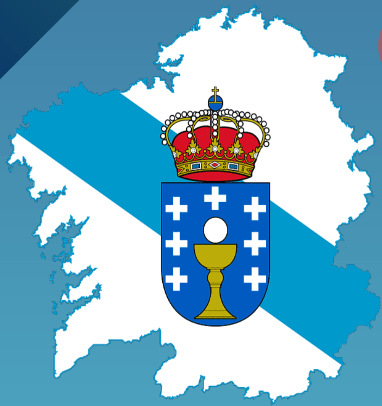
# MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS



# EVAU JULIO 2023
## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2023 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)**

*Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcule los valores de $a$ para los cuales la matriz $A$ tiene inversa.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, calcule, si es posible, la inversa de la matriz $A$.*

c) *(1.33 puntos) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo:* $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

*(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

**Solución.**

a) $|A| = -3a + 2 = 0 \implies a = 2/3 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \neq 2/3$

b) Para $a = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = -3 \cdot 1 + 2 = -1$

$$\text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}}$$

c) Escribimos el sistema en forma matricial y lo resolvemos por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_2 - F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 1 - 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y - (-1) = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Otra opción:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\implies X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)**

*Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: Las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.*
*Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg.*

*a) (1.5 puntos) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.*

*b) (1.5 puntos) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?*

*c) (0.33 puntos) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.*

*(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

**Solución.**

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de jurel pescado (Tm)"
  $y \equiv$ "Cantidad de caballa pescada (Tm)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

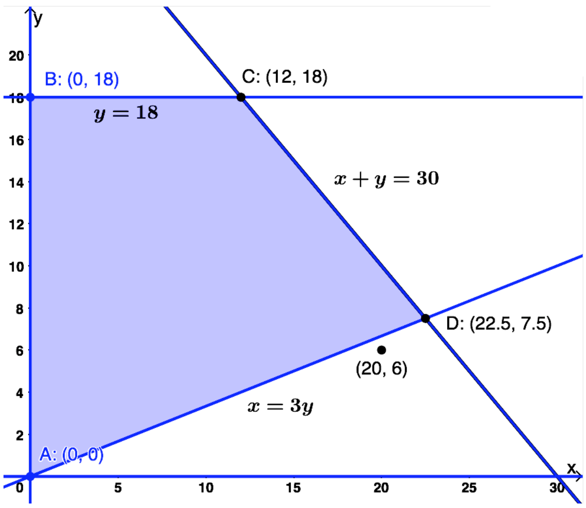
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 30 & \to (0,30) \quad \& \quad (30,0) \\ ② \; x \leq 3y & \to (0,0) \quad \& \quad (30,10) \\ ③ \; y \leq 18 & \to (0,18) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 5000x + 6000y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 18 | 108000 |
| C | 12 | 18 | 168000 |
| D | 22.5 | 7.5 | 157500 |




b) Los *ingresos máximo* son de 168000 €, pescando 12 Tm de jurel y 18 Tm de caballa.

c) El punto $(20, 6)$ no pertenece a la región factible (no cumple la restricción ②), por lo que la peca de 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa no cumple las normas sobre cuota pesquera.

**Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)**

*El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función*

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t\cdot(t-2) & , \textit{si } 0 \le t \le 3 \\ 2t - 1 & , \textit{si } 3 < t \le 5 \end{cases} , \textit{ donde } t \textit{ es el tiempo transcurrido en meses}$$

a) *(1.83 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden.*

b) *(1.5 puntos) Represente gráficamente la función $N(t)$. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $N(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 5$.*

*(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

**Solución.**



$$N(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 8 & , \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 2t - 1 & , \text{si } 3 < t \le 5 \end{cases} \implies N'(t) = \begin{cases} -2t + 2 = 0 & , \text{si } 0 < t < 3 \\ 2 & , \text{si } 3 < t < 5 \end{cases}$$

a) $N_1'(t) = -2t + 2 = 0 \implies t = 1$

| | $(0,1)$ | $(1,3)$ | $(3,5)$ |
|---|---|---|---|
| Signo $N'(t)$ | + | - | + |
| $N(t)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

El número de ejemplares de la revista $N(t)$ es *creciente* en $(0,1)\cup(3,5)$ y *decreciente* en $(1,3)$, y tiene un *máximo relativo* en $(1,9)$.
Para estudiar los máximos y mínimos absolutos tenemos que:

- $\lim\limits_{t\to 3^-} N(t) = \lim\limits_{t\to 3^+} N(t) = N(3) = 5 \implies N(t)$ es continua en $t = 3$
- Como $N(t)$ son polinomios $\implies \text{Dom}(N) = [0,5]$
- $N(0) = 8 \quad \& \quad N(1) = 9 \quad \& \quad N(3) = 5 \quad \& \quad N(5) = 9$

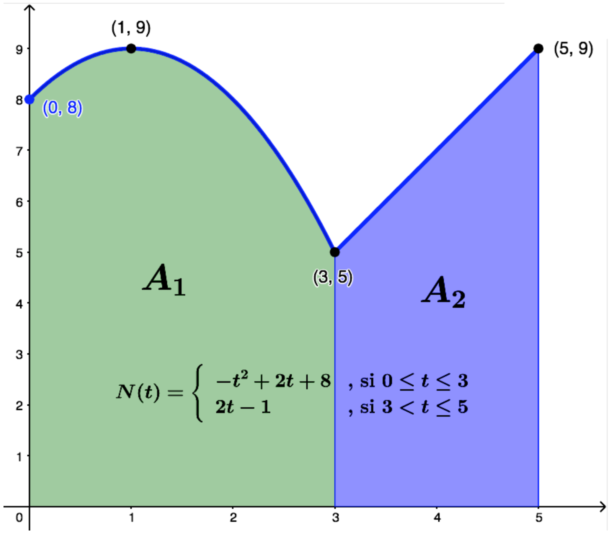
Por lo tanto el *máximo absoluto* de $N(t)$ es 9000 unidades en los meses 1 y 5, mientras que el *mínimo absoluto* es de 5000 unidades en el mes 3.

b) Con los datos obtenidos representamos la función $N(t)$, teniendo en cuenta que el estudio de la monotonía refleja que la función no corta al eje $OX$.
Esto hace que tengamos dos recintos de integración: $A_1 : (0,3)$ y $A_2 : (3,5)$

$$A_1 = \int_0^3 \left(-t^2 + 2t + 8\right) dt = -\frac{t^3}{3} + t^2 + 8t\Big]_0^3 = (-9 + 9 + 24) - 0 = 24$$

$$A_2 = \int_3^5 (2t - 1)\, dt = t^2 - t\Big]_3^5 = (25 - 5) - (9 - 3) = 14$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = 24 + 14 = 38\ u^2$$


(1, 9)
(0, 8)
(5, 9)
(3, 5)
$A_1$
$A_2$
$N(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 8 & , \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & , \text{si } 3 < t \leq 5 \end{cases}$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

**Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)**

*Dada la función* $f(x) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x}, \;\; x \neq 0, \;\; a \neq 0$

*a) (1 punto) Calcule los valores del parámetro $a$ para que $f(x)$ tenga un punto crítico en $x_0 = 3$.*

*b) (2.33 puntos) Para $a = 3$, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.*

*(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

**Solución.**

$$f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + a^2}{ax} \qquad \& \qquad f'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{ax^2} \qquad \& \qquad f''(x) = \frac{2a}{x^3}$$

a) Pto. crítico en $x_0 = 3$: $f'(3) = 0 \implies \dfrac{9 - a^2}{9a} = 0 \implies 9 - a^2 = 0 \implies \boxed{a = \pm 3}$

Para $a = \pm 3 \implies f''(3) = \pm\dfrac{2}{9} \neq 0$, luego el punto crítico será un extremo relativo.

b) Para $a = 3: \quad f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{3x} \qquad \& \qquad f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{3x^2} \qquad \& \qquad f''(x) = \dfrac{6}{x^3}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{3x^2} = 0 \implies x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 3$

| | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 0)$ | $(0, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | $+$ | - | - | $+$ |
| $f(x)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ y *decreciente* en $(-3, 0) \cup (0, 3)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(3, 2)$ y un *máximo relativo* en $(-3, -2)$.

$f''(x) = \dfrac{6}{x^3} = 0 \implies \nexists$ Pto. Inflexión

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $f''(x)$ | - | $+$ |
| $f(x)$ | Cóncava $\cap$ | Convexa $\cup$ |

La función $f(x)$ es *cóncava* $(\cap)$ en $(-\infty, 0)$ y *convexa* $(\cup)$ en $(0, +\infty)$, y no tiene puntos de inflexión.

**Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)**

*En una urna $A$ hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna $B$ hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna $A$ y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna $B$. Se extrae una bola al azar.*

a) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.*

b) *(1 punto) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna $A$?*

c) *(1.33 puntos) ¿Son independientes los sucesos "extraer bola roja" y "la bola procede de la urna $A$"?*

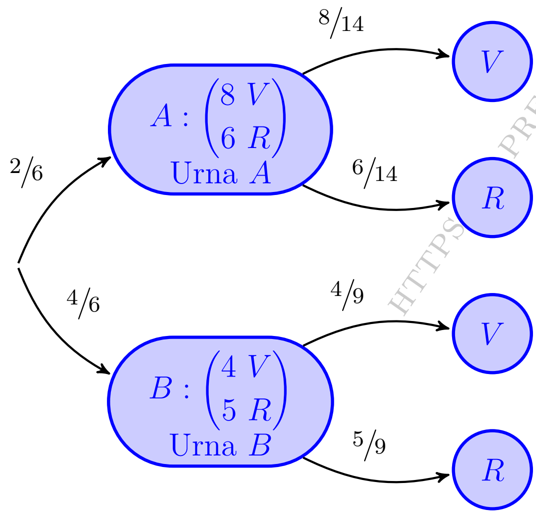
*(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{"En el dado sale un número menor que 3"}$$
$$B \equiv \text{"En el dado sale un número mayor o igual que 3"}$$
$$V \equiv \text{"La bola extraída es verde"}$$
$$R \equiv \text{"La bola extarída es roja"}$$






a) $$P(R) = P\big((A \cap R) \cup (B \cap R)\big) = P(A \cap R) + P(B \cap R) = P(A) \cdot P(R \mid A) + P(B) \cdot P(R \mid B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{14} + \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{9} = \frac{97}{189} \simeq 0.5132$$

b) $$P(A \mid V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(A) \cdot P(V \mid A)}{1 - P(R)} = \frac{{}^{2}/{}_{6} \cdot {}^{8}/{}_{14}}{1 - {}^{97}/{}_{189}} = \frac{9}{23} \simeq 0.3913$$

b) $$\left.\begin{array}{l} P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R \mid A) = \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{6}{14} = \dfrac{1}{7} \\ P(A) \cdot P(R) = \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{97}{189} = \dfrac{97}{567} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} P(A \cap R) \neq P(A) \cdot P(R) \\ \text{Los sucesos } A \text{ y } R \\ \text{no son independientes} \end{array}\right.$$

**Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)**

*El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica $\sigma = 300$ €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552 € y 1748 €.*

*a) (1.83 puntos) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior?*

*b) (1.5 puntos) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es $\mu = 1650$ €, ¿Cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?*

*(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Salario de los trabajadores (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 300)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300) \xrightarrow{n=36} I.C. = (1552, 1748)$

$$\overline{x} = \frac{1552 + 1748}{2} \implies \boxed{\overline{x} = 1650}$$

$$E = \frac{1748 - 1552}{2} = 98 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{300}{\sqrt{36}} = 98 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$

b) $X : \mathcal{N}(1650, 300) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}(\underbrace{1650}_{\mu}, \underbrace{50}_{\sigma/\sqrt{n}})$

$$P(\overline{X} \geq 1590) = P\left(Z \geq \frac{1590 - 1650}{50}\right) = P(Z \geq -1.2) = P(Z \leq 1.2) = 0.8849$$