MATEMATICAS II

EC. MATRICIALES MATRIZ INVERSA

https://aprendeconmigomelon.com

14 de octubre de 2023

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Ecuaciones Matriciales y Matriz Inversa entresacados de los exámenes de la EVAU de todas las Comunidades. Solo he incluido los apartados del ejercicios relativos a estos temas. En total 40 ejercicios que espero que te sean de utilidad.

Índice general

Ejercicios de EVAU

Andalucia

Ejercicio 1

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula m para que AB no tenga inversa.

(Andalucía - Matemáticas II - Junio 2021 - Bloque B - Suplente)

Solución.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1+m & 2m \end{pmatrix}$

$$|AB| = 2m + 1 + m = 3m + 1 = 0 \implies m = -1/3 \implies \nexists\ (AB)^{-1} \text{ si } m = -1/3$$

Ejercicio 2

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X *que verifica* $A^4 \cdot X + B = A \cdot C$

(Andalucía - Matemáticas II - Julio 2021 - Bloque B - Titular)

Solución.

a) $A^2 = -A^{-1} \iff A \cdot A^2 = -\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \iff A^3 = -I$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

b) $A^4 \cdot X + B = A \cdot C \xRightarrow{A^3=-I} -A \cdot X + B = A \cdot C \implies -A \cdot X = A \cdot C - B$

$$\implies -\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot C - B) \implies -X = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot C - A^{-1} \cdot B$$

$$\xRightarrow{A^{-1}=-A^2} -X = C + A^2 \cdot B \implies X = -C - A^2 \cdot B$$

$$X = -C - A^2 \cdot B = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 19 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de m existe la inversa de la matriz A? Razona la respuesta.

b) Para $m = 1$, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$

(Andalucía - Matemáticas II - Julio 2021 - Bloque B - Suplente)

Solución.

a) $$|A| = \begin{vmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & m+1 & m \\ 1 & m & m+2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix}$$

$$= m \cdot \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2m \neq 0 \implies m = 0 \implies \exists A^{-1}\ \forall x \neq 0$$

b) $$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot A^{-1} = 2 \cdot A^{-1}, \text{ y para } m = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot 1 = 2 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2 \cdot A^{-1} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, *donde* $m \geq 0$.

a) *¿Para qué valores de* m *tiene inversa la matriz* A*?*

b) *Para* $m = 4$ *resuelve, si es posible, la ecuación matricial* $AX = 12I$*, donde* I *es la matriz identidad de orden 3.*

(Andalucía - Matemáticas II - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) $|A| = m^3 - 2m^2 + m = m \cdot (m-1)^2 = 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall m \neq \{0, 1\}$

b) Para $m = 4 \implies A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ & $|A| = 4 \cdot (4-1)^2 = 36$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$AX = 12I \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = 12A^{-1}I \implies X = 12A^{-1} = 12 \cdot \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^{-1}.

b) Calcula la matriz X *de orden tres que verifica*

$$A \cdot X + (A - X)^2 = X^2 + I$$

, siendo I *la matriz identidad de orden tres.*

(Andalucía - Matemáticas II - Junio 2022 - Bloque B - Reserva)

Solución.

a) $|A| = 2 \quad \& \quad \mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}A^{\top} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot X + (A - X)^2 = X^2 + I \implies \cancel{A \cdot X} + A^2 - \cancel{A \cdot X} - X \cdot A + \cancel{X^2} = \cancel{X^2} + I$

$\implies X \cdot A = A^2 - I \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (A^2 - I) \cdot A^{-1} \implies X = A \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} - A^{-1}$

$$\implies \boxed{X = A - A^{-1}}$$

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Dado $a \neq 0$, considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores de a se cumple que $A^{-1} = \dfrac{1}{4}A$.

b) Para $a = 1$ calcula, si es posible, la matriz X tal que $A \cdot X = B^{\top}$, donde $B^{\top}$ denota la matriz traspuesta de B.

(Andalucía - Matemáticas II - Junio 2022 - Bloque B - Suplente)

Solución.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{-4a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix} \xRightarrow{A^{-1}=\frac{1}{4}A} \begin{pmatrix} -1/4a & 3/4a \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a/4 & 3/4 \\ a/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4a} = -\frac{a}{4} \implies 4 = 4a \implies \boxed{a = 1} \\ \frac{3}{4a} = \frac{3}{4} \implies 12 = 12a \implies a = 1 \checkmark \\ \frac{1}{4} = \frac{a}{4} \implies 4 = 4a \implies a = 1 \checkmark \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \checkmark \end{cases}$$

b) $A \cdot X = B^{\top} \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B^{\top} \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B^{\top}}$

$$X = A^{-1} \cdot B^{\top} \xRightarrow{a=1} X = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 & -5 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 9/4 & 5/4 \\ 0 & 7/4 & 3/4 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 7

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\quad \& \quad B=\begin{pmatrix}1&1&a\\2&a&1\\2&2&0\end{pmatrix}\quad \& \quad C=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}.$$

a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

b) Para $a=1$ calcula X tal que $AXB=C$, si es posible.

(Andalucía - Matemáticas II - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) $|B|=-2a^2+4a=-2a\cdot(a-2)=0 \implies a=\{0,2\} \implies \nexists B^{-1} \iff a=\{0,2\}$

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ y para $a=1$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\2&2&0\end{pmatrix}\quad \& \quad |B|=-2\cdot(1-2)=2$

$$\operatorname{Adj} B=\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&-2&0\\0&1&-1\end{pmatrix} \implies B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot \operatorname{Adj} B^{\top}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&-2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

$$AXB=C \implies \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X\cdot \underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \implies \boxed{X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&-2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-2\\4&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&-2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6&2&2\\-20&10&4\end{pmatrix}$$

$$\implies X=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-10&5&2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Para $m = 0$ resuelve la ecuación $A \cdot X = B$, si es posible.

(Andalucía - Matemáticas II - Julio 2022 - Bloque B - Reserva)

Solución.

b) Para $m = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ & $|A| = 0^2 - 1 = -1$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Cataluña

Ejercicio 9

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*, resuelva la ecuación matricial* $A^2X = A - 3I$*, donde* I *es la matriz identidad.*

b) Una matriz cuadrada M *satisface que* $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$*, donde* I *es la matriz identidad. Justifique que* M *es invertible y exprese la inversa de* M *en función de las matrices* M *e* I*.*

(Cataluña - Matemáticas II - Junio 2021 - Serie 2)

Solución.

a) $A^2X = A{-}3I \implies \underbrace{\left(A^2\right)^{-1} \cdot A^2}_{I} X = (A^2)^{-1}{\cdot}(A{-}3I) \implies \boxed{X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot (A - 3I)}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies |A^2| = 1$$

$$\text{Adj}(A^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies (A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|}{\cdot}\text{Adj}(A^2)^{\top} \implies (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2)^{-1}{\cdot}(A{-}3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \implies M^3 - 3M^2 + 3M = I \implies M \cdot \underbrace{(M^2 - 3M + 3I)}_{M^{-1}} = I$

$$\exists\, M^{-1} \iff M \cdot M^{-1} = I \implies \boxed{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I}$$

Ejercicio 10

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&4\end{pmatrix}$ & $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ & $C=\begin{pmatrix}5&1\\0&7\end{pmatrix}$.

a) *Razone que la matriz B es invertible y después calcule B^{-1}.*

b) *Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A+B\cdot X=C\cdot A$.*

(Cataluña - Matemáticas II - Junio 2021 - Serie 5)

Solución.

a) $|B|=-1 \implies \exists\, B^{-1} \implies B^{-1}=\dfrac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix} \implies B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

b) $A+B\cdot X=C\cdot A \implies B\cdot X=C\cdot A-A \implies B\cdot X=(C-I)\cdot A$

$$\implies \underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I}\cdot X=B^{-1}\cdot(C-I)\cdot A \implies \boxed{X=B^{-1}\cdot(C-I)\cdot A}$$

$$X=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}}_{B^{-1}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}4&1\\0&6\end{pmatrix}}_{C-I}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\-3&4\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}0&6\\4&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18&24\\23&-16\end{pmatrix}$$

Ejercicio 11

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, *en la que a es un parámetro real.*

a) Encuentre para qué valores de a la matriz A es invertible.

b) Compruebe que, para el caso $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial $AX = B - 3I$, donde B es la matriz
$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(Cataluña - Matemáticas II - Septiembre 2021 - Serie 1)

Solución.

a) $$|A| = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = \left[\; F_2 = F_2 - F_1 \; \right] = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (a-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = a \cdot (a-1) \cdot (-a-3+2a+1)$$

$$= a \cdot (a-1) \cdot (a-2) = 0 \implies a = \{0, 1, 2\} \implies \exists \, A^{-1} \; \forall a \neq \{0, 1, 2\}$$

b) $a = 3 \neq \{0, 1, 2\} \implies \exists \, A^{-1}$

$$AX = B - 3I \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot (B - 3I)}$$

Para $a = 3 \implies A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = 6$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -24 & 26 & -28 \\ 18 & -18 & 21 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}A^{\top} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, *que depende de los parámetros* a, b *y* c.

b) Determine los valores de a, b *y* c *para que la matriz inversa de* X *sea*

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Cataluña - Matemáticas II - Junio 2022 - Serie 2)

Solución.

b) $|X| = abc \quad \& \quad \mathrm{Adj}(X) = \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ -c & ac & 0 \\ 1 & -a & ab \end{pmatrix} \quad \& \quad X^{-1} = \dfrac{1}{abc} \cdot \begin{pmatrix} bc & -c & 1 \\ 0 & ac & -a \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -1/ab & 1/abc \\ 0 & 1/b & -1/bc \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{a = 2} \\ \frac{1}{b} = 1 \Longrightarrow \boxed{b = 1} \\ \frac{1}{c} = -1 \Longrightarrow \boxed{c = -1} \\ -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{2} \checkmark \\ \frac{1}{abc} = -\frac{1}{2} \checkmark \\ \frac{1}{bc} = 1 \checkmark \end{cases}$$

Ejercicio 13

> *Sean las matrices* $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ & $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
>
> *a) Compruebe que $C^3 = I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz C es invertible y que $C^{-1} = C^2$. Calcule C^{2022}.*
>
> *b) Resuelva la ecuación matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.*
>
> *(Cataluña - Matemáticas II - Junio 2022 - Serie 5)*

Solución.

a) $C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$\exists\ C^{-1} \iff C \cdot C^{-1} = I_2$, pues bien, como $C^3 = C \cdot C^2 = I_2 \implies C^{-1} = C^2$

$C^{2022} = C^{3\cdot 674} = \left(C^3\right)^{674} = \left(I_2\right)^{674} = I_2$

b) $C \cdot X = A - 2I_2 \implies \underbrace{C^{-1} \cdot C}_{I} \cdot X = C^{-1} \cdot (A - 2I_2) \implies \boxed{X = C^{-1} \cdot (A - 2I_2)}$

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$X = C^{-1} \cdot (A - 2I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 14

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$*, que depende del parámetro* a*.*

b) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$*, resuelva la siguiente ecuación matricial:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Cataluña - Matemáticas II - Septiembre 2022 - Serie 3)

Solución.

b) Para resolver la ecuación matricial $B \cdot X = O$ hay que tener en cuenta que, como $|B| = 0 \implies \text{ran}(B) < 3$, y como el sistema es homogeneo, será S.C.I. Vamos a resolverlo por el método de Gauss, teniendo en cuenta que como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, solo es necesario resolver las dos primeras ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 4F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot (-2\lambda) + 3\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 6\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = \lambda \\ y = -2\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 15

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$*, en la que* a *es un parámetro real.*

a) Calcule los valores del parámetro a *para los cuales la matriz* A *es invertible.*

b) Para el caso $a = 3$*, resuelva la ecuación* $A \cdot X = B - 3I$*, en la que* $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(Cataluña - Matemáticas II - Septiembre 2022 - Serie 3)

Solución.

a) $$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = [C_2 = C_2 - C_1] = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & a-1 \\ 2a+1 & -2a-1 & -a-3 \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} a-1 & a-1 \\ -2a-1 & -a-3 \end{vmatrix} = a \cdot (a-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2a-1 & -a-3 \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (a-1) \cdot \Big[-a-3-(-2a-1) \Big] = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) = 0 \implies a = \{0, 1, 2\}$$

Por lo tanto $\exists\ A^{-1}\ \forall a \neq \{0, 1, 2\}$.

b) $$A \cdot X = B - 3I \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot [B - 3I] \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot [B - 3I]}$$

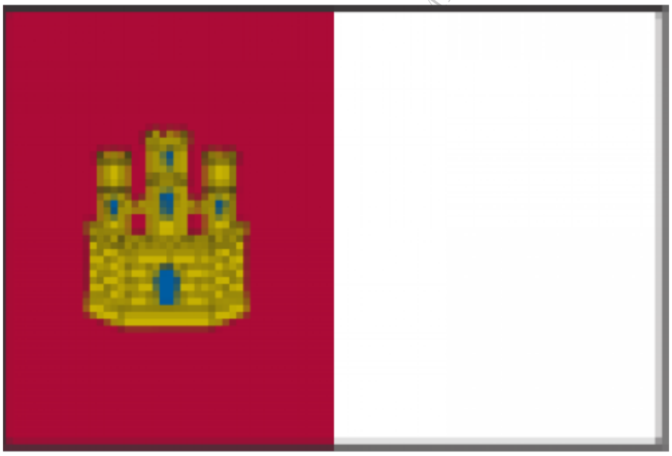
$$\text{Si } a = 3 \implies A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = 6$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -24 & 26 & -28 \\ 18 & -18 & 21 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^{\top} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$X = A^{-1} \cdot [B - 3I] = A^{-1} \cdot I = A^{-1} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 13/3 & -3 & -1 \\ -14/3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Castilla-La Mancha



Ejercicio 16

> *a) Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices*
>
> $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
>
> *(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Julio 2022)*

Solución.

a) $A \cdot X + B = X \implies B = X - A \cdot X \implies B = (I - A) \cdot X$

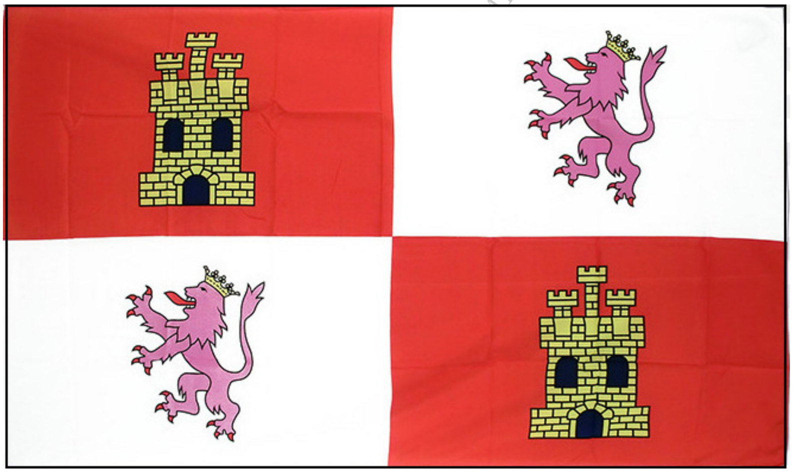
$$\implies (I-A)^{-1} \cdot B = \underbrace{(I-A)^{-1} \cdot (I-A)}_{I} \cdot X \xrightarrow[es\ invertible]{Si\ I-A} \boxed{X = (I-A)^{-1} \cdot B}$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|I - A| = 2 \qquad \& \qquad (I-A)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (I-A)^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Castilla y León



Ejercicio 17

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calcule el valor de* a *que hace que:*

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Castilla y León - Matemáticas II - Junio 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a \xrightarrow{\exists A^{-1} \iff a \neq 0} A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a^2 & a^2+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a^2 = 1/a \implies a^3 = 1 \implies a = \sqrt[3]{1} = 1 \\ a^2 + a = 2 \implies a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\} \end{array}\right\} \implies \boxed{a = 1} \\ 0 = 0 \checkmark \\ 1 = 1 \checkmark \end{cases}$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 18

a) Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $Z^2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot Z^{-1} = Z^2 \cdot 3I \cdot Z^{-1} = 3 \cdot Z \cdot \underbrace{Z \cdot Z^{-1}}_{I} = 3 \cdot Z = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow Z = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B \cdot \left(A^\top + 3I\right)$*, donde* $A^\top$ *denota la matriz traspuesta de* A*.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \quad \& \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^\top \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AX + 3B = B \cdot \left(A^\top + 3I\right) \implies AX = BA^\top + 3B - 3B$$

$$AX = BA^\top \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}BA^\top \implies \boxed{X = A^{-1}BA^\top}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 13 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20

a) *Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot (CD)^{-1} = A + X \cdot (D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.*

b) *Para* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *determine la matriz Y tal que $YB = A$.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a)

$$X \cdot \underbrace{(CD)^{-1}}_{D^{-1}C^{-1}} = A + X \cdot \left(D^{-1}C^{-1} - B\right)$$

$$\cancel{XD^{-1}C^{-1}} = A + \cancel{XD^{-1}C^{-1}} - XB$$

$$A - XB = 0 \implies A = XB$$

$$AB^{-1} = X \underbrace{BB^{-1}}_{I} \implies \boxed{X = AB^{-1}}$$

b) $YB = A \implies Y \underbrace{BB^{-1}}_{I} = AB^{-1} \implies Y = AB^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies |B| = 2 \quad \& \quad \mathrm{Adj}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \mathrm{Adj}B^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Y \overset{\circledast}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$\circledast$ Nota: Cuando necesitamos operar con la matriz inversa es mucho mejor hacerlo antes de multiplicar todos los elementos de la matriz por $1/2$.

Ejercicio 21

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

b) Para $a = 2$, *resolver la ecuación matricial* $AXA^{-1} = B$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

b) $AXA^{-1} = B \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} X \underbrace{A^{-1}A}_{I} = A^{-1}BA \implies X = A^{-1}BA$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -2 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} \implies A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22

Dadas las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) El determinante de P es $|P| = 4 + 8 + 9 - (4 + 12 + 6) = -1$.
Hallamos P^{-1} por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\text{Adj } P^{\top} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $P^{-1} \cdot P = I = P \cdot P^{-1}$

b) Sea la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$, entonces:

$$B^{-1} = \left(J^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(P^{-1}\right)^{-1} = JP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) *Calcular su inversa.*

b) *Calcular la matriz* B *para que* $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sea solución del sistema* $A^2X = B$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Vamos hallar la matriz inversa de A por el método de los adjuntos. Para ello calculamos su determinante: $|A| = 0 + 12 - 6 - (0 + 8 + 0) = -2$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -3 \\ -14 & -8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -14 & 3 \\ 4 & -8 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

P.D.: Para comprobar si la hemos calculado bien deberíamos ver si $A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$, teniendo en cuenta que va a resultarte más fácil que dejes el $-\frac{1}{2}$ fuera de la matriz y que con uno de los productos nos basta como comprobación.

Hallamos la matriz B:

$$B = A^2X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -6 & 19 \\ 12 & -8 & 26 \\ 29 & -20 & 63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -22 \\ -53 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 24

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y la matriz identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

c) Calcular la matriz inversa de A^6*, en caso de que exista.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \left(A^3\right)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(A^6\right)^{-1} \overset{\odot}{=} \begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\odot$ Dada una matriz diagonal $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$

Ejercicio 25

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$*, se considera la matriz* B *formada por las tres últimas columnas de* A *y se pide:*

a) Estudiar para qué valores del parámetro real a *la matriz* B *es invertible.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & a \\ 0 & 5 & 2a \\ 2 & -4 & 2a \end{pmatrix} \Longrightarrow |B| = 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

Ejercicio 26

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *y* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) Obtener los valores de m *para los que la matriz* $A - mI$ *admite inversa.*

b) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$A - mI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix}$$

$$|A - mI| = -m \cdot (3-m)^2 \neq 0 \implies m \neq \{0, 3\}$$

por tanto $\exists\ (A - mI)^{-1}$ si $m \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Para $m = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A - 2I| = -2 \cdot (3-2)^2 = -2$

Hallamos la matriz inversa de $A - 2I$ por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj}\ (A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} \text{Adj}\ (A - 2I)^{\top} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $(A - 2I)^{-1} \cdot (A - 2I) = I$

Ejercicio 27

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) Obtener los valores del parámetro m *para los que la matriz* A *admite inversa.*

b) Para $m = 0$*, calcular* $A \cdot B$ *y* $A^{-1} \cdot B$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 4m - 4 \neq 0 \implies m \neq -2$$

b) Para $m = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = -0^2 - 4 \cdot 0 - 4 = -4$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 28

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) Calcular $A^\top A$ *y* $AA^\top$*, donde* $A^\top$ *denota la matriz traspuesta de* A*.*

b) Hallar A^{-1} *y resolver el sistema lineal* $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Antes de empezar escribimos $A = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ para operar mejor.

a) $A^\top A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$

$AA^\top = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$

b) Dado que $A^\top A = AA^\top = I \implies A^{-1} = A^\top = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Llamamos $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y resolvemos $AX = D \implies X = A^{-1} \cdot D$

$$X = A^{-1} \cdot D = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 29

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$, *se pide:*

b) Para $\alpha = 0$*, calcular, si es posible* A^{-1}*.*

c) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$*, en el caso* $\alpha = 1$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

b) Para $\alpha = 0$, $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $|A| = -490$. Hallamos A^{-1} por adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -20 & 15 & -21 \\ 40 & -30 & -56 \\ -70 & -70 & 98 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A^{\top} = -\frac{1}{490}\begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

c) Para $\alpha = 1 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$, por lo que no se puede resolver la ecuación matricial. Resolvemos el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 37/2 \\ 5 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 14 & -14 & 35 \\ 0 & 8 & --8 & 20 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 1/7F_2 \\ 1/4F_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 10z + 14\lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y - 2\lambda = 5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 5/2 + \lambda \quad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1/5 - 7/5\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 30

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ *y* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM *para el caso* $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

b) Cuando $a = 0$ la matriz AM vale:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|AM| = -2 \implies \exists (AM)^{-1}$ que hallaremos por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } (AM) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(AM)^{-1} = \frac{1}{|AM|} \text{Adj } (AM)^\top = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 31

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) Calcular los valores de $m \in \mathbb{R}$ *para los cuales* B *no tiene inversa.*

b) Para $m = 1$, *calcular la inversa de la matriz* B.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $|B| = 4 \cdot (2 - m^2) = 0 \implies m = \pm\sqrt{2}$. Luego la matriz B carece de inversa para los valores de $m = \pm\sqrt{2}$.

b) Para $m = 1$ la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, siendo $|B| = 4 \cdot (2 - 1^2) = 4$

$$\text{Adj}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj}B^\top = \begin{pmatrix} -3/4 & 2 & -1 \\ 1/4 & -1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 32

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

b) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla cuando sea posible, en función del parámetro a.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

b) Una matriz A tiene inversa si es cuadrada y $|A| \neq 0$
$|A| = (1-a)\cdot(1+a) - 1 = -a^2 \neq 0 \implies a \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2}\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 33

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos $|A|$ de la matriz A desarrollamndo el determinante por la segunda columna.

$$|A| = -\Big[3 - (x-1)\cdot(x+1)\Big] = x^2 - 4 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1},\ \forall x \neq \{-2, 2\}$$

b) Para $x = -1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $|A| = (-1)^2 - 4 = -3$

$$\mathrm{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}\,A^{\top} = \frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 34

Dados la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ *y el vector* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*, determine el valor o valores de* a *para los que:*

b) $A = A^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

b) $A = A^{-1} \implies A^2 = A \cdot A^{-1} = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-4a & 9-2a & a^2-4a \\ a^2-4a & 2a+8 & a^2-4a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \implies \begin{cases} a^2-4a=0 & \Rightarrow a = \{0,4\} \\ 9-2a=1 & \Rightarrow a=4 \\ 2a+8=0 & \Rightarrow a=4 \\ a^2-4a+1=1 & \Rightarrow a=\{0,4\} \end{cases}$$

Por lo que el valor del parámetro a que hace que $A = A^{-1}$ es $a = 4$.

Ejercicio 35

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

c) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B$ para el valor $m = 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = -1 - m = 0 \implies m = -1 \implies \exists A^{-1}, \ \forall m \neq -1$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & -m \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{-1-m} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

Para $m = 2$ & $A^{-1} = \dfrac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 36

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) *Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.*

b) *Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.*

c) *Para $a = 2$, resolver el sistema* $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $|A| = a^2 + a = a \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-1, 0\}$. Por lo que $\nexists A^{-1}$, si $a = \{-1, 0\}$

b) Para $a = 1$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1^2 + 1 = 2$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) Para $a = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2^2 + 2 = 6$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \implies \boxed{\begin{array}{c} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 37

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix} \implies |AB| = k^2 - 3k = 0$

$\implies k = \{0, 3\}$, luego $\exists\, (AB)^{-1}\ \forall x \neq \{0, 3\}$

Si $k = 1 \implies AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |AB| = -2$

$$\implies (AB)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 38

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^\top) \cdot B$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = a \cdot (a^2 - b^2) \xRightarrow{b=a^2} \implies |A| = a \cdot (a^2 - a^4) = a^3 \cdot (1 - a^2) = 0 \implies a = \{-1, 0, 1\}$
$\implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

b) $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^\top) \cdot B = \cancel{A^{-1}B} + \underbrace{2A^{-1}A}_{2I} - \cancel{A^{-1}B} - B^\top B = 2I - B^\top B$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 39

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \textit{ Se pide:}$$

b) Calcular los valores de m para los cuales existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

b) $AC = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & -m+2 \end{pmatrix}$

$|AC| = 3m^2 + m + 10 = 0 \implies \nexists$ Solución $\implies \exists (AC)^{-1} \; \forall m \in \mathbb{R}$

Si $m = 0 \Rightarrow AC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Comunidad Valenciana

Ejercicio 40

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ & $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α *para los que la ecuación matricial* $AX = \alpha X$ *solo admite una solución.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2021)

Solución.

a) $AX = \alpha X \implies AX - \alpha X = 0 \implies (A - \alpha I) \cdot X = O$

$\implies \exists$ Sol. única $\iff |A - \alpha I| \neq 0$

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{pmatrix}$$

$|A - \alpha I| = \alpha^2 - 7\alpha + 10 \neq 0 \implies \alpha \neq \{2, 5\} \implies \exists$ Sol. única $\iff \alpha \neq \{2, 5\}$