MATEMATICAS CCSS

EC. MATRICIALES MATRIZ INVERSA

https://aprendeconmigomelon.com

12 de octubre de 2023

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Matriz Inversa y Ecuaciones matriciales. En total 75 ejercicios entresacados de los exámenes de la EVAU de todas las Comunidades. Espero que te sea de utilidad.

Índice general

Ejercicios de EVAU

Andalucia

Ejercicio 1

Se consideran las matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$$

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases}$$

b) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz C?

c) Para $m = 1$, calcule la matriz inversa de C.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque A)

Solución.

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{array}{rcl} 3X + 2Y = A & \longrightarrow & 3X + \cancel{2Y} = A \\ -4X + Y = B & \xrightarrow{\times(-2)} & 8X - \cancel{2Y} = -2B \\ \hline & & 11X \quad = A - 2B \Longrightarrow \boxed{X = \dfrac{A - 2B}{11}} \\ & & 3 \cdot \dfrac{A - 2B}{11} + 2Y = A \quad \Longrightarrow \boxed{Y = \dfrac{4A + 3B}{11}} \end{array}$$

$$X = \frac{1}{11} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 11 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{11} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 44 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $|C| = 12 - 6m \neq 0 \implies m \neq 2 \implies \exists A^{-1} \ \forall m \neq 2$

c) Para $m = 1 \implies C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad |C| = 12 - 6 \cdot 1 = 6$

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *con* m *un parámetro real.*

a) ¿Para qué valores del parámetro m *existe la matriz inversa de* A*?*

b) Para $m = 2$*, resuelva la ecuación matricial* $X \cdot A - A^2 = I_3$

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A)

Solución.

a) $|A| = -2m^2 + 3m + 5 = 0 \implies x = \{-1, 5/2\}$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 5/2\}$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$X \cdot A - A^2 = I_3 \implies X \cdot A = I_3 + A^2 \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \left(I_3 + A^2\right) \cdot A^{-1}$$

$$\implies X = I_3 \cdot A^{-1} + A^2 \cdot A^{-1} = A^{-1} + A \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \implies X = A^{-1} + A$$

Para $m = 2$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = -2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 3$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

Se considera la ecuación matricial $(10I_3 - A)\cdot X = B$*, donde* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *y* B *es una matriz con tres filas y una columna.*

b) ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B *de orden* 3×1*? ¿Por qué?*

c) Resuelva dicha ecuación matricial si $B = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -3 \end{pmatrix}^\top$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Reserva)

Solución.

b) $(10I_3 - A)\cdot X = B \implies \underbrace{(10I_3 - A)^{-1}\cdot(10I_3 - A)}_{I}\cdot X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B$

$\implies X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B \implies \exists(10I_3 - A)^{-1} \iff |10I_3 - A| \neq 0$

Tal y como se ve en el siguiente apartado $|10I_3 - A| = 300 \neq 0$, por lo que la ecuación matricial tendrá solución para cualquier matriz $B_{3\times 1}$

c) $10I_3 - A = 10\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |10I_3 - A| = 300$

$\mathrm{Adj}(10I_3 - A) = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 24 \\ 5 & 40 & 18 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \implies (10I_3 - A)^{-1} = \dfrac{1}{300}\cdot\begin{pmatrix} 40 & 5 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 24 & 18 & 60 \end{pmatrix}$

$X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B = \dfrac{1}{300}\cdot\begin{pmatrix} 40 & 5 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 24 & 18 & 60 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{300}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) *Calcule* $\left(A^{-1} + A\right)^2$.

c) *Resuelva la ecuación matricial* $\left(A^{\top} + I_2\right) \cdot X = A^{\top} - I_2$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Suplente)

Solución.

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A^{-1} + A\right)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$$

c) $\left(A^{\top} + I_2\right) \cdot X = A^{\top} - I_2 \implies \underbrace{\left(A^{\top} + I_2\right)^{-1} \cdot \left(A^{\top} + I_2\right)}_{I} \cdot X = \left(A^{\top} + I_2\right)^{-1} \cdot \left(A^{\top} - I_2\right)$

$$\implies X = \left(A^{\top} + I_2\right)^{-1} \cdot \left(A^{\top} - I_2\right)$$

$$A^{\top} + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \left(A^{\top} + I_2\right)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{\top} - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(A^{\top} + I_2\right)^{-1} \cdot \left(A^{\top} - I_2\right) = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

a) Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^\top$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque A - Extraordinario)

Solución.

a) $|A| = -a - 8 \neq 0 \implies a \neq -8 \implies \exists A^{-1} \; \forall a \neq -8$

b) $a = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -9 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^\top = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^4/_9 & {}^1/_9 & -/_9 \\ {}^1/_9 & -{}^2/_9 & {}^4/_9 \\ -{}^2/_9 & {}^4/_9 & {}^1/_9 \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot X = B^\top \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B^\top \implies X = A^{-1} \cdot B^\top$

$$\implies X = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1/_3 \\ -{}^2/_3 \\ {}^1/_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Se sonsideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Razone si existe la inversa de la matriz B.

c) Razone si la ecuación matricial $B \cdot X = C$ tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque A - Reserva)

Solución.

b) $|B| = -1 \neq 0 \implies \exists\, B^{-1}$

c) $B \cdot X = C \implies \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} \cdot X = B^{-1} \cdot C \implies X = B^{-1} \cdot C \implies \exists \text{Sol. pues } \exists\, B^{-1}$

$$\text{Adj}\, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa.

b) Para $a = 3$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - X \cdot B = C$

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) $|A| = 8a - 24 = 0 \implies a = 3 \implies \nexists A^{-1} \iff a = 3$

b) Para $a = 3 \implies A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$X \cdot A - X \cdot B = C \implies X \cdot (A - B) = C$$

$$\implies X \cdot \underbrace{(A - B) \cdot (A - B)^{-1}}_{I} = C \cdot (A - B)^{-1} \implies \boxed{X = C \cdot (A - B)^{-1}}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A - B| = -1$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = C \cdot (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ *donde a es un número real.*

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^\top \cdot C$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

a) $|A| = a^2 - 4a + 3 = 0 \implies a = \{1, 3\}$. Por lo que $\exists A^{-1},\ \forall a \neq \{1, 3\}$

b) Para $a = 2$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^\top = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

c) $X \cdot A + I_3 = B^\top \cdot C \implies X \cdot A = B^\top \cdot C - I_3 \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_3} = \left(B^\top \cdot C - I_3\right) \cdot A^{-1}$

$$\implies X = \left(B^\top \cdot C - I_3\right) \cdot A^{-1}$$

$$B^\top \cdot C - I_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\left(B^\top \cdot C - I_3\right)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B \cdot X + C$

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Reserva)

Solución.

b) $A \cdot X = B \cdot X + C \implies A \cdot X - B \cdot X = C \implies (A-B) \cdot X = C$

$$\implies \underbrace{(A-B)^{-1} \cdot (A-B)}_{I} \cdot X = (A-B)^{-1} \cdot C \implies \boxed{X = (A-B)^{-1} \cdot C}$$

c) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A-B| = 2$

$$\mathrm{Adj}(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (A-B)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A-B)^{-1} \cdot C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 3 \\ -7/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 10

Se consideran la matriz: $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A^\top - X \cdot A = 3I_3$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) $A^\top - X \cdot A = 3I_3 \implies X \cdot A = A^\top - 3I_3 \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (A^\top - 3I_3) \cdot A^{-1}$

$$\implies \boxed{X = (A^\top - 3I_3) \cdot A^{-1}}$$

$$|A| = 10 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 5 \\ -24 & -38 & 30 \\ -22 & -34 & 25 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -38 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A^\top - 3I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^\top - 3I_3) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -38 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -65 & -360 & -315 \\ 40 & 220 & 200 \\ -59 & -314 & -267 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -13/2 & -36 & -63/2 \\ 4 & 22 & 20 \\ -59/10 & -157/5 & -267/10 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 11

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix} \quad \& \quad B=\begin{pmatrix}-2&1\\3&1\\0&2\end{pmatrix} \quad \& \quad C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

a) *Determine la matriz X que verifica $A\cdot X+B=A^2\cdot C$.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A - Extraordinario)

Solución.

a) $A\cdot X+B=A^2\cdot C \implies A\cdot X=A^2\cdot C-B \implies \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X=A^{-1}\cdot(A^2\cdot C-B)$

$$\implies X=\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot A\cdot C-A^{-1}\cdot B \implies \boxed{X=A\cdot C-A^{-1}\cdot B}$$

$$|A|=3 \quad \& \quad \text{Adj}A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&-1&1\\1&-5&2\end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-1&-5\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&7\\-4&-1\\3&-2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot B=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-1&-5\\2&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\3&1\\0&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-5&2\\1&-13\\-1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/3&2/3\\1/3&-13/3\\-1/3&7/3\end{pmatrix}$$

$$X=A\cdot C-A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-4&7\\-4&-1\\3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5/3&2/3\\1/3&-13/3\\-1/3&7/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/3&19/3\\-13/3&10/3\\10/3&-13/3\end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

c) La matriz X que verifica que $X \cdot A = I_3$ para $a = 3$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A - Reserva)

Solución.

a) $|A| = -2a^2 - 3a - 3 - 3a - 3 - (-a^2 - a - 3a - 6a - 6) = -a^2 + 4a = -a \cdot (a-4) \neq 0$
$\Longrightarrow a \neq \{0, 4\} \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \neq \{0, 4\}$

c) $X \cdot A = I_3 \Longrightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = I_3 \cdot A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = A^{-1}}$

Para $a = 3 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -3^2 + 4 \cdot 3 = 3$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -4/3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 13

Se considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$*, donde* a *es un número real.*

a) Determine los valores de a *para que la matriz* A *sea no invertible.*

b) Para $a = 5$*, calcule la inversa de la matriz* A*.*

c) Para $a = 5$*, resuelva la ecuación matricial* $A \cdot X = B$*.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) $|A| = a \cdot (a^2 - 16) = 0 \implies a = \{-4, 0, 4\} \implies \nexists A^{-1} \ \forall x \in \{-4, 0, 4\}$

b) Para $a = 5$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ & $|A| = 5 \cdot (5^2 - 16) = 45$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 25 & -40 & 0 \\ -10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 & 0 \\ -8/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}}$$

c) $A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$X = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ -90 \\ 90 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 14

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) *Calcule los valores del parámetro* a *para los que tanto* A *como* B *admitan inversa.*

b) *Para* $a = 1$, *halle una matriz* X *que satisfaga* $A \cdot X \cdot B = C$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) $\left.\begin{array}{l} |A| = a \cdot (a-2) \neq 0 \implies a \neq \{0,2\} \\ |B| = -2 + a \neq 0 \implies a \neq 2 \end{array}\right\} \implies \exists A^{-1} \text{ y } B^{-1}\ \forall a \neq \{0,2\}$

b) $A \cdot X \cdot B = C \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$

Para $a = 1$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{|A|=-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |B| = -1 \quad \& \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 15

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que se verifica que $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot (A^2 - 4A + 5I_3)$.

b) Dada la ecuación matricial $X^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, *determine la dimensión de* X *y resuelva la ecuación.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A - Extraordinario)

Solución.

a) Para demostrar que $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot (A^2 - 4A + 5I_3)$ vamos a ver si $A^{-1} \cdot A = I$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (A^2 - 4A + 5I) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) $$\underbrace{X^\top}_{m \times n} \cdot \underbrace{A}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \xRightarrow[n=3]{m=2} X^\top \in \mathcal{M}_{2\times 3} \implies X \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

$$X^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies X^\top \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

$$\implies X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^\top = \left[\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^\top$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aragón

Ejercicio 16

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor de m *para que la ecuación matricial* $X \cdot A = B$ *tenga solución única.*

b) Para $m = 1$, *resuelva la ecuación matricial anterior.*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $|A| = -7m + 8 \neq 0 \implies m \neq \dfrac{8}{7} \implies \exists\, A^{-1}\ \forall m \neq \dfrac{8}{7}$, en cuyo caso la solución de la ecuación matricial será:

$$X \cdot A = B \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = B \cdot A^{-1} \implies \boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

b) Si $m = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1$ & $\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 17

Responda a las siguientes cuestiones:

a) *Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial:* $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ *esté bien planteada, siendo:* $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-12&-8&1\end{pmatrix}$ & $B=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\\1&6\end{pmatrix}$. *Calcule X.*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $$\underbrace{\underbrace{\underbrace{A}_{2\times 3}\cdot\underbrace{B}_{3\times 2}}_{2\times 2}\cdot\underbrace{X}_{2\times 1}}_{2\times 1}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}}_{2\times 1}\Longrightarrow X\in\mathcal{M}_{2\times 1}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&1\\-12&-8&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\\1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\exists\ (AB)^{-1}]{|AB|=1}(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\Longrightarrow\underbrace{(A\cdot B)^{-1}\cdot A\cdot B}_{I}\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X=(A\cdot B)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\Longrightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}24\\-14\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 18

Responda a las siguientes cuestiones:

a) *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $$\underbrace{\underbrace{X}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{3\times 3}}_{m\times 3} + \underbrace{A}_{2\times 3} = \underbrace{C}_{2\times 3} \implies m = 2 \quad \& \quad n = 3 \implies X \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

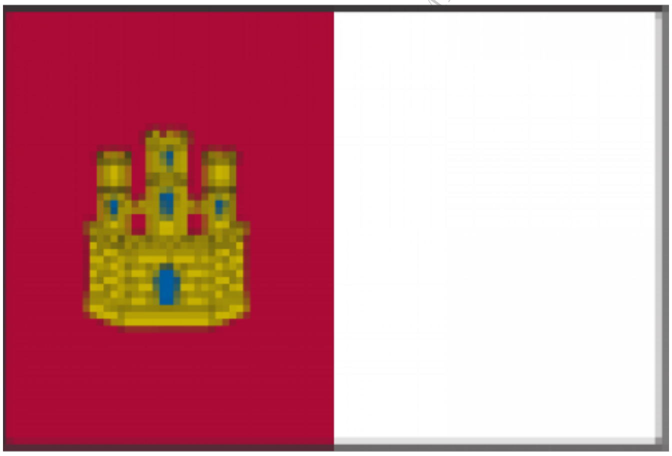
$$X \cdot B + A = C \Rightarrow X \cdot B = C - A \Rightarrow X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = (C - A) \cdot B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (C - A) \cdot B^{-1}}$$

$$|B| = -1 \quad \& \quad \operatorname{Adj} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \& \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - A) \cdot B^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}}$$

Castilla-La Mancha



Ejercicio 19

a) *Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$ ¿De qué propiedad estamos hablando?*

c) *Para las matrices*

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \dfrac{1}{3}E^\top$

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Sección 2 - Bloque 2)

Solución.

a) En general no se cumple ya que $A \cdot X \neq X \cdot A$, pues el producto de matrices no cumple la *propiedad conmutativa*, salvo en algún caso particular.

c) $X \cdot C - D^2 = \dfrac{1}{3}E^\top \implies X \cdot C = \dfrac{1}{3}E^\top + D^2 \implies X \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_{I} = \left(\dfrac{1}{3}E^\top + D^2\right) \cdot C^{-1}$

$$\implies \boxed{X = \left(\frac{1}{3}E^\top + D^2\right) \cdot C^{-1}}$$

$$\frac{1}{3}E^\top = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}^\top = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad |C| = 1 \quad \& \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(\frac{1}{3}E^\top + D^2\right) \cdot C^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \& \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación matricial $X+X\cdot\frac{1}{2}A=AB$.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Sección 2 - Bloque 2)

Solución.

a) $X+X\cdot\frac{1}{2}A=AB \implies X\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)=AB$

$$\implies X\cdot\underbrace{\left(I+\frac{1}{2}A\right)\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}}_{I}=AB\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1} \implies \boxed{X=AB\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}}$$

$$I+\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad \left|I+\frac{1}{2}A\right|=-1$$

$$\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=AB\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -26 \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -28 & 18 \\ -86 & 56 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21

a) Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \& \quad P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

demuestra que M y N conmutan.

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^\top - M$.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Sección 2 - Bloque 2)

Solución.

a) $M \cdot N = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$N \cdot M = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$M \cdot N = N \cdot M \implies M$ y N conmutan. Además $M \cdot N = I \implies M^{-1} = N$.

b) $M \cdot P \cdot X = N^\top - M \implies \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \cdot P \cdot X = M^{-1} \cdot \left(N^\top - M\right)$

$\implies P \cdot X = \underbrace{M^{-1}}_{N} \cdot N^\top - \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \implies \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \cdot X = P^{-1} \cdot \left(N \cdot N^\top - I\right)$

$\implies \boxed{X = P^{-1} \cdot \left(N \cdot N^\top - I\right)}$

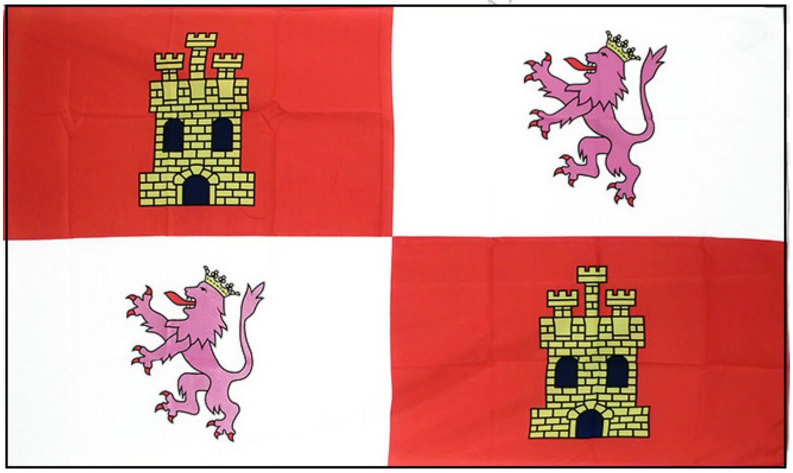
$P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |P| = -3 \quad \& \quad P^{-1} = \dfrac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$N \cdot N^\top - I = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 85 & -38 \\ -38 & 17 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & -38 \\ -38 & 16 \end{pmatrix}$

$X = P^{-1} \cdot \left(N \cdot N^\top - I\right) = -\dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 84 & -38 \\ -38 & 16 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -30 & 10 \\ 24 & -18 \end{pmatrix}$

$$\implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}}$$

Castilla y León



Ejercicio 22

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

b) $2AX = B \implies 2\,\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X = A^{-1}\cdot B \implies \boxed{X = \frac{1}{2}\cdot A^{-1}\cdot B}$

$|A| = 3 \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \end{pmatrix}$

Cataluña

Ejercicio 23

Calcule la matriz X que verifica $A \cdot X \cdot B = C$, sabiendo que:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \& \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Serie 5)

Solución.

$$A \cdot X \cdot B = C \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$$

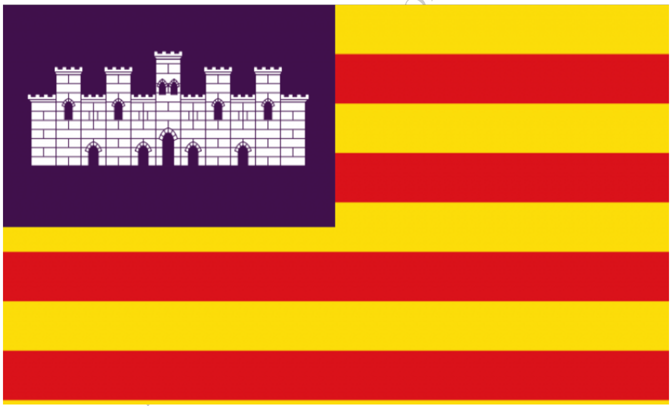
$$|A| = 1 \implies A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -1 \implies B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nótese que la matriz X tiene la estructura $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, que requiere el enunciado

Islas Baleares



Ejercicio 24

Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuales Y es invertible.

b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $|Y| = -k - 4 \neq 0 \quad k \neq -4 \implies \exists Y^{-1} \, \forall k \neq -4$

b) Para $k = 1 \implies Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -5 \quad \& \quad Y^{-1} = \dfrac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Extremadura

Ejercicio 25

Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $|A| = x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = \{1, 3\} \implies \nexists\, A^{-1}\ \forall x = \{1, 3\}$

b) Para $x = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -1 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & -6 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 26

Dada la matriz A siguiente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *Se pide, justificando las respuestas:*

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 0$.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $|A| = -x^2 + 1 = 0 \implies x = \{-1, 1\} \implies \exists\, A^{-1}\ \forall x \neq \{-1, 1\}$

b) Para $x = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 1 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\ A^{\top} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 27

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) *Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.*

b) *Para $x = 1$, calcular la matriz X tal que $X \cdot A = I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3.*

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $|A| = -4x^2 - 4x = -4x \cdot (x+1) = 0 \implies x = \{-1, 0\} \implies \exists A^{-1} \; \forall x \neq \{-1, 0\}$

b) $X \cdot A = I + A \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (I + A) \cdot A^{-1} = A^{-1} + \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \implies \boxed{X = A^{-1} + I}$

Si $a = 1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -8 \quad \& \quad \mathrm{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} + I = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 28

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^\top = B$, donde $A^\top$ es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \cdot A - A^\top = B \implies X \cdot A = B + A^\top \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \left(B + A^\top\right) \cdot A^{-1}$$

$$\implies \boxed{X = \left(B + A^\top\right) \cdot A^{-1}}$$

$$B + A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \quad \& \quad \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj(A)}^\top = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B + A^\top\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Galicia

Ejercicio 29

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.

c) Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

b) $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A - I| = 1 \quad \& \quad \operatorname{Adj}(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \cdot \operatorname{Adj}(A - I)^{\top} \implies \boxed{(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

c) $X \cdot A + B = A^2 + X \implies X \cdot A - X = A^2 - B \implies X \cdot (A - I) = A^2 - B$

$$\implies X \cdot \underbrace{(A - I) \cdot (A - I)^{-1}}_{I} = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1} \implies \boxed{X = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1}}$$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{(A^2 - B)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{(A - I)^{-1}} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 30

Para dos matrices A y B se verifica que:

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad 2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

a) *Calcule las matrices A y B.*

b) *Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A\cdot X-B=X$*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{l} A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B=\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) $A\cdot X-B=X \Longrightarrow A\cdot X-X=B \Longrightarrow (A-I)\cdot X=B$

$$\Longrightarrow \underbrace{(A-I)^{-1}\cdot(A-I)}_{I}\cdot X=(A-I)^{-1}\cdot B \Longrightarrow \boxed{X=(A-I)^{-1}\cdot B}$$

$$A-I=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A-I|=3$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=(A-I)^{-1}\cdot B=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 31

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, que cumple* $A \cdot B \cdot X = C + I$ *donde* $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *e* I *es la matriz identidad* 2×2*.*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$|A \cdot B| = -5 \quad \& \quad (A \cdot B)^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$AB \cdot X = C + I \Rightarrow \underbrace{(AB)^{-1} \cdot (AB)}_{I} \cdot X = (AB)^{-1} \cdot (C+I) \Rightarrow \boxed{X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I)}$

$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C+I) = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C+I} \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 32

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) *Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.*

b) *Para $a = 1$, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $|A| = -3a + 2 = 0 \implies a = {}^2\!/_3 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \neq {}^2\!/_3$

b) Para $a = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = -3 \cdot 1 + 2 = -1$

$$\text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}}$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 33

Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Determínese la matriz X *tal que* $AX = A^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 2 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b) $AX = A^{-1} \Longrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot A^{-1} \Longrightarrow X = (A^{-1})^2$

$$X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 34

Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcúlese $\left(A \cdot A^{\top} - 3I\right)^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

b) $A \cdot A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{\top} - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \cdot A^{\top} - 3I\right)^{-1} \overset{\odot}{=} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\odot$*Nota:* Sea la matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 35

Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 36

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

b) Para $k = 3$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 8 - 4 \cdot 3 = -4 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 37

Se consideran las matrices dependientes del parámetro real a

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínense los valores de a para los que la matriz $A \cdot B$ admite inversa.

b) Para $a = 0$, resuélvase la ecuación matricial $(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 2a+4 & 2 \end{pmatrix}$

$|A \cdot B| = 2a^2 - 2a - 4 = 0 \implies a = \{-1, 2\} \implies \exists (A \cdot B)^{-1} \ \forall a \neq \{-1, 2\}$

b) Para $a = 1$ $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ & $|A \cdot B| = -4$ & $(A \cdot B)^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \underbrace{(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B)}_{I} \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 38

Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$$

a) *Determínese para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible A.*

b) *Para $a = 0$ halle la matriz inversa de A.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 + 10a - 24 = 0 \implies x = \{-12, 2\}$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-12, 2\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ & $|A| = -24$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 18 & -5 & -3 \\ 24 & -8 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & -3/4 & -1 \\ 1/3 & 5/24 & 1/3 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 39

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo a un número real

a) *Determínese a para que la matriz admita inversa.*

b) *Para $a = 1$, halle la matriz inversa de A.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = -a^2 + 2a = a \cdot (2 - a) = 0 \implies a = \{0, 2\}$, luego $\exists\ A^{-1}\ \forall a \neq \{0, 2\}$

b) Para $a = 1$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1 \cdot (2 - 1) = 1$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 40

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $k = 1$, la matriz inversa de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = k^3 + k^2 - 6k = k \cdot (k^2 + k - 6) = 0 \Rightarrow k = \{-3, 0, 2\} \Rightarrow \exists A^{-1} \; \forall k \neq \{-3, 0, 2\}$

b) Para $k = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1 \cdot (1^2 + 1 - 6) = -4$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 41

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) Determínese para $k = 0$ la matriz inversa de A.

c) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2 - 2k^2 = 0 \implies k = \pm 1$

- Si $k \neq \{-1, 1\} \implies \exists\, A^{-1}$
- Si $k = \{-1, 1\} \implies \nexists\, A^{-1}$

b) Para $k = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2 - 2 \cdot 0^2 = 2$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$|M| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 6 = 12 \neq 0 \implies \exists\, M^{-1}$

Ejercicio 42

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Calcúlese la matriz B^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

b) $B^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 43

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $a = 1$, la matriz inversa de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Septiembre - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = a^3 - 2a^2 = 0 \implies a^2 \cdot (a-2) = 0 \implies x = \{0,2\} \implies \exists A^{-1}\ \forall a \neq \{0,2\}$.

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -1$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

Ejercicio 44

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ *dependiente del parámetro real a.*

a) Determínese los valores de a para los que la matriz A es invertible.

b) Para $a = 1$, halle la matriz inversa de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2a^3 \neq 0 \implies a \neq 0 \implies \exists A^{-1}\ \forall a \neq 0$.

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2 \cdot 1^3 = 2$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 45

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$ *Compruébese que* B *es la matriz inversa de* A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

B es matriz inversa de $A \iff B \cdot A = A \cdot B = I$
Es importante la comprobación de los dos productos pues el hecho de que el producto de matrices no sea conmutativo así nos lo exige.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 46

Se consideran la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$$
donde m *es un parámetro real.*

a) Determínense los valores de m *para los que la matriz* A *es invertible.*

b) Para $m = 0$, *hállese la matriz inversa de* A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = 6 - 2m = 0 \implies m = 3 \implies \exists A^{-1},\ \forall m \in \mathbb{R} - \{3\}$

b) Para $m = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = 6 - 2 \cdot 0 = 6$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 47

Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Para $m = 5$, Calcule la matriz inversa de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 3m - 12 \neq 0 \implies m \neq 4 \implies \exists A^{-1}\ \forall m \neq 4$

b) Para $m = 5$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ & $|A| = 3 \cdot 5 - 12 = 3$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 13/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

Ejercicio 48

Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \& \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A-2B$ sea nulo.

b) Determínese si las matrices C y $(C^\top \cdot C)$, donde $C^\top$ denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo calcúlense las inversas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos $|A-2B|$ y vemos para qué valor de k se anula.

$$A-2B=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2B| = 2\cdot(k-2) - 24 + 0 - (0+1+0) = 2k-29 = 0 \implies \boxed{k = 29/2}$$

b) Para que una matriz tenga inversa ha de ser cuadrada y tener determinante no nulo. Como $C_{3\times 2} \implies \nexists C^{-1}$

$$C^\top \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|C^\top \cdot C\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \exists \left(C^\top \cdot C\right)^{-1}$$

$$\left(C^\top \cdot C\right)^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 49

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 + 0 + 4 - (2a + 4 + 0) = a^2 - 2a = a \cdot (a - 2) = 0 \implies \boxed{a = \{0, 2\}}$

b) Para $a = 3$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 50

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese B^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos la matriz A^{-1} por el método de los adjuntos.

$$|A| = 18 + 64 + 60 - (40 + 96 + 18) = -12 \quad \& \quad \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -18 & -22 & 23 \\ 6 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

b) Si llamamos $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot C \implies B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1}A}_{I} = \frac{1}{2} \cdot CA \implies B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot CA$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 51

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A \cdot B$ y determínense los valores de x para los cuales $A \cdot B$ es invertible.

b) Calculese la inversa de $A \cdot B$ cuando $x = 1$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Hallamos la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz AB sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero:

$$|AB| = -x + 2 \neq 0 \implies x \neq 2 \implies \exists (AB)^{-1} \ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

b) Si $x = 1 \implies AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ & $|AB| = -1 + 2 = 1$

$$\text{Adj}(AB) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ \& \ (AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot \text{Adj}\,(AB)^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 52

Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que exista B^{-1}

b) Para $m = 0$ calcule B^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) $|B| = -m^2 + m + 1 = 0 \implies m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies \exists\, B^{-1}\ \forall m \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) Para $m = 0$ la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $|B| = -0^2 + 0 + 1 = 1$

$$\operatorname{Adj} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \operatorname{Adj} B^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 53

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de m para los que existe A^{-1}.

b) Para $m = 1$ calcule la matriz inversa de A.

Para $m = 1$,

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

a) $|A| = 4m = 0 \implies m = 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall m \neq 0$

b) Para $m = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 4 \cdot 1 = 4$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 54

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $(A^2 - 3I)^{-1}$*, donde* I *es la matriz identidad de orden 3.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \left|A^2 - 3I\right| = 4$$

$$(A^2 - 3I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 55

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ *con* $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a *para los que existe* A^{-1}.

b) Para $a = -1$*, calcule* A^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 6 - 5a^2 = 0 \implies a = \pm\sqrt{6/5} \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \neq \pm\sqrt{6/5}$

b) Para $a = -1$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 1 \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 56

Se consideran la matriz A dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para los que existe A^{-1}*

b) *Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

b) Para $a = b = c = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1$

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 57

Se considera la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) *Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.*

b) *Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $A = A^{-1} \implies A \cdot A = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \implies A^2 = I$

$$A^2 = I \implies \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a^2 + 1 = 1 &&\Rightarrow \boxed{a = 0} \\ &\Rightarrow 2a = 0 &&\Rightarrow a = 0 \\ &\Rightarrow b^2 = 1 &&\Rightarrow \boxed{b = \pm 1} \end{aligned}$$

b) Para $a = b = 2$, la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 6$

$$\text{Adj } A^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^\top = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 58

Se considera la matrizz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.

b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = \pm 2 \implies \nexists\, A^{-1}$ si $a = \pm 2$

b) Para $a = 1$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -6 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 59

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 2$ calcule la matriz inversa de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = -a - 1 = 0 \implies a = -1 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Para $a = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -2 - 1 = -3$

$$\text{Adj}\, A^{\top} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 60

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) *Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.*

b) *Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2a - 4 = 0 \implies a = 2$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall\, a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 61

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 - 2a - 2 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{3}$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 62

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y $B = A + aI$*, donde* I *es la matriz identidad de orden 3 y* a *es un número real.*

b) Calcule los valores de a *para que las matrices* B *y* AB *sean invertibles.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = A+aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|B| = a^3 - a = a\cdot(a^2-1) = 0 \implies a = \{-1, 0, 1\} \implies \exists B^{-1} \; \forall a \neq \{-1,0,1\}$

$|AB| = |A|\cdot|B| = 0\cdot|B| = 0 \implies \nexists (AB)^{-1} \; \forall a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 63

Sea $a \in \mathbb{R}$*. Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores del parámetro real a *para que* A *tenga inversa.*

b) Calcule, para $a = 1$*, la solución del sistema* $(A - B)\cdot X = Y$*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 4a = 0 \implies \exists A^{-1} \; \forall a \neq 0.$

b) $(A-B)\cdot X = Y \Rightarrow \underbrace{(A-B)^{-1}\cdot(A-B)}_{I}\cdot X = (A-B)^{-1}\cdot Y \Rightarrow X = (A-B)^{-1}\cdot Y$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A-B| = -4$$

$$\mathrm{Adj}(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \implies (A-B)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A-B)^{\top}}{|A-B|}\cdot = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{(A-B)^{-1}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{Y} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 64

Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = a^2 - 2a = a \cdot (a-2) = 0 \implies a = \{0, 2\} \implies \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0,2\}$

Ejercicio 65

Considérese la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0 \implies a = -1 \implies \exists A^{-1}\ \forall a \neq -1$

b) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = (1+1)^2 = 4 \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 66

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2 \neq 0 \implies \exists A^{-1} \qquad \& \qquad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

b) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 67

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

b) $A^2 - A = I \implies A \cdot (A - I) = I \implies A^{-1} = A - I$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 68

Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

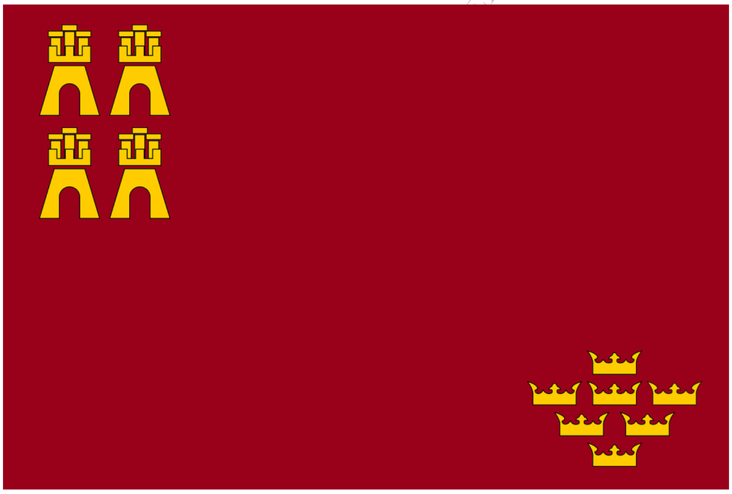
(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

b) $|A| = 1 \xrightarrow{\exists\ A^{-1}} \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Podríamos haber razonado diciendo que $A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I \implies \boxed{A^{-1} = A^2}$

Murcia



Ejercicio 69

> *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, *se pide:*
>
> *b) Calcular la matriz inversa* A^{-1}.
>
> *c) Para* $a = 0$, *encuentre la matriz* X *que satisface la ecuación* $AX + B = C$.
>
> *(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)*

Solución.

b) $|A| = 4 \implies \exists\ A^{-1} \implies A^{-1} = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}}$

c) $AX + B = C \implies AX = C - B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$

$$\implies \boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$$

Para $a = 0 \implies B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $C - B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -14 \\ 6 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -7/2 \\ 3/2 & 9 \end{pmatrix}$

Navarra

Ejercicio 70

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, *responda a las siguientes cuestiones:*

I) *Calcule* A^{-1} *y* B^{-1}.

II) *Resuelva la ecuación matricial* $C - A = 2X - 6I$.

III) *Resuelva la ecuación matricial* $AXB = C$.

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

I) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

II) $C - A = 2X - 6I \implies 2X = C - A + 6I \implies \boxed{X = \frac{1}{2} \cdot (C - A + 6I)}$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 11/2 \end{pmatrix}}$$

III) $AXB = C \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$

$$X = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -14 \\ 36 & -20 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 71

Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro real k:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

I) *Determine los valores de k para los cuales A no tiene inversa.*

II) *Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

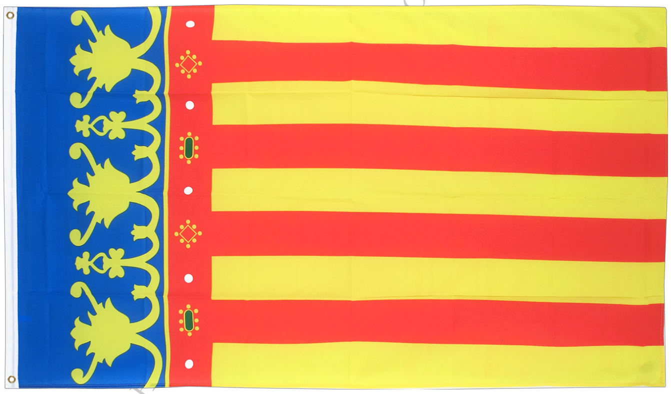
Solución.

I) $|A| = 2k^2 - 4k = 2k \cdot (k-2) = 0 \implies k = \{0, 2\} \implies \nexists\ A^{-1},\ \forall k = \{0, 2\}$

II) Si $k = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -2 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}}$$

Comunidad Valenciana



Ejercicio 72

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *Calcular* $(AB)^{-1}$.

c) *Resolver la ecuación* $B^\top X + A^\top B = A^\top$.

siendo $A^\top$ *y* $B^\top$ *las matrices traspuestas de* A *y* B*, respectivamente.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2021)

Solución.

a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \implies |AB| = 4$

$$\implies (AB)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \boxed{(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

c) $B^\top X + A^\top B = A^\top \implies B^\top X = A^\top - A^\top B$

$$\implies \underbrace{\left(B^\top\right)^{-1} \cdot B^\top}_{I} X = \left(B^\top\right)^{-1} \cdot \left(A^\top - A^\top B\right) \implies \boxed{X = \left(B^\top\right)^{-1} \cdot \left(A^\top - A^\top B\right)}$$

$$B^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \left|B^\top\right| = 2 \implies \left(B^\top\right)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top - A^\top B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}_{A^\top B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B^\top\right)^{-1} \cdot \left(A^\top - A^\top B\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 73

Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$.

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $XA + C = XB$.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Julio 2021)

Solución.

a) $$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - B| = 6$$

$$\text{Adj}(A - B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - B)^{-1} = \frac{1}{|A - B|} \cdot \text{Adj}(A - B)^{\top}$$

$$\Longrightarrow (A - B)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $$XA + C = XB \Longrightarrow XB - XA = C \Longrightarrow X \cdot (B - A) = C$$

$$\Longrightarrow X \cdot \underbrace{(B - A) \cdot (B - A)^{-1}}_{I} = C \cdot (B - A)^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = C \cdot (B - A)^{-1}}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 74

Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5} \cdot (B + AX) = C^{\top}$$

, siendo $C^{\top}$ la matriz traspuesta de C.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

b) $\dfrac{1}{5} \cdot (B + AX) = C^{\top} \implies B + AX = 5C^{\top} \implies AX = 5C^{\top} - B$

$\implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} X = A^{-1} \cdot \left(5C^{\top} - B\right) \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot \left(5C^{\top} - B\right)}$

$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 24 \quad \& \quad A^{-1} = \dfrac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$5C^{\top} - B = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot \left(5C^{\top} - B\right) = \dfrac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 75

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^\top X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

b) $AX = B^\top X - C \implies B^\top X - AX = C \implies \left(B^\top - A\right) \cdot X = C$

$$\implies \underbrace{\left(B^\top - A\right)^{-1} \cdot \left(B^\top - A\right)}_{I} \cdot X = \left(B^\top - A\right)^{-1} \cdot C \implies \boxed{X = \left(B^\top - A\right)^{-1} \cdot C}$$

$$B^\top - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\left|B^\top - A\right| = 1} \left(B^\top - A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B^\top - A\right)^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 76

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) *Calcular la matriz A^2 y su inversa.*

b) *Resolver la ecuación matricial $2A^2 \cdot X = 4B$.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A^2| = 16$$

$$\text{Adj}\, A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \cdot \text{Adj}\left(A^2\right)^{\top} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(A^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 & -5/8 \\ 5/8 & -3/16 & 1/8 \\ 3/8 & -5/16 & -1/8 \end{pmatrix}}$$

b) $$2A^2 \cdot X = 4B \Longrightarrow 2\,\underbrace{\left(A^2\right)^{-1} \cdot A^2}_{I} \cdot X = 4\left(A^2\right)^{-1} \cdot B \Longrightarrow \boxed{X = 2\left(A^2\right)^{-1} \cdot B}$$

$$X = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & 7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}}$$