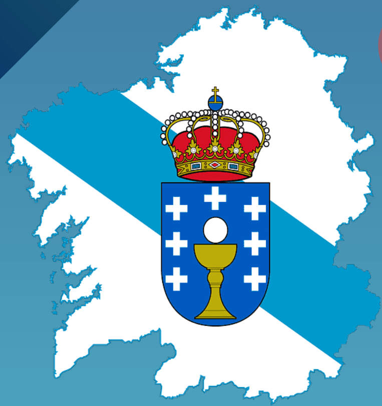
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, en donde I representa la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.

c) (1.33 puntos) Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^2 - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $$|A - I| = 1 \quad \& \quad \mathrm{Adj}\,(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \cdot \mathrm{Adj}\,(A - I)^{\top} \Longrightarrow \boxed{(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

c) $$X \cdot A + B = A^2 + X \Longrightarrow X \cdot A - X = A^2 - B \Longrightarrow X \cdot (A - I) = A^2 - B$$

$$\Longrightarrow X \cdot \underbrace{(A - I) \cdot (A - I)^{-1}}_{I} = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1}}$$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{(A^2 - B)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{(A - I)^{-1}} \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30000 € y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

a) (1 punto) Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) (1.5 puntos) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) (0.83 puntos) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de móviles de calidad A"
  $y \equiv$ "Nº de móviles de calidad A^+"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

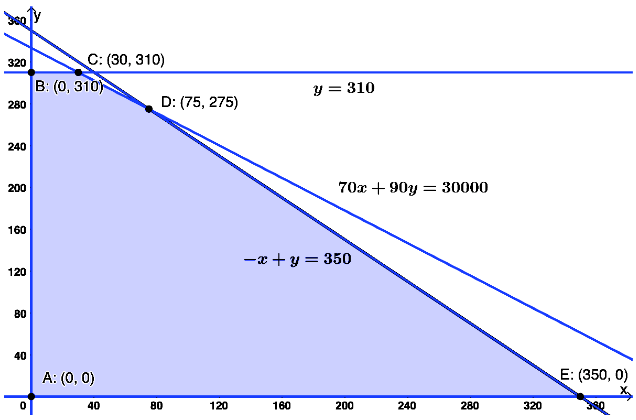
$$\begin{cases} \text{①}\ 70x + 90y \leq 30000 & \rightarrow (0, 333.3) \quad \& \quad (428.6, 0) \\ \text{②}\ x + y \leq 350 & \rightarrow (0, 350) \quad \& \quad (350, 0) \\ \text{③}\ y \leq 310 & \rightarrow (0, 310) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo:` Beneficio $A = 100 - 70 = 30$ & Beneficio $A^+ = 150 - 90 = 60$

$$f(x, y) = 30x + 60y \text{ (euros)}$$

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	310	18600
C	30	310	19500
D	75	275	18750
E	350	0	10500



El *beneficio máximo* es de 19500 € y se obtiene vendiendo 30 móviles de calidad A y 310 de calidad A^+.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

En una zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por la función $N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & ,\ si\ 0 \le t \le 10 \\ 95 - \dfrac{250}{t} & ,\ si\ t > 10 \end{cases}$

a) *(1.75 puntos) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$ ¿Entre qué años crece la función? ¿Entre qué años decrece?*

b) *(0.5 puntos) ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?*

c) *(1.08 puntos) Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 = 0 \implies t = 4 & 0 < t < 10 \\ \dfrac{250}{t^2} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} & t > 10 \end{cases}$

	$(0,4)$	$(4,10)$	$(10,+\infty)$
Signo $N'(t)$	-	+	+
$N(t)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

El número de aves $N(t)$ es *creciente* en $(4,+\infty)$ y *decreciente* en $(0,4)$.

b) El *número mínimo* de aves se produce en $t = 4$, es decir, al final del cuarto año desde que se contabilizan las mismas y asciende a $N(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 50 = 34 \implies 3400$ aves.

c) Calculamos en qué momentos hay 5000 y 7500 aves:

$$N(t) = 50 \implies \begin{cases} t^2 - 8t + \cancel{50} = \cancel{50} \implies \begin{cases} t = 0 \in (0,10) \\ t = 8 \in (0,10) \end{cases} \\ 95 - \dfrac{250}{t} = 50 \implies \cancel{t = 5.55} \notin (10,+\infty) \end{cases}$$

$$N(t) = 75 \implies \begin{cases} t^2 - 8t + 50 = 75 \implies t^2 - 8t - 25 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{t = -2.4} \notin (0,10) \\ \cancel{t = 10.4} \notin (0,10) \end{cases} \\ 95 - \dfrac{250}{t} = 75 \implies t = 12.5 \in (10,+\infty) \end{cases}$$

Y si tenemos en cuenta la monotonía de la función $N(t)$ llegamos a la conclusión de que el número de aves estará entre 5000 y 7500 entre los años 8 y 12.5.

$\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(95 - \dfrac{250}{t}\right) = 95 \implies$ 9500 aves con el paso del tiempo.

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

a) (1.33 puntos) *Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.*

b) *(2 puntos) Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

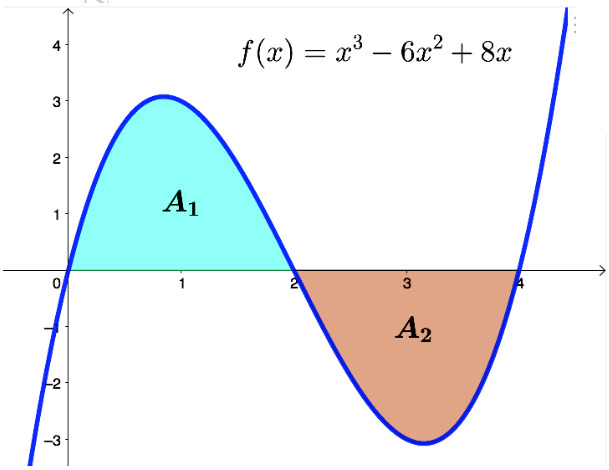
$$f(x) = x^3 - ax^2 + 8x \quad \& \quad f'(x) = 3x^2 - 2ax + 8 \quad \& \quad f''(x) = 6x - 2a$$

a)

a) P.I. en $x = 2 \implies f''(2) = 0 \implies 12 - 2a = 0 \implies \boxed{a = 6}$

b) Para $a = 6 \implies f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0 \implies x = \{0, 2, 4\}$.
Esto define dos recintos de integración $A_1 : (0, 2)$ y $A_2 : (2, 4)$.

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \Big]_0^2$$
$$= (4 - 16 + 16) - 0 = 4$$
$$A_2 = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \Big]_2^4$$
$$= (64 - 128 + 64) - (4 - 16 + 16) = -4$$
$$Area = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 8\ u^2$$



Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70 % de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30 % de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

a) (1.33 puntos) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?

c) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad? Justifique la respuesta.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} M &\equiv \text{“El habitante es menor de 30 años”} \\ F &\equiv \text{“El habitante realiza ejercicio físico con regularidad”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(M) = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \& \quad P(F) = 0.7 \quad \& \quad P(M \cap F) = 0.3$$

a) $$\begin{aligned} P(\overline{M} \cap \overline{F}) &= P(\overline{M \cup F}) = 1 - P(M \cup F) = 1 - \Big[P(M) + P(F) - P(M \cap F)\Big] \\ &= 1 - (0.4 + 0.7 - 0.3) = 0.2 \end{aligned}$$

b) $$P(M \mid \overline{F}) = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(M) - P(M \cap F)}{1 - P(F)} = \frac{0.4 - 0.3}{1 - 0.7} = \frac{0.1}{0.3} = 0.3333$$

c) $$\left.\begin{array}{l} P(M \cap F) = 0.3 \\ P(M) \cdot P(F) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} P(M \cap F) \neq P(M) \cdot P(F) \\ M \text{ y } F \text{ no son independientes} \end{array}\right.$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95 % para el consumo mensual medio es $(60.1, 69.9)$. *Según esta información:*

a) *(0.75 puntos) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz?*

b) *(0.75 puntos) ¿Cual es el error máximo cometido?*

c) *(1.83 puntos) Determine un intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de luz.*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de luz (€/mes)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=36} I.C._{95\,\%}(\mu) = (60.1, 69.9)$

$\overline{x} = \dfrac{60.1 + 69.9}{2} \implies \boxed{\overline{x} = 65}$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=36} I.C._{95\,\%}(\mu) = (60.1, 69.9)$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = \dfrac{69.9 - 60.1}{2} \implies \boxed{E = 4.9}$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 4.9 = 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{36}} \implies \sigma = 15$

c) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{n=36} \overline{x} = 65 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{36}} = 4.11$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (60.89; 69.11)}$