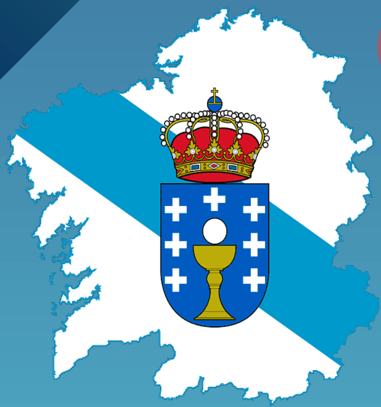
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Para dos matrices A y B se verifica que:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

a) (1.5 puntos) Calcule las matrices A y B.

b) (1.83 puntos) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) $A \cdot X - B = X \Longrightarrow A \cdot X - X = B \Longrightarrow (A - I) \cdot X = B$

$$\Longrightarrow \underbrace{(A - I)^{-1} \cdot (A - I)}_{I} \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B \Longrightarrow \boxed{X = (A - I)^{-1} \cdot B}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A - I| = 3$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €.

a) (1 punto) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) (1.5 puntos) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) (0.83 puntos) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

	Motor de moto	Motor de coche	Restricción
Trabajo manual (min)	60	45	$\leq 120 \cdot 60$
Trabajo de máquina (min)	20	40	$\leq 90 \cdot 60$
Beneficios (€/ud)	1500	2000	

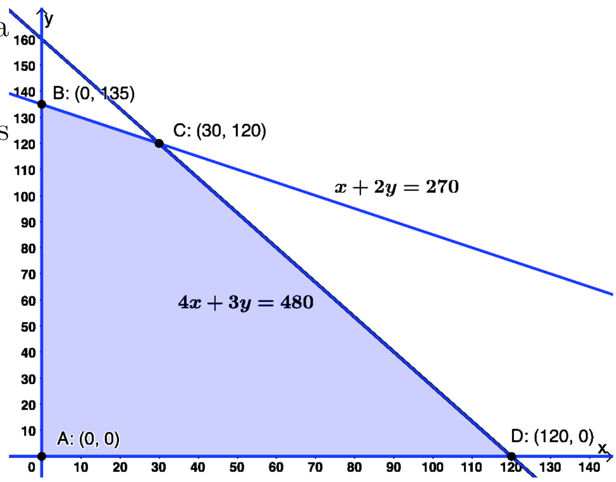
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de motores de moto"
  $y \equiv$ "Nº de motores de coche"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 60x + 45y \leq 7200 \\ ② \ x + 2y \leq 270 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 4x + 3y \leq 480 & \to (0, 160) \quad \& \quad (120, 0) \\ ② \ 9x + 8y \leq 1080 & \to (0, 135) \quad \& \quad (120, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 1500x + 2000y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	135	270000
C	30	120	285000
D	120	0	180000

El *beneficio máximo* es de 285000 €, ensamblando 30 motores de moto y 120 de coche.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12 \quad , t \text{ es el tiempo en años y } 1 \leq t \leq 6$$

a) *(1 punto) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?*

b) *(1.75 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.*

c) *(0.58 puntos) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $C'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 0 \implies t = \{2, 5\}$

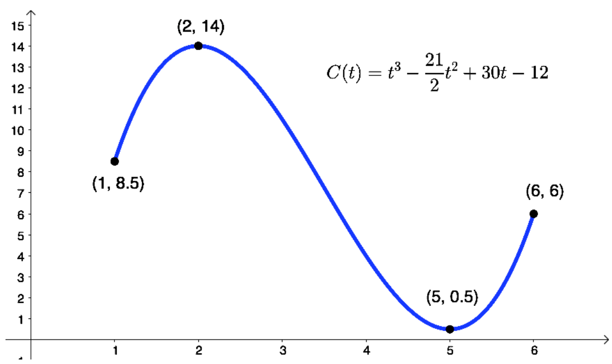
	$(1,2)$	$(2,5)$	$(5,6)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El coste máximo estará en el máximo relativo $t = 2$ o en el extremo del intervalo de definición $t = 6$. Como $C(2) = 14$ y $C(6) = 6$, el *coste máximo* se alcanza el segundo año y asciende a 1400000 €.

b) El coste de la empresa es *creciente* en $(1,2) \cup (5,6)$ y *decreciente* en $(2,5)$.

El coste mínimo se alcanzará al comienzo del ciclo $t = 1$ o en el mínimo relativo $t = 5$. Como $C(1) = 8.5$ y $C(5) = 0.5$, el *coste mínimo* será de 50000 € en el quinto año.

c) Los costes al inicio del periodo son $C(1) = 8.5 \implies$ 850000 € y al final $C(6) = 6 \implies$ 600000 €.



Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & , \text{si } x \leq 1 \\ 2x-a & , \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (0.58 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) (0.75 puntos) Para $a = 2$ calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntela.

c) (1 punto) Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- `Continuidad en` $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-x^2+1) = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x-a) = 2-a$
  - $f(1) = -1^2+1 = 0$

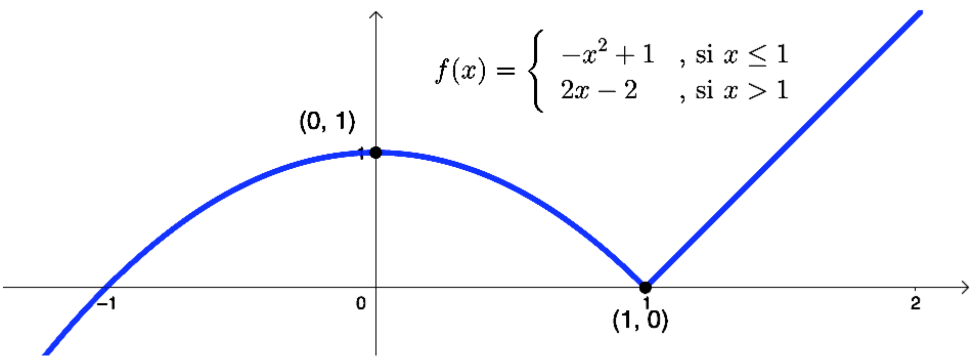
$f(x)$ continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \xRightarrow{2-a=0} \boxed{a = 2}$

b) Para $a = 2 \implies f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & , \text{si } x \leq 1 \\ 2x-2 & , \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x = 0 \implies x = 0 \ \in (-\infty, 1] \\ 2 = 0 \text{ Imposible!} \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un *máximo relativo* en $(0, 1)$ y, como para $a = 2$ la función es continua en $x = 1$, tiene un *mínimo relativo* en $(1, 0)$.



c) $Area = \int_0^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^2 (2x-2)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x\Big]_0^1 + x^2 - 2x\Big]_1^2$

$$= \left(-\frac{1}{3}+1\right) - 0 + (4-4) - (1-2) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \simeq 1.67\ u^2$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Un estudio revela que el 70 % de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60 % sigue la serie B y el 30 % sólo sigue la serie A.

a) (1.33 puntos) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?

b) (1 punto) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?

c) (1 punto) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie de televisión A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie de televisión B?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El espectador sigue la serie } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“El espectador sigue la serie } B\text{”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.7 \quad \& \quad P(B) = 0.6 \quad \& \quad P(A \cap \overline{B}) = 0.3$$

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \implies 0.3 = 0.7 - P(A \cap B) \implies \boxed{P(A \cap B) = 0.4}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.4 \implies \boxed{P(A \cup B) = 0.9}$

c) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.4}{0.7} \implies \boxed{P(B \mid A) = 0.5714}$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 *años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al* 90 % *para la media de edad obtenido es* $(39.25, 44.75)$,

a) (2 puntos) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?

b) (0.75 puntos) ¿Cuánto vale la media muestral?

c) (0.58 puntos) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95 %*?*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Edad de los trabajadores (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=?} I.C._{90\,\%} = (39.25, 44.75)$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = \dfrac{44.75 - 39.25}{2} = 2.75$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{n}} = 2.75 \implies n = \left(1.645 \cdot \dfrac{10}{2.75}\right)^2 = 35.78 \implies \boxed{n = 36}$

b) $\overline{x} = \dfrac{39.25 + 44.75}{2} \implies \boxed{\overline{x} = 42 \text{ años}}$

c) $E = ? \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{36}} \implies \boxed{E = 3.267 \text{ años}}$