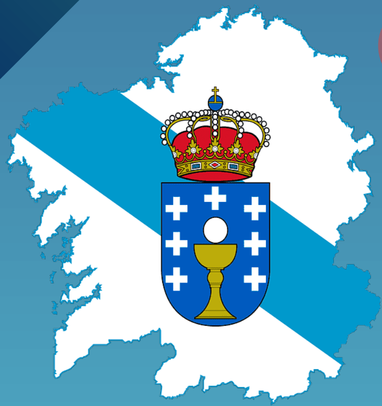
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Calcule la matriz* $A^{\top}$ *(siendo* $A^{\top}$ *la matriz transpuesta de* A*) y calcula la matriz* $A \cdot B$.

b) *Calcule la matriz* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *que cumple* $A \cdot B \cdot X = C + I$ *donde* $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *e* I *es la matriz identidad* 2×2.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $|A \cdot B| = -5 \quad \& \quad (A \cdot B)^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$AB \cdot X = C + I \Rightarrow \underbrace{(AB)^{-1} \cdot (AB)}_{I} \cdot X = (AB)^{-1} \cdot (C + I) \Rightarrow \boxed{X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I)}$$

$$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I) = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C+I} \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24000 y cada planta de producción B de 20000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

	Planta A	Planta B	Restricción
Costes (miles €/mes)	1	2	≤ 42
Empleados	8	4	≤ 120

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de plantas A"
  $y \equiv$ "Nº de plantas B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + 2y \leq 42 & \rightarrow (0,21) \quad \& \quad (42,0) \\ ② \; 8x + 4y \leq 120 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (15,0) \\ ③ \; x \leq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,15) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

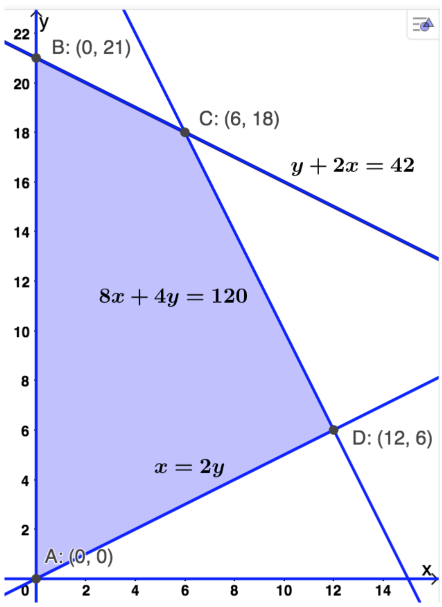
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 24x + 20y \quad (\text{miles } €)$$

- `Región factible` Calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	21	420
C	6	18	504
D	12	6	408



El *máximo beneficio* es de 504000 €, con 6 plantas de tipo A y 18 de tipo B.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función:

$$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \quad , \; 0 \leq t \leq 11$$

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.

b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).

c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $V'(t) = 3t^2 - 48t + 180 = 0 \implies t = \{6, 10\}$

	$(0,6)$	$(6,10)$	$(10,11)$
Signo $V'(t)$	$+$	-	$+$
$V(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El volumen de agua embalsada $V(t)$ es *creciente* en $(0,6) \cup (10,11)$ y *decreciente* en $(6,10)$.

b) $V(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8407$ millones de litros

c) El *volumen máximo* embalsado se producirá en el *extremo relativo* $t = 6$ o al final del período $t = 11$. Como $V(6) = 8432$ y $V(11) = 8407$, el *volumen máximo* embalsado será de 8432 millones de litros en el sexto año.

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t \cdot (t-a)^2 \quad , \; 0 \leq t \leq 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas.

c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

$$B(t) = t \cdot (t-a)^2 = t^3 - 2at^2 + a^2 t \quad \& \quad B'(t) = 3t^2 - 4at + a^2 \quad \& \quad B''(t) = 6t - 4a$$

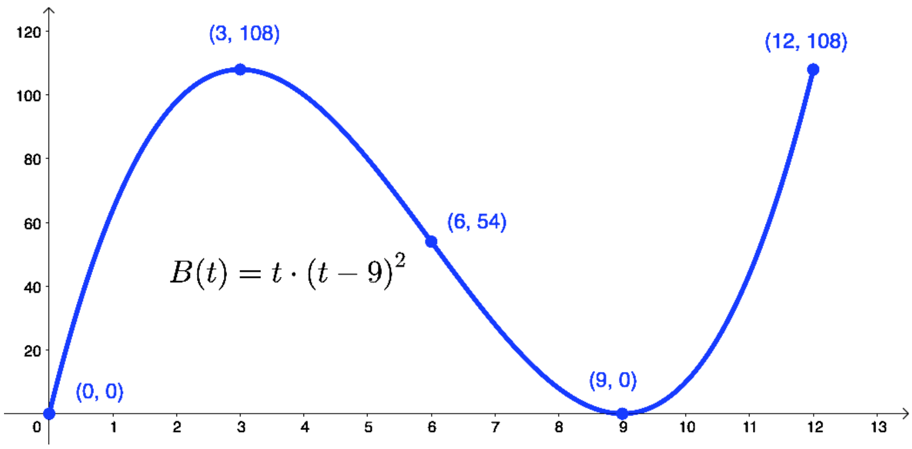
a) P.I. en $t = 6 \implies B''(6) = 0 \implies 6 \cdot 6 - 4a = 36 - 4a = 0 \implies \boxed{a = 9}$

b) Si $a = 9 \implies B'(t) = 3t^2 - 36 + 81 = 0 \implies t = \{3, 9\}$

	$(0,3)$	$(3,9)$	$(9,12)$
Signo $B'(t)$	+	-	+
$B(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El *beneficio máximo* se alcanzará en el *máximo relativo* $t = 3$ o en el extremo del periodo $t = 12$. Como $B(3) = 108$ y $B(12) = 108$, el *beneficio máximo* es de 10800 € en los meses tercero y duodécimo.

c) Representamos a función:



Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

En una ciudad, el 70 % de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90 % realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60 % realiza alguna compra en dicho establecimiento.

a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento?

b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo?

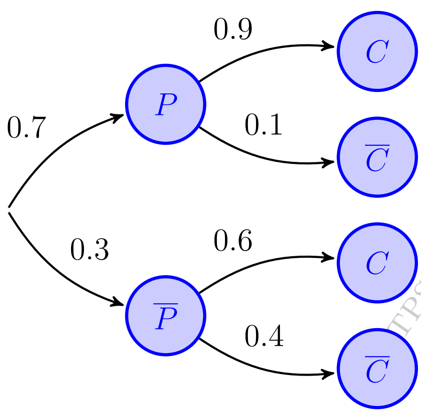
c) ¿Son independientes los sucesos "realizar alguna compra en ese establecimiento" y "recibir publicidad del mismo"? Justifique la respuesta.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$P \equiv \text{"La persona recibe publicidad"}$$
$$C \equiv \text{"La persona realiza una compra"}$$



a) $$\begin{aligned} P(C) &= P\big((P\cap C)\cup(\overline{P}\cap C)\big) \\ &= P(P\cap C) + P(\overline{P}\cap C) \\ &= P(P)\cdot P(C\mid P) + P(\overline{P})\cdot P(C\mid \overline{P}) \\ &= 0.7\cdot 0.9 + 0.3\cdot 0.6 = 0.81 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(C\mid P) &= \frac{P(C\cap P)}{P(P)} = \frac{P(C)\cdot P(P\mid C)}{P(P)} \\ &= \frac{0.7\cdot 0.9}{0.81} = 0.7777 \end{aligned}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} P(P\cap C) = P(P)\cdot P(C\mid P) = 0.7\cdot 0.9 = 0.63 \\ P(P)\cdot P(C) = 0.7\cdot 0.81 = 0.567 \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} P(P\cap C) \neq P(P)\cdot P(C) \\ C \text{ y } P \text{ no son independientes} \end{array}\right.$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.

a) Calcule, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la inspección de Trabajo.

b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2 %?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $n = 120 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{30}{120} = 0.25 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.75 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\dfrac{0.25 \cdot 0.75}{120}} = 0.065$

$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.185; 0.315)}$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 0.02 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

Si ignoramos los datos iniciales $\hat{p} = 0.5 = \hat{q}$, ya que es lo más desfavorable

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.5 \cdot 0.5}{n}} < 0.02 \Rightarrow n \geq \left(\dfrac{1.96}{0.02}\right)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \Rightarrow \boxed{n = 2401}$