0.8185 \end{aligned}$$

Julio 2022 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determina los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) (1 punto) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B) \cdot X = Y$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 4a = 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall\, a \neq 0.$

b) $(A - B) \cdot X = Y \Rightarrow \underbrace{(A - B)^{-1} \cdot (A - B)}_{I} \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot Y \Rightarrow X = (A - B)^{-1} \cdot Y$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A - B| = -4$$

$$\mathrm{Adj}(A - B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \implies (A - B)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A - B)^{\top}}{|A - B|} \cdot = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{-\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{(A-B)^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{Y} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por

$$7y - 8x \leq 3400 \ \ \& \ \ 3x - 8y \leq 2000 \ \ \& \ \ 11x + 14y \geq 9500 \ \ \& \ \ x \leq 1200 \ \ \& \ \ y \leq 1000$$

a) (1 punto) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x,y) = 2x+y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

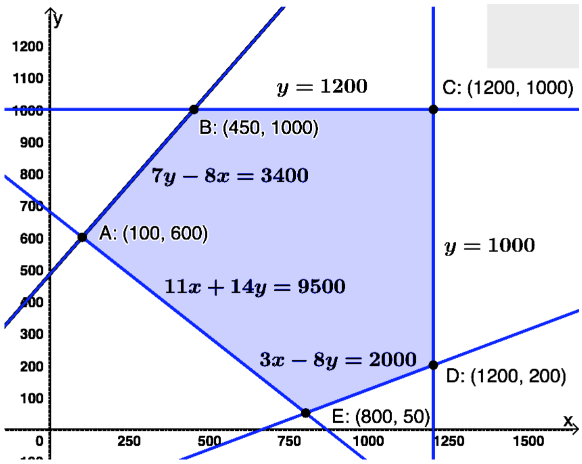
$$\begin{cases} ① \ 7y - 8x \leq 3400 & \rightarrow (100,600) \quad \& \quad (-425,0) \\ ② \ 3x - 8y \leq 2000 & \rightarrow (0,-250) \quad \& \quad (800,50) \\ ③ \ 11x + 14y \geq 9500 & \rightarrow (0,678.5) \quad \& \quad (863.6,0) \\ ④ \ x \leq 1200 \ \ \& \ \ y \leq 1000 & \rightarrow (0,1000) \\ ⑤ \ y \leq 1000 & \rightarrow (1200,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	100	600	800
B	450	1000	1900
C	1200	1000	3400
D	1200	200	2600
E	800	50	1650



El *mínimo* de $f(x,y)$ es de 800 y se produce en el punto $E : (100,600)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ *y* $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) *(1 punto) Se define* $h(x)$ *de la siguiente manera:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } x \leq 1 \\ g(x) & , \text{si } > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ *para que la función* g *sea continua en* $\mathbb{R}$*?*

b) *(1 punto) Para* $a = 2$*, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de* f *y de* g.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

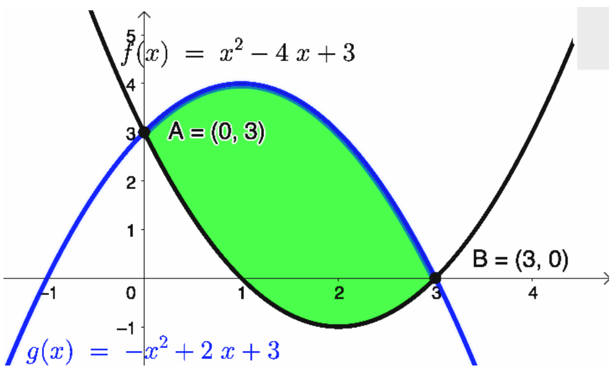
$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + 3 & , \text{si } > 1 \end{cases}$$

a) $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$, por lo que habrá que estudiar la continuidad de $h(x)$ en la frontera $x = 1$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(-x^2 + ax + 3\right) = a + 2$
- $h(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$

$h(x)$ es continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x\to 1} h(x) = h(1) \implies a + 2 = 0 \implies \boxed{a = -2}$

b) Para $a = 2$, las funciones: $f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \& \quad g(x) = -x^2 + 2x + 3$
Creamos la función
$h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 4x + 3) - (-x^2 + 2x + 3) = 2x^2 - 6x = 0 \implies x = \{0, 3\}$



$$A_1 = \int_0^3 h(x)\,dx = \int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx = \left.\frac{2x^3}{3} - 3x^2\right]_0^3 = (18 - 27) - 0 = -9$$

$Area = |A_1| = |-9| = 9\ u^2$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además suponga que $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(B) = 0.7$.

a) *(1 punto) Calcule $P(A^c)$.*

b) *(1 punto) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.*

Nota: *A^c y B^c son , respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

Nota: Utilizaremos la notación $\overline{A}$ para el suceso complementario del suceso A.

Del enunciado tenemos:

$$P(A \cup B) = 1 \qquad \& \qquad P(A \cap B) = 0.2 \qquad \& \qquad P(B) = 0.7$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A}) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Longrightarrow\ 1 = 1 - P(\overline{A}) + 0.7 - 0.2 \ \Longrightarrow\ P(\overline{A}) = 0.5$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0.2 y 0.3 los extremos de dicho intervalo.

a) *(1 punto) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.*

b) *(1 punto) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0.2; 0.3)$

$$\Longrightarrow\ \hat{p} = \frac{0.2 + 0.3}{2} = 0.25 \qquad \& \qquad E = \frac{0.3 - 0.2}{2} = 0.15$$

b) $E = ? \quad \& \quad \hat{p} = 0.25 \quad \& \quad n = 700 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \ \Longrightarrow\ \alpha = 0.05 \ \Longrightarrow\ \alpha/2 = 0.025 \ \Longrightarrow\ 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{700}} = 0.0321$$

Julio 2022 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x - az = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 1 = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

a) (1 punto) *Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.*

b) (1 punto) *Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \qquad \& \qquad f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$$

a)
- $f(2) = 4 \Rightarrow 2a + \dfrac{b}{2} = 4 \Rightarrow 4a + b = 8$
- $f'(2) = 0 \Rightarrow a - \dfrac{b}{4} = 0 \Rightarrow 4a - b = 0$

$$\begin{array}{r} 4a + \cancel{b} = 8 \\ 4a - \cancel{b} = 0 \\ \hline 8a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 1} \end{array}$$

$$4a - b = 0 \Rightarrow 4 \cdot 1 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 + 1}{x} \implies \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

- `A. Vertical` $\implies \exists A.V.$ en $x = 0$.
  - $\displaystyle\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} g(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$

- `A. Horizontal`

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$$

- `A. Oblicua` Es una recta de la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Luego $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.O.}$ en $y = x$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos. $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x \cdot \frac{170 - 0.85x}{5}$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) (1 punto) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) (1 punto) Determine entre qué valores debería encontrase la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $B(x) = I(x) - C(x) = x \cdot \dfrac{170 - 0.85x}{5} - (10 + 2x + x^2) = -10 + 32x - 1.17x^2$

$B'(x) = 32 - 2.34x = 0 \implies x = 13.67521$ (miles de litros)

$B''(x) = -2.34 \implies B''(13.67521) < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo en $(13.67521, 208.803)$

Por lo tanto el *Beneficio máximo* asciende a 208803 euros con una demanda de 13675.21 litros de fertilizante

b) $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{10 + 2x + x^2}{x} \leq 10 \implies \dfrac{10 + 2x + x^2}{x} - 10 \leq 0 \implies \dfrac{x^2 - 8x + 10}{x} \leq 0$

Hay que tener en cuenta que los costes vienen dados en miles de euros. Hallamos las raíces del numerador y denominador para resolver la inecuación:

$$x^2 - 8x + 10 = 0 \implies x = \{1.5505, 6.4495\}$$

	$(0, 1.5505)$	$(1.5505, 6.4495)$	$(6.4495, +\infty)$
Signo $\frac{C(x)}{x} - 10$	$+$	-	$+$

Por lo que el *Coste medio* sería inferior a 10000 si la demanda está comprendida entre 1550.5 y 6449.5 litros de fertilizante.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Tres amigas Ana, Berta y Carla elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

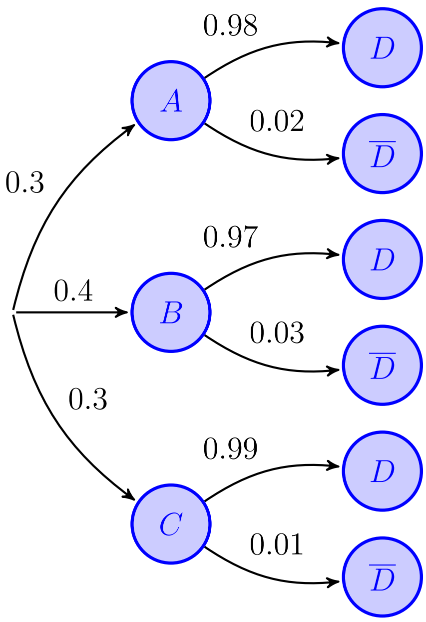
b) (1 punto) Si una invitación no llegó a su destino ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La invitación es enviada por Ana”}$$
$$B \equiv \text{“La invitación es enviada por Berta”}$$
$$C \equiv \text{“La invitación es enviada por Carla”}$$
$$D \equiv \text{“La invitación llega a su destino”}$$



a) $$P(\overline{D}) = P\Big((A\cap\overline{D})\cup(B\cap\overline{D})\cup(C\cap\overline{D})\Big)$$
$$= P(A\cap\overline{D}) + P(B\cap\overline{D}) + P(C\cap\overline{D})$$
$$= P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{D}\mid B)$$
$$+ P(C)\cdot P(\overline{D}\mid C) = 0.3\cdot 0.02$$
$$+ 0.4\cdot 0.03 + 0.3\cdot 0.01 = 0.021$$

b) $$P(A\mid\overline{D}) = \frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A)}{P(\overline{D})}$$
$$= \frac{0.3\cdot 0.02}{0.021} = 0.2856$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157.125 y 182.875.

a) *(1 punto) Calcule el valor de la media muestral.*

b) *(1 punto) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{\ n\ } I.C.(157.125; 182.875)$$

a) $\overline{x} = \dfrac{157.125 + 182.875}{2} = 170 \qquad \& \qquad E = \dfrac{182.875 - 157.125}{2} = 12.875$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \quad \& \quad n = 9 \quad \& \quad 1 - \alpha = ?$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{15}{\sqrt{9}} = 12.875 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$z_{\alpha/2} = 2.575 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.995 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.99}$$

Julio 2022 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

b) (1 punto) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A-B)\cdot X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = a^2 - 2a = a \cdot (a-2) = 0 \implies a = \{0, 2\} \implies \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0.2\}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$, y como $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de $(A-B)\cdot X = Y$

$$\begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies -a+1 = 2 \implies \boxed{a = -1}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

La plataforma digital Plusfix *va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre* 600 *y* 900 *minutos, debe tener al menos* 200 *minutos de cine y como mucho* 500 *minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene* 15€ *de beneficio por cada minuto de emisión de cine y* 10€ *de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Tiempo dedicado al cine (minutos)"
  $y \equiv$ "Tiempo dedicado al deporte (minutos)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

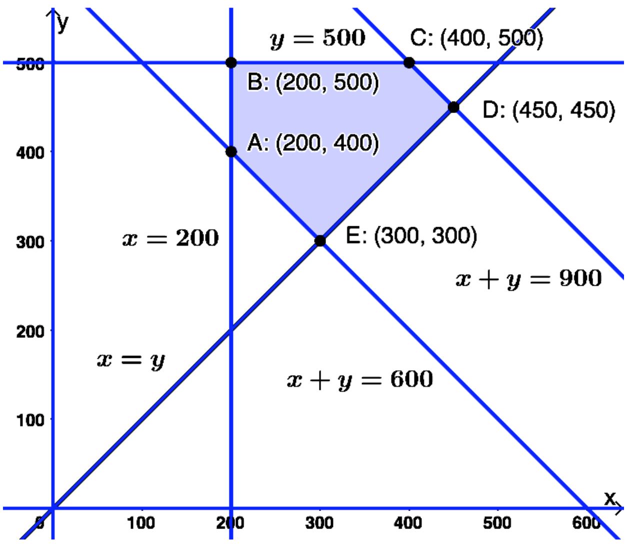
$$\begin{cases} ① \; x \leq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (500,500) \\ ② \; x + y \geq 600 & \rightarrow (0,600) \quad \& \quad (600,0) \\ ③ \; x + y \leq 900 & \rightarrow (0,900) \quad \& \quad (900,0) \\ ④ \; x \geq 200 & \rightarrow (200,0) \\ ⑤ \; y \leq 500 & \rightarrow (0,500) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 15x + 10y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	200	400	7000
B	200	500	8000
C	400	500	11000
D	450	450	11250
E	300	300	7500



La propuesta que supone un *beneficio máximo* es la de 450 minutos de cine y 450 minutos de deporte y reportará 11250€.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Halle* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx$.

b) *(1 punto) Considere*

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+5} \qquad \& \qquad g(x) = \ln x$$

Halle la derivada de la función compuesta $(f \circ g)(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $$\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \underbrace{\frac{4x}{2x^2+5}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\ln\left(2x^2+5\right)\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{4}\cdot\ln 7\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot\ln 5\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{4}\cdot\ln({}^7\!/\!{}_5) = \ln\sqrt[4]{{}^7\!/\!{}_5} \simeq 0.0841$$

b) $$(f \circ g)(x) = f\Big[g(x)\Big] = f(\ln x) = \frac{\ln x}{2\ln^2 x + 5}$$

$$(f \circ g)'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\left(2\ln^2 x + 5\right) - \ln x\cdot 4\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\left(2\ln^2 x+5\right)^2} = \frac{2\ln^2 x + 5 - 4\ln^2 x}{x\cdot\left(2\ln^2 x+5\right)^2}$$

$$= \frac{-2\ln^2 x + 5}{x\cdot\left(2\ln^2 x+5\right)^2}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que:

$$P(A) = 0.7 \qquad \& \qquad P(B^c) = 0.7 \qquad \& \qquad P(A \cap B) = 0.2$$

a) (1 punto) ¿Son A y B independientes?. Justifique su respuesta

b) (1 punto) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.

Nota: *A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Utilizaremos la notación $\overline{A}$ para el suceso complementario del suceso A.

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.7 = 0.3$

- $P(A \cap B) = 0.2$
- $P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{cases}$$

b) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \Big[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\Big]$$
$$= 1 - (0.7 + 0.3 - 0.2) = 0.2$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.*

b) *(1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0.5 gramos, con un nivel de confianza del 90 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de palomitas (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 200$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4.38$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (195.62; 204.38)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 0.5 \Rightarrow n > \left(1.645 \cdot \frac{10}{0.5}\right)^2 = 1082.41 \Rightarrow \boxed{n = 1083}$$

Julio 2022 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ ax - z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determine a para que el sistema NO sea compatible determinado.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a = a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

Si $a = \{0, 1\}$ $\quad |A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ El Sistema NO es Compatible Determinado.

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y - 3 \cdot 0 = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (**2** ***puntos***)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & , \text{ si } x \leq 1 \\ (x-a)^2 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$

a) (1 punto) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ *que hacen que* f *sea una función continua en su dominio.*

b) (1 punto) Para $a = 1/2$*, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de* f *con el eje de las* x*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, luego solo hay que estudiar la continuidad de la función en la frontera $x = 1$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(ax^2 - 1\right) = a - 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} = (1-a)^2$
- $f(1) = a \cdot 1^2 - 1 = a - 1$

$f(x)$ es continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x\to 1} = f(1)$

$$a - 1 = (1-a)^2 \implies a - 1 = a^2 - 2a + 1 \implies a^2 - 3a + 2 = 0 \implies \boxed{a = \{1, 2\}}$$

b) Para $a = 1/2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - 1 = 0 \implies \begin{cases} x = -\sqrt{2} \implies \boxed{(-\sqrt{2}, 0)} \\ \cancel{x = \sqrt{2}} > 1 \end{cases} \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \implies \cancel{x = 1/2} < 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingestión de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, t (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t) = 90 + Ct^2 e^{-t/5},\ 0 \leq t \leq 60$$

a) (1 punto) Obtenga razonadamente el valor de la constante C sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es $15/e$.

b) (1 punto) Para $C = 3$, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.

Nota: *Expresa los resultados con 2 cifras decimales.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) La tasa de variación instantánea no es otra cosa más que la derivada, por lo que en el enunciado nos están diciendo que $f'(5) = 15/e$

$$f'(t) = 2Cte^{-t/5} + Ct^2 e^{-t/5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = Cte^{-t/5} \cdot \left(2 - \frac{t}{5}\right)$$
$$f'(5) = \frac{15}{e} \implies 5C \cdot \frac{1}{\cancel{e}} = \frac{15}{\cancel{e}} \implies \boxed{C = 3}$$

b) Para $C = 3 \implies f(t) = 90 + 3t^2 e^{-t/5},\ 0 \leq t \leq 60$ y su derivada:

$$f'(t) = 3te^{-t/5} \cdot \left(2 - \frac{t}{5}\right) = 0 \implies \begin{cases} 3t = 0 \implies t = 0 \\ e^{-t/5} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \\ 2 - \dfrac{t}{5} = 0 \implies t = 10 \end{cases}$$

	$(0, 10)$	$(10, 60)$
Signo $f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La cantidad de glucosa en sangre disminuye a partir de los 10 minutos de la administración del medicamento. La cantidad máxima de glucosa en sangre se produce a los 10 minutos y vale $f(10) = 90 + \dfrac{300}{e^2} \simeq 130.6\ mg/dl$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un virus muy peligroso está presente en el 5 % de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85 % de los casos. Es decir, entree los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85 % de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85 % de las veces.

a) (1 punto) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?

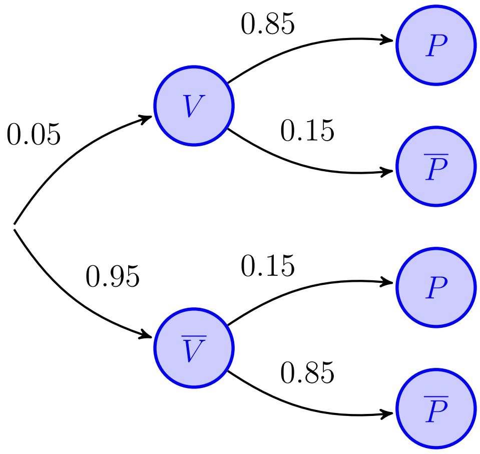
b) (1 punto) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$V \equiv \text{“El paciente es portador del virus”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en detección del virus”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(P) &= P\Big((V \cap P) \cup (\overline{V} \cap P)\Big) \\ &= P(V \cap P) + P(\overline{V} \cap P) \\ &= P(V) \cdot P(P \mid V) + P(\overline{V}) \cdot P(P \mid \overline{V}) \\ &= 0.05 \cdot 0.85 + 0.95 \cdot 0.15 = 0.185 \end{aligned}$$

b)
$$P(V \mid P) = \frac{P(V \cap P)}{P(P)} = \frac{P(V) \cdot P(P \mid V)}{P(P)} = \frac{0.05 \cdot 0.85}{0.185} = 0.2297$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El 64 % de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa caracterísitica de la muestra?

b) (1 punto) Halle la probabilidad de que más del 70 % de los indiviuos de la muestra posean dicha característica.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{B}(120, 0.64) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 120 > 10 \checkmark \\ np = 76.8 > 5 \checkmark \\ nq = 43.2 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(76.8, 5.26)$

b) El 70 % de los individuos de la muestra son $0.7 \cdot 120 = 84$

$$P(X > 84) = P(Y \geq 84.5) = P\left(Z \geq \frac{84.5 - 76.8}{5.26}\right) = P(Z \geq 1.46)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.46) = 1 - 0.9279 = 0.0721$$

2023

Curso 2022/23

Modelo 2023
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) (1 punto) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0 \implies a = -1 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \neq -1$

b) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = (1{+}1)^2 = 4 \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.
Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

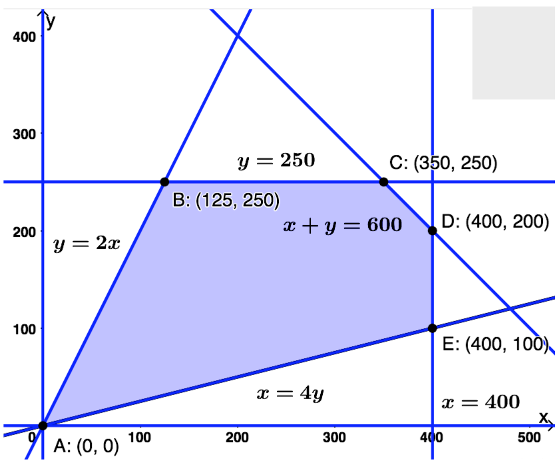
$$x \equiv \text{“Distancia recorrida por la furgoneta grande (miles de km)”}$$
$$y \equiv \text{“Distancia recorrida por la furgoneta mediana (miles de km)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x \leq 400 & \to (400,0) \\ ② \; y \leq 250 & \to (0,250) \\ ③ \; x+y \leq 600 & \to (0,600) \quad \& \quad (600,0) \\ ④ \; y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (300,6000) \\ ⑤ \; x \leq 4y & \to (0,0) \quad \& \quad (150,600) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 0.1x + 0.05y \quad$ (en miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	125	250	25
C	350	250	47.5
D	400	200	50
E	400	100	45

El *máximo beneficio* es de 50000 €, cuando la furgoneta grande recorre 400000 km y la mediana 100000 km.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Represente la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ prestando especial atención a la determinaación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de x en los que f alcanza máximos o mínimos relativos.*

b) *(1 punto) Represente la gráfica de $g(x) = f(x-3) + 2$, donde f es la función del apartado anterior.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a)
- `Cortes con los ejes:` Intentamos hallar los puntos de corte con el eje de abscisas por el método de Ruffini pero no encontramos ningún valor entero que complete el algoritmo.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \qquad \& \qquad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}$$

  El punto de corte con OY será: $(0, f(0)) = (0, 1)$

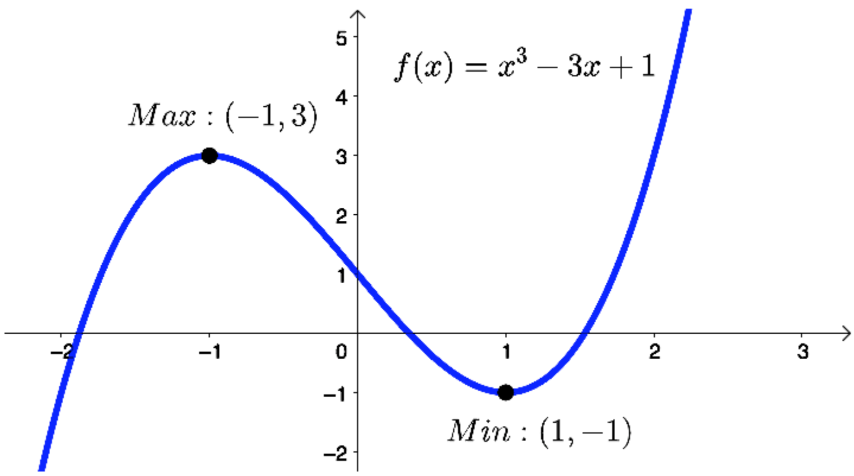
- `Extremos relativos:` $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

  La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1, -1)$ y un *máximo relativo* en $(-1, -3)$.

- `Curvatura:` $f''(x) = 6x$

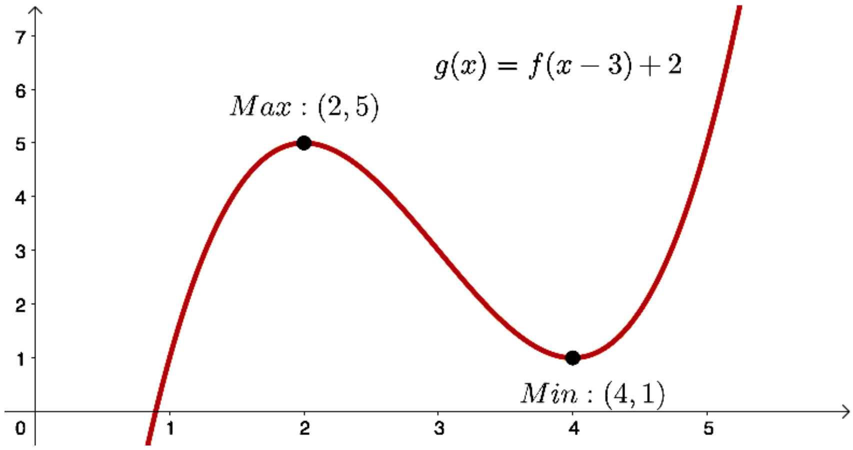
  - Si $x < 0 \implies f''(x) < 0$ y la función es *convexa* $(\cap)$
  - Si $x > 0 \implies f''(x) > 0$ y la función es *cóncava* $(\cup)$



b) Teniendo en cuenta que la gráfica de la función $f(x+a)+b$ es la misma que la de $f(x)$:

- Desplazada horizontalmente a unidades a la izquierda si a es positivo y a unidades a la derecha si a es negativo
- Desplazada verticalmente b unidades hacia arriba si b es positivo y b unidades hacia abajo si b es negativo

Por tanto la gráfica de $g(x) = f(x-3)+2$ será la misma que la de $f(x)$ desplazada 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Considere el lanzamiento de un dado equilibrado. Sea A el suceso el resultado es 1 o 2, B el suceso el resultado es 2 o 3 y C el resultado es par.

a) (1 punto) Verifique que $P(A \mid C) = P(B \mid C) = P(A \cap B \mid C)$.

b) (1 punto) Calcule $P(A \cup B \mid C)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

Veamos cada uno de los sucesos:

$$A = \{1,2\} \qquad B = \{2,3\} \qquad C = \{2,4,6\}$$
$$A \cap B = \{2\} \qquad A \cup B = \{1,2,3\}$$

a) $P(A \mid C) = \dfrac{1}{3}$ & $P(B \mid C) = \dfrac{1}{3}$ & $P(A \cap B \mid C) = \dfrac{1}{3}$

b) $P(A \cup B \mid C) = \dfrac{1}{3}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1.5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11.0703 y 12.9297.

a) (1 punto) Determine el valor de la media muestral.

b) (1 punto) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.5) \qquad \& \qquad I.C. = (11.0703; 12.9297)$

$$\overline{x} = \frac{11.0703 + 12.9297}{2} = 12$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.5) \xrightarrow{n=10} 1 - \alpha = ?$

$$E = \frac{12.9297 - 11.0703}{2} = 0.9297$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{10}} = 0.9297 \implies z_{\alpha/2} = 1.96 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.975$$

$$1 - \alpha/2 = 0.975 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies \alpha = 0.05 \implies \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$

Modelo 2023
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 1 - a^2 = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}} \textsc{Sistema Incompatible } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[F_2 - 2F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 2 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y + 2 = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las x y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.*

b) *(1 punto) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tantentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las x.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) $9x - x^2 = x \cdot (9 - x) = 0 \implies x = \{0, 9\}$, que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 9)$

$$A_1 = \int_0^9 f(x)\,dx = \int_0^9 (9x - x^2)\,dx = \left.\frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^9 = \left(\frac{729}{2} - \frac{729}{3}\right) - 0 = \frac{243}{2}$$

$$Area = |A_1| = \frac{243}{2} = 121.5\ u^2$$

b) Hallamos las rectas tangentes en los puntos de corte con $OX \implies (0, 0)$ y $(9, 0)$

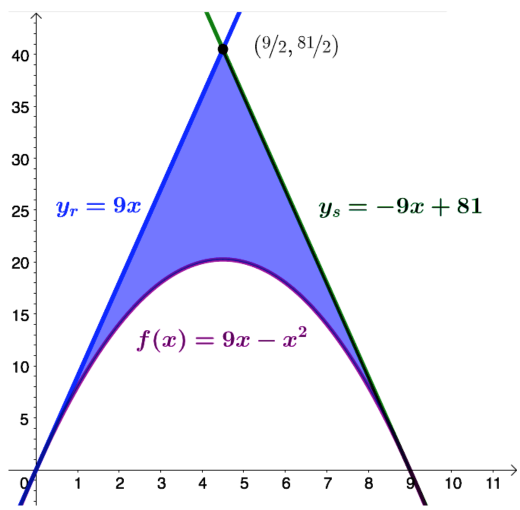
$$f'(x) = 9 - 2x$$

$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 9$	$m_s = f'(x_0) = f'(9) = -9$
$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$	$s \equiv y - y_0 = m_s \cdot (x - x_0)$
$y - 0 = 9 \cdot (x - 0) \implies r \equiv y = 9x$	$y - 0 = -9 \cdot (x - 9) \implies s \equiv y = -9x + 81$

Ambas rectas se cortan en $9x = -9x + 81 \implies x = \dfrac{9}{2} \implies y = 9 \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{81}{2}$, que definen un triángulo de área $\dfrac{9 \cdot {}^{81}/_{2}}{2} = \dfrac{729}{4}$.

Teniendo en cuenta que el área de la parábola la hemos calculado en el apartado anterior y vale $\dfrac{243}{2}$, el área pedida será:

$$Area = \frac{729}{4} - \frac{243}{2} = \frac{243}{4} = 60.75\ u^2$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Una pastelería hace diariamente una cantidad fija de dulces cuya masa requiere de un tiempo de reposo, el cual tiene que ser de una a dos horas. La pastelería usa un ingrediente secreto. La cantidad necesaria de ingrediente secreto, medida en gramos, varía en función del tiempo de reposo de la masa según la siguiente función:

$$Q(t) = \frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5, \qquad 1 \leq t \leq 2$$

siendo t el tiempo de reposo, medido en horas.

a) *(1 punto) La producción diaria de dulces tiene un coste fijo de 150 euros más el coste por el uso del ingrediente secreto, el cual cuesta 100 euros/gramo. Obtenga la función que representa el coste de producción diaria de estos dulces y encuentre el tiempo de reposo de la masa que minimiza dicho coste. Indique el valore del coste mínimo.*

b) *(1 punto) Obtenga el tiempo de reposo que maximiza el coste de producción e indique la cantidad de ingrediente secreto que se necesitaría en este caso.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) $C(t) = 150 + 100 \cdot Q(t) = 150 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5\right) = 50t^4 - 300t^2 + 650$

$$C'(t) = 200t^3 - 600t = 200t \cdot (t^2 - 3) = 0 \implies \begin{cases} \cancel{t=0}, \ t \notin [1,2] \\ \cancel{t = -\sqrt{3}} \notin [1,2] \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$C''(t) = 600t^2 - 600 \implies C''(\sqrt{3}) = 1200 > 0 \overset{(\cup)}{\Longrightarrow} \text{Mín. en } t = \sqrt{3}$$

Por lo tanto el coste mínimo es de $C(\sqrt{3}) = 200$ € con un tiempo de reposo de $t = \sqrt{3} \simeq 1.73$ horas.

b) Estudiemos la monotonía de la función coste $C(t)$

	$\left(1, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, 2\right)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Evaluamos la función coste en los extremos del dominio: $C(1) = 400$ & $C(2) = 250$, por lo que el coste máximo es de 400 € en $t = 1$ horas de reposo, con una cantidad de ingrediente secreto de $Q(1) = 2.5$ gramos.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?

b) (1 punto) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) Sean los sucesos:

$$D_i \equiv \text{“Sale el número } i \text{ en el dado”}$$
$$G \equiv \text{“El jugador se lleva el premio”}$$

La probabilidad de que salga un i en el dado es $P(D_i) = \dfrac{1}{6}$, mientras que la probabilidad de que gane el premio habiendo salido un i en el dado es $P(G \mid D_i) = \dfrac{1}{7-i}$, ya que solo hay un premio entre los $7-i$ sobres que restan, tras retirar i sobres vacíos.

$$\begin{aligned}
P(G) &= P\big((D_1 \cap G) \cup (D_2 \cap G) \cup (D_3 \cap G) \cup (D_4 \cap G) \cup (D_5 \cap G) \cup (D_6 \cap G)\big) \\
&= P(D_1 \cap G) + P(D_2 \cap G) + P(D_3 \cap G) + P(D_4 \cap G) + P(D_5 \cap G) + P(D_6 \cap G) \\
&= P(D_1) \cdot P(G \mid D_1) + P(D_2) \cdot P(G \mid D_2) + P(D_3) \cdot P(G \mid D_3) \\
&+ P(D_4) \cdot P(G \mid D_4) + P(D_5) \cdot P(G \mid D_5) + P(D_6) \cdot P(G \mid D_6) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1} = \frac{49}{120} \simeq 0.40833
\end{aligned}$$

b) $P(D_1 \mid G) = \dfrac{P(D_1 \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(D_1) \cdot P(G \mid D_1)}{P(G)} = \dfrac{1/6 \cdot 1/6}{49/120} = \dfrac{10}{147} = 0.06803$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0.55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98.02 %, el margen de error en la estimación no supera el 10 %.

b) (1 punto) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) $n =? \quad \& \quad \hat{p} = 0.55 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.45 \quad \& \quad E < 0.1 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9802$

$1 - \alpha = 0.9802 \implies \alpha = 0.0198 \implies \alpha/2 = 0.0099 \implies 1 - \alpha/2 = 0.9901 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.33$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.55 \cdot 0.45}{n}} < 0.1 \implies n \geq \left(\frac{2.33}{0.1}\right)^2 \cdot 0.55 \cdot 0.45 = 134.36$$

$$\implies \boxed{n = 135}$$

b) $n = 100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0.7 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.3 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{100}} = 0.0898$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.6102; 0.7898)}$$

Junio 2023
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.*

b) *(1 punto) Determine la matriz X tal que*

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1} \qquad \& \qquad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

b) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2 \quad , \ a \in \mathbb{R}$$

a) *(1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x)\,dx = e-1$.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(6x^2 + ae^x - 2\right) dx = 2x^3 + ae^x - 2x\Big]_0^1 = (\cancel{2} + ae - \cancel{2}) - a$$

$$= ae - a = a \cdot (e-1) = e - 1 \implies \boxed{a = 1}$$

b) $f(x) = 6x^2 + e^x - 2 \implies f'(x) = 12x + e^x$

$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = -1 \implies (x_0, y_0) = (0, -1)$

$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 1$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y + 1 = 1 \cdot (x - 0) \implies \boxed{r \equiv y = x - 1}$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^4}{x^2+1} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.

b) (1 punto) Determine las asíntotas de la función anterior.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- Si $x < 0 \quad f(x) = \dfrac{-x^4}{x^2+1}$, que es continua en $(-\infty, 0)$
- Si $x > 0 \quad f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, que es continua en $(0, +\infty)$
- `Continuidad en` $x = 0$:
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^4}{x^2+1} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x+1} = 1$
  - $f(0) = \dfrac{0^4}{0^2+1} = 0$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \implies f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 0$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b)
- `A. Vertical:` $\nexists A.V.$ debido a que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y la discontinuidad existente en la frontera $x = 0$ es inevitable de salto finito.
- `A. Horizontal:`
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^4}{x^2+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -\infty \implies \nexists \underset{x \to -\infty}{A.H.}$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = +\infty \implies \nexists \underset{x \to +\infty}{A.H.}$
- `A. Oblicua:` Por los grados de numerador y denominador solo $\exists \underset{x \to +\infty}{A.O.}$

  $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1$

  $n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} - x}{x+1} = -1$

  Luego $f(x)$ tiene una $\underset{x \to +\infty}{A.O.}$ en $y = x - 1$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.55$ y $P(B) = 0.1$. Además se sabe que $P(\overline{B} \mid A) = 0.89$, donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $$P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Longrightarrow 0.89 = \frac{0.55 - P(A \cap B)}{0.55} \Longrightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.0605}$$

b) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right]$$

$$= 1 - (0.55 + 0.1 - 0.0605) = 1 - 0.5895 \Longrightarrow \boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.4105}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95 % para la capacidad media de los botes de champú.*

b) *(1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0.5 mililitros, con un nivel de confianza del 90 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Capacidad del bote de champú (ml)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 200 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4.38$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (195.62; 204.38)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{n}} < 0.5 \Rightarrow n > \left(1.645 \cdot \dfrac{10}{0.5}\right)^2 = 1082.41 \Rightarrow \boxed{n = 1083}$

Junio 2023
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$x \equiv \text{“Nº de buñuelos de cholcolate”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de buñuelos de nata”}$$
$$z \equiv \text{“Nº de buñuelos de crema”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=220 \\ y=2z \\ 2z+3x=2y \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=220 \\ y-2z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -660 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3+5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -660 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+120+60=220 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y-2\cdot 60=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -11z=-660 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=40 \\ y=120 \\ z=60 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0.3 *litros de azul y* 0.7 *litros de amarilla, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita* 0.5 *litros de azul y* 0.5 *litros de amarillo. Actualmente se dispone de* 20 *litros de azul y* 28 *litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de* 1 *euro, y por litro de pintura VERDE2 es de* 1.2 *euros. No se pueden producir más de* 30 *litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

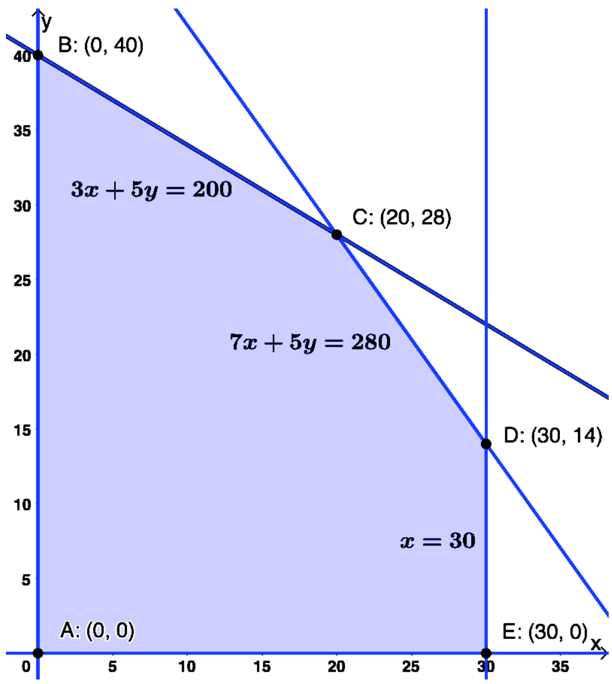
Solución.

	VERDE1	VERDE2	Restricciones
Azul (ℓ)	0.3	0.5	20
Amarillo (ℓ)	0.7	0.5	28
	≤ 30		

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "ℓ de pintura VERDE1"
  $y \equiv$ "ℓ de pintura VERDE2"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; 0.3x + 0.5y \leq 20 \\ ② \; 0.7x + 0.5y \leq 28 \\ ③ \; x \leq 30 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ① \; 3x + 5y \leq 200 & \rightarrow (0, 40) & \& & (66.7, 0) \\ ② \; 7x + 5y \leq 280 & \rightarrow (0, 56) & \& & (40, 0) \\ ③ \; x \leq 30 & \rightarrow (30, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = x + 1.2y$ (euros)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	40	48
C	20	28	53.6
D	30	14	46.8
E	30	0	30

El *beneficio máximo* es de 53.6 €, vendiendo 20 ℓ de VERDE1 y 28 ℓ de VERDE2.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x \qquad \& \qquad g(x) = 4x$$

a) *(1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.*

b) *(1 punto) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 = 0 \implies x = \{-2/3, 2\}$

	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-2/3, 2)$ y *decreciente* en $(-\infty, -2/3) \cup (2, +\infty)$.

b) $h(x) = f(x) - g(x) = -x^3 + 2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x}$

$= -x^3 + 2x^2 = -x^2 \cdot (x - 2) = 0$

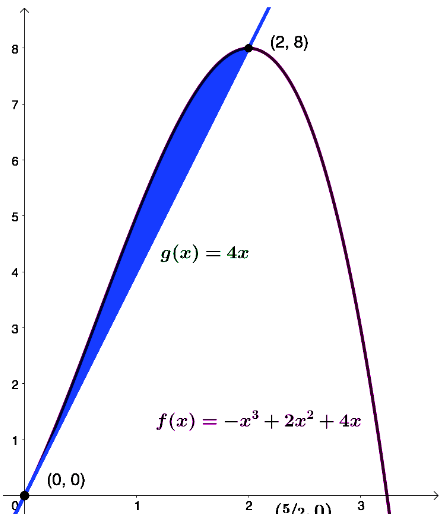
$\implies x = \{0, 2\}$

En el primer cuadrante define un único recinto de integración $A_1 : (0, 2)$

$$A_1 = \int_0^2 h(x)\, dx = \int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2\right) dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\Bigg]_0^2 = \left(-4 + \frac{16}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}$$

$$Area = |A_1| = \frac{4}{3} \simeq 1.33\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56.5 % del total, el 24 % correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19.5 % restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13.8 % del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86.1 % de las Universitarias y el 80.3 % de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Sea financiada por el ministerio.

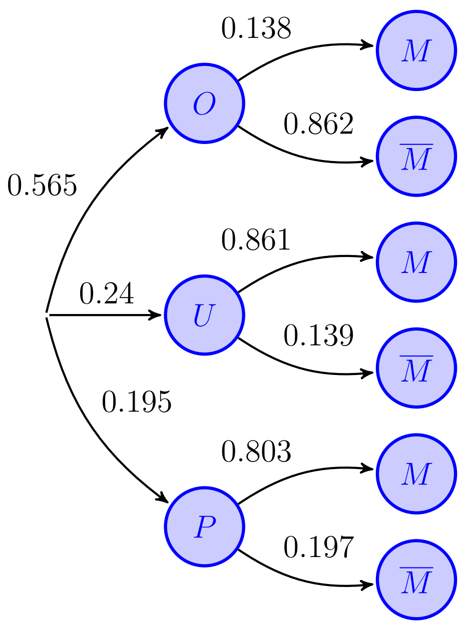
b) (1 punto) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$O \equiv$ "Las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Obligatorias"
$U \equiv$ "Las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Universitarias"
$P \equiv$ "Las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias"
$M \equiv$ "Las ayudas han sido financiadas por el ministerio"
$\overline{M} \equiv$ "Las ayudas han sido financiadas por la Comunidad Autónoma"



a) $P(M) = P\big((O\cap M)\cup(U\cap M)\cup(P\cap M)\big)$
$= P(O\cap M) + P(U\cap M) + P(P\cap M)$
$= P(O)\cdot P(M \mid O) + P(U)\cdot P(M\mid U)$
$+ P(P)\cdot P(M\mid P) = 0.565\cdot 0.138$
$+ 0.24\cdot 0.861 + 0.195\cdot 0.803 = 0.4412$

b) $$P(O\mid M) = \frac{P(O\cap M)}{P(M)} = \frac{P(O)\cdot P(M\mid O)}{P(M)}$$
$$= \frac{0.565\cdot 0.138}{0.4412} = 0.1767$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) (1 punto) Halle la probabilidad de que más de 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $$\left.\begin{array}{l} p = 0.3 \\ n = 120 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 120 > 30 \checkmark \\ np = 36 > 5 \checkmark \\ nq = 84 > 5 \checkmark \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{p} : \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = \mathcal{N}(0.3, 0.0418)$$

b) $$P(\hat{p} > 0.35) = P\left(Z > \frac{0.35 - 0.3}{0.0418}\right) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2)$$
$$= 1 - 0.8849 = 0.1151$$

Junio 2023 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcule $A^2 - A$.*

b) *(1 punto) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) $A^2 - A = I \implies A \cdot (A - I) = I \implies A^{-1} = A - I$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de aceite de girasol (litros)"
  $y \equiv$ "Cantidad de aceite de oliva (litros)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ y \geq 2x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,20) \\ ② \ x \geq 10 & \rightarrow (10,0) \\ ③ \ y \geq 24 & \rightarrow (0,24) \\ ④ \ x+y \leq 75 & \rightarrow (0,75) \quad \& \quad (75,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

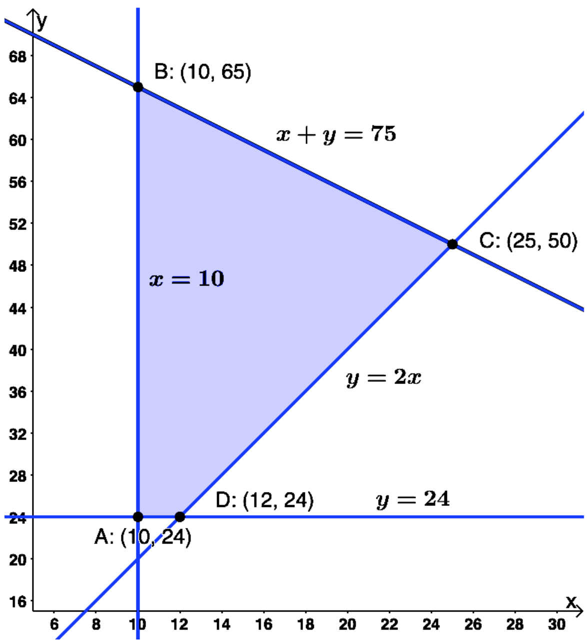
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = x + 3y \text{ (euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	24	82
B	10	65	205
C	25	50	175
D	12	24	84



El *beneficio máximo* es de 205 €, produciendo 10 litros de aceite de girasol y 65 de oliva.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5$$

a) (1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1 punto) Para $a = 1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5 \qquad \& \qquad f'(x) = 2ax + 4 \qquad \& \qquad f''(x) = 2a$$

a) E. Rel. en $x = 1 \implies f'(1) = 0 \implies 2a + 4 = 0 \implies \boxed{a = -2}$

$\implies f''(1) = 2a = -4 \neq 0 \implies$ E. Rel. en $x = 1$

b) Para $a = 1 \qquad f(x) = x^2 + 4x + 5 \quad \& \quad f'(x) = 2x + 4$

$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 5 \implies (x_0, y_0) = (0, 5)$

$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 4$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 5 = 4 \cdot (x - 0) \implies \boxed{r \equiv y = 4x + 5}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El informe ALADINO es un estudio de la Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición (AESAN) que se realiza a escolares de 6 a 9 años residentes en España. En el informe de 2019, el 50.2 % de los escolares encuestados tenían entre 6 y 7 años, los restantes tenían entre 8 y 9 años. Según los estándares de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se observó que el 23 % de los escolares estudiados presentaban sobrepeso y que en el grupo de escolares con 6 y 7 años de edad el 78 % no tenía sobrepeso. Eligiendo un escolar al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 6 y 7 años de edad.

b) (1 punto) No tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 8 y 9 años de edad.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)

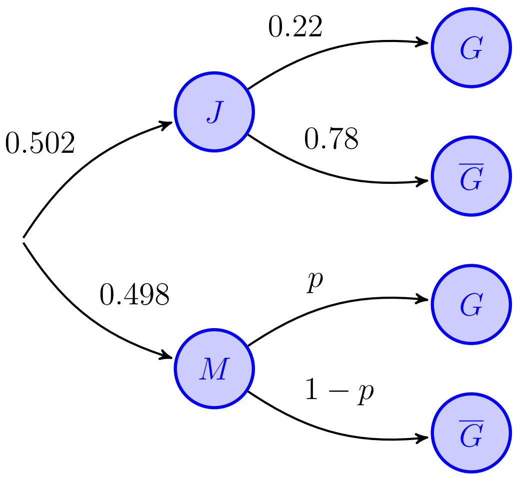
Solución.

Sean los sucesos:

$$J \equiv \text{“El estudiante tiene entre 6 y 7 años”}$$
$$M \equiv \text{“El estudiante tiene entre 8 y 9 años”}$$
$$G \equiv \text{“El estudiante tiene sobrepeso”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(J) = 0.502 \quad \& \quad P(M) = 0.498 \quad \& \quad P(G) = 0.23 \quad \& \quad P(\overline{G} \mid J) = 0.78$$



$$\begin{aligned} P(G) &= P\Big((J \cap G) \cup (M \cap G)\Big) \\ &= P(J \cap G) + P(M \cap G) \\ &= P(J) \cdot P(G \mid J) + P(M) \cdot P(G \mid M) \\ &= 0.502 \cdot 0.22 + 0.498 \cdot p = 0.23 \\ &\implies p = 0.24008 \end{aligned}$$

a) $P(J \cap G) = P(J) \cdot P(G \mid J)$
$= 0.502 \cdot 0.22 = 0.1104$

b) $P(M \cap \overline{G}) = P(M) \cdot P(\overline{G} \mid M)$
$= 0.498 \cdot (1 - 0.24008)$
$= 0.37844$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estimar el porcentaje de países firmantes de la Agenda 2030 que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible se tomó una muestra de países al azar.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0.20$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de países para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

b) (1 punto) Si la muestra aleatoria fue de 34 países, de los cuales 10 cumplían al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible, determine un intervalo de confianza al 95 %. para la proporción de países firmantes que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $n = ? \quad \& \quad p = 0.2 \quad \& \quad q = 1 - p = 0.8 \quad \& \quad E < 0.05 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} < 0.05 \implies n \geq \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 245.86$$

$$\implies \boxed{n = 246}$$

b) $n = 34 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{10}{34} = 0.2941 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.7059 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2941 \cdot 0.7059}{34}} = 0.1531$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.141; 0.4472)}$$

Junio 2023 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial: $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a + 2 = 0 \implies a = -1$$

- Si $a \neq -1 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

$\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sist. Comp.e Indet. (∞ Sol.)

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \frac{3+2\lambda}{3} - \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y + 2\lambda = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3+\lambda}{3} \\ y = \frac{3+2\lambda}{3} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & , \text{ si } x \leq 0 \\ 2x + a & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) (1 punto) Para $a = 1$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción B - Coincidentes)

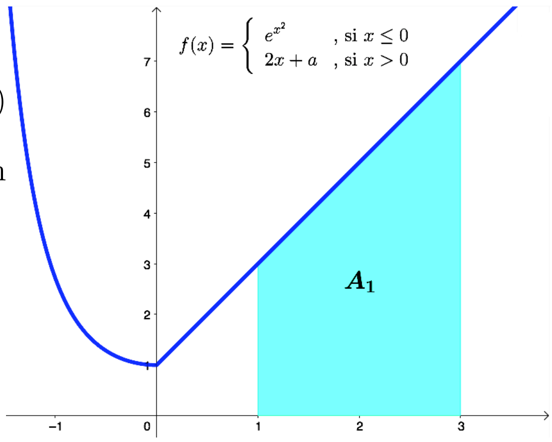
Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- `Continuidad en` $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{x^2} = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x + a) = a$
  - $f(0) = e^0 = 1$

  $f(x)$ es continua en $x = 0 \iff \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \implies \boxed{a = 1}$

b) Si $a = 1$, entre $x = 1$ y $x = 3$



$f(x) = 2x+1 = 0 \implies x = -1/2 \notin (0, +\infty)$

Entre las rectas $x = 1$ y $x = 3$ define un único recintos de integración $A_1 : (1, 3)$

$$A_1 = \int_1^3 f(x)\, dx = \int_1^3 (2x + 1)\, dx$$
$$= x^2 + x\Big]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10$$

$Area = |A_1| = 10\ u^2$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

a) (1 punto) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- `Dominio:` $x - 3 = 0 \implies x = 3 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = 3$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-3} = \left[\frac{5}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y = 1$

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

b) $f'(x) = \dfrac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} = \dfrac{-5}{(x-3)^2} = 0 \implies \nexists$ Sol.

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

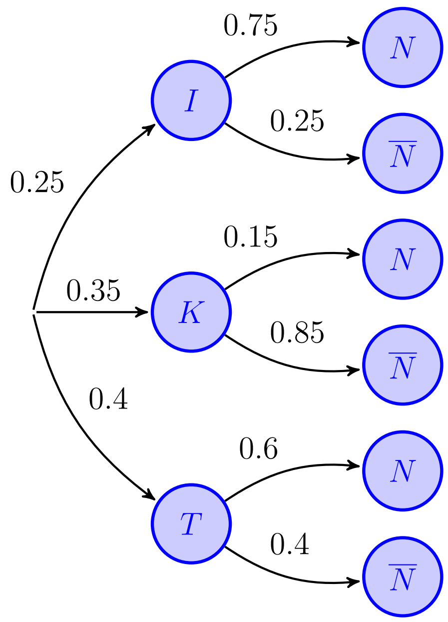
Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *En un festival de música actúan varios grupos del panorama nacional e internacional reconocidos en la industria musical actual. Los artistas se agrupan por estilo musical en las siguientes categorías: el* 25 % *son bandas de música* indie, *el* 35 % *de* k-pop *y el resto de música* trap. *Además, se sabe que son nacionales el* 75 % *de los grupos* indie, *el* 15 % *de las agrupaciones de* k-pop *y el* 60 % *de los artistas* trap. *Eligiendo un grupo musical al azar, calcule la probabilidad de que:*
>
> *a) (1 punto) Sea nacional.*
>
> *b) (1 punto) Toque música* indie, *sabiendo que es nacional.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“El artista es de música } \textit{indie}\text{”}$$
$$K \equiv \text{“El artista es de música } \textit{k-pop}\text{”}$$
$$T \equiv \text{“El artista es de música } \textit{trap}\text{”}$$
$$N \equiv \text{“El artista es nacional”}$$



a) $$\begin{aligned} P(N) &= P\Big((I\cap N)\cup(K\cap N)\cup(T\cap N)\Big) \\ &= P(I\cap N)+P(K\cap N)+P(T\cap N) \\ &= P(I)\cdot P(N\mid I)+P(K)\cdot P(N\mid K) \\ &+ P(T)\cdot P(N\mid T) = 0.25\cdot 0.75 \\ &+ 0.35\cdot 0.15 + 0.4\cdot 0.6 = 0.48 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(I\mid N) &= \frac{P(I\cap N)}{P(N)} = \frac{P(I)\cdot P(N\mid I)}{P(N)} \\ &= \frac{0.25\cdot 0.75}{0.48} = 0.3906 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas, obteniéndose una media muestral de 65 puntos. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Porcentaje de agua en el cuerpo humano (puntos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 65 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 4.606$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (60.394; 69.606)}$$

b) $X : \mathcal{N}(67, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(67, \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right) = \mathcal{N}(67, 2.53)$

$$P(65 < \overline{X} < 69) = P\left(\frac{65-67}{2.53} < Z < \frac{69-67}{2.53}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79)$$

$$= P(Z < 0.79) - P(Z < -0.79) = P(Z < 0.79) - \left[1 - P(Z < 0.79)\right]$$

$$= 2 \cdot P(Z < 0.79) - 1 = 2 \cdot 0.7852 - 1 = 0.5704$$

Julio 2023 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine A^3 y A^{2023}.

b) (1 punto) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^{2023} = A^{3 \cdot 674+1} = (A^3)^{674} \cdot A = I^{674} \cdot A = I \cdot A = A$

b) $|A| = 1 \xRightarrow{\exists\ A^{-1}} \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ & $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Podríamos haber razonado diciendo que $A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I \implies \boxed{A^{-1} = A^2}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

a) *(1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.*

b) *(1 punto) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 3$

$\implies (x_0, y_0) = (1, 3)$

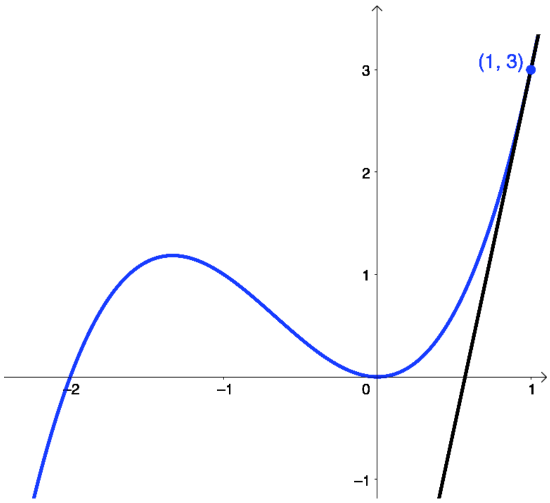
$f'(x) = 3x^2 + 4x$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 7$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - 3 = 7 \cdot (x - 1)$

$r \equiv y = 7x - 4$



b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = 3x \cdot \left(x + \dfrac{4}{3}\right) = 0 \implies x = \{0, -4/3\}$

$$f''(x) = 6x + 4 \implies \begin{cases} f''(0) = 4 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } (0, 0) \\ f''(-4/3) = -4 < 4/3 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } (-4/3, 32/27) \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & , \text{ si } x < 2 \\ e^x & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.*

b) *(1 punto) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- `Continuidad en` $x = 2$:
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(ax^2 + 3) = 4a + 3$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} e^x = e^2$
  - $f(2) = e^2$

$$f(x) \text{ es continua en } x = 2 \iff \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \xRightarrow{4a+3=e^2} \boxed{a = \frac{e^2 - 3}{4}}$$

b) Entre las rectas $x = 2$ y $x = 3$ la función $f(x) = e^x = 0 \implies \nexists$ Sol., lo que define un único recinto de integración $A_1 : (2, 3)$

$$A_1 = \int_2^3 f(x)\, dx = \int_2^3 e^x\, dx = e^x \Big]_2^3 = e^3 - e^2$$
$$Area = |A_1| = e^3 - e^2 \simeq 12.696\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27.4 % de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65.1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76.3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) (1 punto) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

b) (1 punto) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ “La mujer practica actividad física al menos 150 minutos semanales”
$F \equiv$ “La mujer consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día”

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.274 \quad \& \quad P(F) = 0.651 \quad \& \quad P(A \cup F) = 0.763$$

a) $P(A \cap F) = P(A) + P(F) - P(A \cup F) = 0.274 + 0.651 - 0.763 = 0.162$

b) $P(\overline{A} \mid \overline{F}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(\overline{A \cup F})}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - P(A \cup F)}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - 0.763}{1 - 0.651} = 0.679$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0.55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del $99.01\,\%$, el margen de error en la estimación no supere el $10\,\%$.

b) (1 punto) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $n =?\quad \&\quad p = 0.55 \Rightarrow q = 0.45\quad \&\quad E < 0.1\quad \&\quad 1-\alpha = 0.9901$

$1-\alpha = 0.9901 \Rightarrow \alpha = 0.0099 \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.00495 \Rightarrow 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.99505 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = 2.575\cdot\sqrt{\frac{0.55\cdot 0.45}{n}} < 0.1 \implies n \geq \left(\frac{2.575}{0.1}\right)^2 \cdot 0.55\cdot 0.45 = 164.1$$

$$\implies \boxed{n = 165}$$

b) $n = 100\quad \&\quad \hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0.7\quad \&\quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0.3\quad \&\quad 1-\alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{100}} = 0.0898$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.6102; 0.7898)}$$

Julio 2023 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - 7a + 6 = a \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-3, 1, 2\}$$

- Si $a \neq \{-3, 1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim [F_1 \leftrightarrow F_3] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{2}{3} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y + 2 \cdot \frac{1}{6} = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/6 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo de entrenamiento de fuerza (min) "
  $y \equiv$ "Tiempo de entrenamiento de cardio (min)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

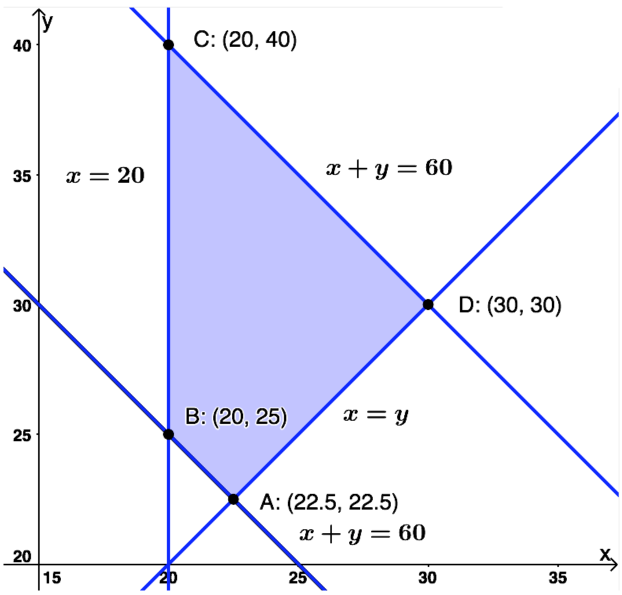
$$\begin{cases} ① \; x+y \geq 45 & \to (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ ② \; x+y \leq 60 & \to (0,60) \quad \& \quad (60,0) \\ ③ \; x \leq y & \to (0,0) \quad \& \quad (60,60) \\ ④ \; x \geq 20 & \to (20,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	22.5	22.5	67.5
B	20	25	70
C	20	40	100
D	30	30	90



La rutina *más beneficiosa* se obtiene con 20 minutos de fuerza y 40 de cardio , con una puntuación de 100, mientras que la *menos beneficiosa* se obtiene con 22.5 minutos de fuerza y otros tantos de cardio y da una puntuación de 67.5.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

a) (1 punto) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

$$f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2+2}{x}$$

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = 0$

  $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$

- `A. Oblicua:` $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.O}$ en $y = x$

  $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

  $$n = \lim_{x\to\pm\infty} \Big[f(x) - mx\Big] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\cancel{x} + \frac{2}{x} - \cancel{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2+2)}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2} = 0 \implies x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$

	$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, +\sqrt{2}\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $x = \sqrt{2}$ y un *máximo relativo* en $x = -\sqrt{2}$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

La Agencia Estatal de investigación Española convoca regularmente el Progrma Ramón y Cajal *para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria* 2021 *se presentaron* 2159 *solicitudes en la modalidad general y* 1316 *en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el* 16.1 %*, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del* 21.1 %*. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

b) (1 punto) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

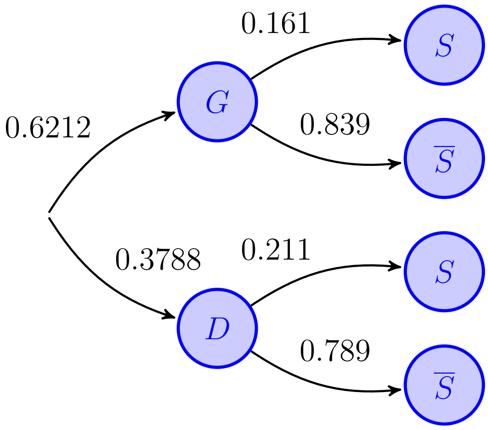
Solución.

Sean los sucesos:

$$G \equiv \text{“El solicitante es de modalidad general”}$$
$$D \equiv \text{“El solicitante es jóven doctor”}$$
$$S \equiv \text{“El solicitante es seleccionado”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(G) = \frac{2159}{2159 + 1316} = 0.6212 \quad \& \quad P(S \mid G) = 0.161 \quad \& \quad P(S \mid D) = 0.211$$



a) $P(S) = P\big((G \cap S) \cup (D \cap S)\big)$
$= P(G \cap S) + P(D \cap S)$
$= P(G) \cdot P(S \mid G) + P(D) \cdot P(S \mid D)$
$= 0.6212 \cdot 0.161 + 0.3788 \cdot 0.211 = 0.1799$

b) $$P(G \mid S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{P(G) \cdot P(S \mid G)}{P(S)} = \frac{0.6212 \cdot 0.161}{0.1799} = 0.5559$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrida por un autobús (km)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 50 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.005 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (48.85; 51.15)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10.82 \implies \boxed{n = 11}$$

Julio 2023 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine la matriz X tal que, $A \cdot X = B$.*

b) *(1 punto) Calcule $B \cdot B^{\top} \cdot A^{-1}$, donde $B^{\top}$ denota la matriz transpuesta de B y A^{-1} la matriz inversa de A.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$|A| = 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) $$B \cdot B^{\top} \cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Largo de la piscina (m)"
  $y \equiv$ "Ancho de la piscina (m)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

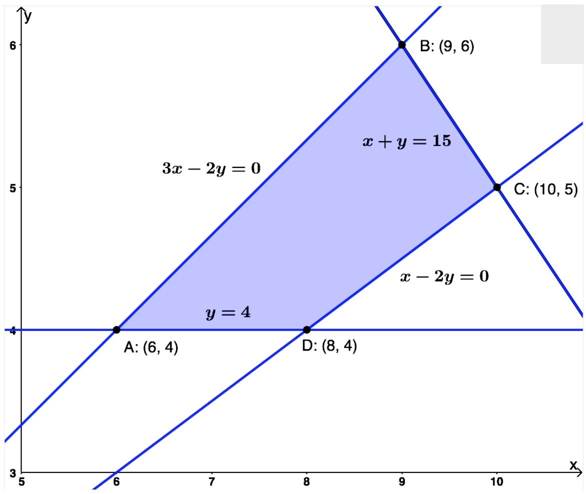
$$\begin{cases} ① \; x \leq 2y \\ ② \; 3y \leq 2x \\ ③ \; 2x + 2y \leq 30 \\ ④ \; y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x - 2y \leq 0 & \to (0,0) \quad \& \quad (6,3) \\ ② \; 3y - 2x \leq 0 & \to (0,) \quad \& \quad (3,2) \\ ③ \; x + y \leq 15 & \to (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ④ \; y \geq 4 & \to (0,5) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = x$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	4	6
B	9	6	9
C	10	5	10
D	8	4	8



La *piscina más larga* que cumple las restricciones pedidas medirá 10 m de largo por 5 de ancho.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \cdot e^{x-3} & , \text{ si } x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 3$.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, determine los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) `Continuidad en` $x = 3$:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} ax^2 \cdot e^{x-3} = 9a$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+2) \cdot \cancel{(x-3)}}{x \cdot \cancel{(x-3)}} = \dfrac{5}{3}$
- $f(3) = 9a$

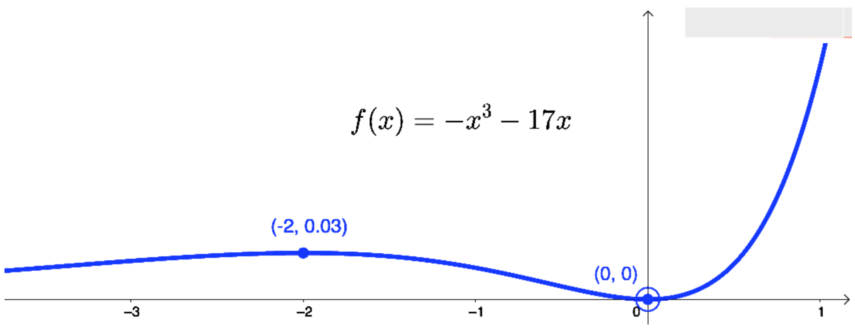
$f(x)$ es continua en $x = 3 \iff \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \implies 9a = \dfrac{5}{3} \implies \boxed{a = \dfrac{5}{27}}$

b) Para $a = 1$, cuando $x \in (-\infty, 1)$ la función es $f(x) = x^2 \cdot e^{x-3}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{x-3} + x^2 \cdot e^{x-3} = (x^2 + 2x) \cdot e^{x-3} = 0 \implies \begin{cases} e^{x-3} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \\ x^2 + 2x = 0 \implies x = \{-2, 0\} \end{cases}$

$f''(x) = (2x+2) \cdot e^{x-3} + (x^2 + 2x) \cdot e^{x-3} = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^{x-3}$

$$\implies \begin{cases} f''(-2) = -\dfrac{2}{e^5} < 0 \xrightarrow{(\cap)} \text{Máximo relativo en } x = -2 \in (-\infty, 1) \\ f''(0) = \dfrac{2}{e^3} > 0 \xrightarrow{(\cup)} \text{Mínimo relativo en } x = 0 \in (-\infty, 1) \end{cases}$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean dos sucesos A y B tales que

$$P(A) = 0.57 \quad \& \quad P(B) = 0.46 \quad \& \quad P(A \cap B) = 0.28$$

Calcula las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) $P(A \cup B)$.

b) (1 punto) $P(B \mid \overline{A})$ siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.57 + 0.46 - 0.28 \implies \boxed{P(A \cup B) = 0.75}$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0.46 - 0.28}{1 - 0.57} \Rightarrow \boxed{P(B \mid \overline{A}) = 0.4186}$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La longitud en metros de un coche se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0.2$ metros.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 4 centímetros con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 4$ metros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ coches, la longitud media, $\overline{X}$, sea mayor de 4.04 metros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud de un coche (m)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.2)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.04 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{0.2}{\sqrt{n}} < 0.04 \implies n > \left(1.96 \cdot \dfrac{0.2}{0.04}\right)^2 = 96.04 \implies \boxed{n = 97}$

b) $X : \mathcal{N}(4, 0.2) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(4, \dfrac{0.2}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}(4, 0.033)$

$P(\overline{X} \geq 4.04) = P\left(Z \geq \dfrac{4 - 0.04}{0.033}\right) = P(Z \geq 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2)$

$= 1 - 0.8849 = 0.1151$

———————— ∘ ————————

Julio 2023 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ax + y + 2z = 2 \\ x - az = 0 \\ 3x - y - z = 2a \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \implies a = \{-1, -1/2\}$$

- Si $a \neq \{-1, -1/2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\text{o} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\text{o} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = -1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 5F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 4 \cdot \frac{2}{3} = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 12z = 8 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -2/3 \\ z = 2/3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la siguiente función real de variable real dependiente de un parámetro real a:

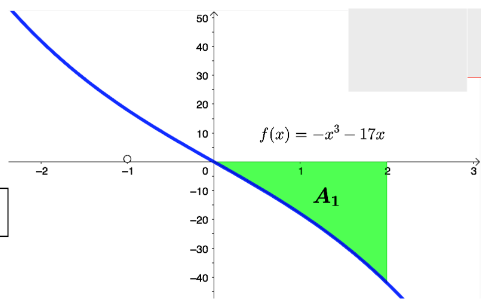
$$f(x) = -x^3 + 4ax^2 - 17x + 5a$$

a) *(1 punto) Calcule el valor de a para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea la misma que la pendiente de la recta $g(x) = \sqrt{3} - 4x$.*

b) *(1 punto) Para $a = 0$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.



a) $f'(x) = -3x^2 + 8ax - 17$

$g'(x) = -4$

$m_r = f'(1) = g'(1) \Rightarrow -20 + 8a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

b) Para $a = 0$ $\quad f(x) = -x^3 - 17x = 0 \implies x = \left\{-\sqrt{17}, 0, \sqrt{17}\right\}$, que entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ define un único recinto de integración $A_1 : (0, 2)$

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-x^3 - 17x\right) dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{17x^2}{2}\Bigg]_0^2 = (-4 - 34) - 0 = -38$$

$Area = |A_1| = |-38| = 38\ u^2$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$$

a) *(1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.*

b) *(1 punto) Determine las asítotas de la función.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{(2x+4)\cdot x - (x^2+4x+3)}{x^2} = \dfrac{x^2-3}{x^2} = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}$

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.

b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- A. Vertical: $\exists\, A.V.$ en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4x+3}{x} = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- A. Horizontal: $\nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+3}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty$$

- A. Oblicua: $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.O.}$ en $y = x + 4$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+3}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+4x+3}{x} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}+4x+3-\cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+3}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{4}{1} = 4$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

*Un restaurante de comida rápida sirve el 40 % de los menús para consumir en el local, el 35 % es transportado por motoristas a domicilio (*delivery*) y el resto de menús son recogidos por los clientes en el local (*take-ayay*). El restaurante tiene un menú vegetariano que es consumido por el 8 % de los clientes en el local, el 5 % de los pedidos a domicilio y el 12 % de los recogidos en el local por los propios clientes. Eligiendo un menú al azar, calcule la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Sea vegetariano.

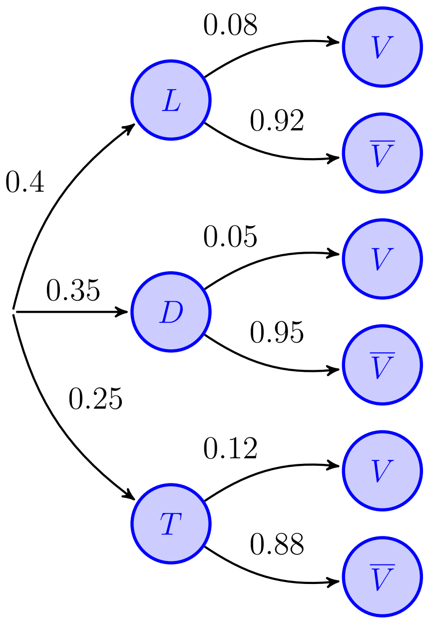
b) (1 punto) Haya sido llevado a domicilio por un motorista, sabiendo que .es vegetariano

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$L \equiv$ "La comida se consume en el local"
$D \equiv$ "La comida se reparte a domicilio (*delivery*)"
$T \equiv$ "La comida es para llevar (*take away*)"
V"El menú es vegetariano"



a) $P(V) = P\Big((L \cap V) \cup (D \cap V) \cup (T \cap V)\Big)$
$= P(L \cap V) + P(D \cap V) + P(T \cap V)$
$= P(L) \cdot P(V \mid L) + P(D) \cdot P(V \mid D)$
$+ P(T) \cdot P(V \mid T) = 0.4 \cdot 0.08$
$+ 0.35 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.12 = 0.0795$

b) $P(D \mid V) = \dfrac{P(D \cap V)}{P(V)} = \dfrac{P(D) \cdot P(V \mid D)}{P(V)}$
$= \dfrac{0.35 \cdot 0.05}{0.0795} = 0.22$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La vida media de una persona medida en semanas se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 300$ semanas.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas ya fallecidas, obteniéndose una media muestral de 4020 semanas. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud del intervalo anterior no sobrepase las 100 semanas?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Vida media de una persona (semanas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 300)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 4020 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \dfrac{300}{\sqrt{20}} = 172.73$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (3847.27; 4192.73)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 100 \implies E \leq 50 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \dfrac{300}{\sqrt{n}} \leq 50 \implies n \geq \left(2.575 \cdot \dfrac{300}{50}\right)^2 = 238.7 \implies \boxed{n = 239}$