MATEMATICAS CCSS

INTERVALOS DE CONFIANZA

https://aprendeconmigomelon.com

4 de abril de 2023

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Inferencia estadística, organizados en 3 grupos: Teorema central del límite, Intervalos de confianza para la media poblacional y para la proporción. Casi de 140 ejercicios de EVAU de varias Comunidades. Espero que te guste melón!

Índice general

Teorema Central del Límite

Comunidad de Madrid

Ejercicio 1

Se supone que el peso de los niños recién nacidos en una cierta región es una variable aleatoria con distribución normal de media 3,25 kg y desviación típica 0,8 kg. Se elige aleatoriamente una muestra de 64 niños recién nacidos en esa región. Sea $\overline{X}$ la media muestral de los pesos observados.

a) *¿Cuáles son la media y la desviación típica de $\overline{X}$?*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3,3 kg y 3,5 kg?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2009 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los niños recién nacidos (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(3{,}25, 0{,}8)$$

a) $X : \mathcal{N}(3{,}25, 0{,}8) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3{,}25, \dfrac{0{,}8}{\sqrt{64}}\right) \approx \mathcal{N}(3{,}25, 0{,}1)$

b) $$\begin{aligned} P(3{,}3 < \overline{X} < 3{,}5) &= P\left(\frac{3{,}3 - 3{,}25}{0{,}1} < Z < \frac{3{,}5 - 3{,}25}{0{,}1}\right) = P(0{,}5 < Z < 2{,}5) \\ &= P(Z < 2{,}5) - P(Z < 0{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuántos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2010 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración de la bombilla (horas)”}$$
$$X : \mathcal{N}(900, 80) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N} : \left(900, \frac{80}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(900, 8)$$

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 910) &= P\left(Z > \frac{910 - 900}{8}\right) = P(Z > 1{,}25) = 1 - P(Z < 1{,}25) \\ &= 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056 \end{aligned}$$

Como tenemos 1000 lotes y la probabilidad de que la duración media de un lote sea superior a las 910 horas es de 0,1006, tenemos que el número de lotes que lo superen será de $1000 \cdot 0{,}1056 = 105{,}6 \simeq 105$ lotes.

Ejercicio 3

La temperatura corporal de cierta especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media 40,5°C y desviación típica 4,9°C. Se elige una uestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea $\overline{X}$ la media muestral de las temperaturas observadas.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre 39,9°C y 41,1°C?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2010 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Temperatura del ave (°}C\text{)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(40{,}5, 4{,}9)$$

a) $X : \mathcal{N}(40{,}5, 4{,}9) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(40{,}5, \dfrac{4{,}9}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(40{,}5, 0{,}49)$

b)
$$\begin{aligned} P(39{,}9 < \overline{X} < 41{,}1) &= P\left(\frac{39{,}9 - 40{,}5}{0{,}49} < Z < \frac{41{,}1 - 40{,}5}{0{,}49}\right) \\ &= P(-1{,}22 < Z < 1{,}22) = P(Z < 1{,}22) - P(Z < -1{,}22) \\ &= P(Z < 1{,}22) - P(Z > 1{,}22) = P(Z < 1{,}22) - \Big[1 - P(Z < 1{,}22)\Big] \\ &= 2 \cdot P(Z < 1{,}22) - 1 = 2 \cdot 0{,}8888 - 1 = 0{,}7776 \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

a) Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.

b) Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Presión diastólica (mm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(98, 15) \xrightarrow{n=9} \overline{X} : \mathcal{N}\left(98, \frac{15}{\sqrt{9}}\right) = \mathcal{N}(98, 5)$$

a) $$P(\overline{X} \geq 100) = P\left(Z \geq \frac{100-98}{5}\right) = P(Z \geq 0{,}4) = 1 - P(Z < 0{,}4)$$
$$= 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$$

b) $$P\left(\overline{X} < 104 \mid \overline{X} > 100\right) = \frac{P\left((\overline{X} < 104) \cap (\overline{X} > 100)\right)}{P(\overline{X} > 100)} \overset{\odot}{=} \frac{0{,}2295}{0{,}3446} = 0{,}6659$$

$$\odot\ P\left((\overline{X} < 104) \cap (\overline{X} > 100)\right) = P(100 < \overline{X} < 104)$$
$$= P\left(\frac{100-98}{5} < Z < \frac{104-98}{5}\right)$$
$$= P(0{,}4 < Z < 1{,}2) = P(Z < 1{,}2) - P(Z < 0{,}4)$$
$$= 0{,}8849 - 0{,}6554 = 0{,}2295$$

Ejercicio 5

Se supone que la estatura de los individuos de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media 170 cm y desviación típica 4 cm.

a) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple de 16 individuos. Calcúlese $P(\overline{X} < 167)$.

b) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple y resulta que $P(\overline{X} > 172) = 0{,}0062$. Determínese el tamaño de la muestra extraída.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estatura de los individuos (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(170, 4)$$

a) $X : \mathcal{N}(170, 4) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}\left(170, \dfrac{4}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}(170, 1)$

$$P(\overline{X} < 167) = P\left(Z < \frac{167 - 170}{1}\right) = P(Z < -3) = P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3)$$
$$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

b) $P(\overline{X} > 172) = 1 - P(\overline{X} < 172) = 0{,}0062 \Longrightarrow P(\overline{X} < 172) = 0{,}9938$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}}\right) = 0{,}9938 \xrightarrow{Tabla} 2{,}5 = \frac{2}{4/\sqrt{n}} \overset{n}{\Rightarrow}= \left(\frac{4 \cdot 2{,}5}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{n = 25}$$

Ejercicio 6

Se supone que la tensión de un tipo de línea eléctrica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 100$ V y desviación típica $\sigma = 10$ V. ¿Cuál es la distribución de la tensión media de cuatro líneas eléctricas de ese tipo, tomadas al azar y con independencia?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2012 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tensión de la línea eléctrica (V)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(100, 10)$$
$$X : \mathcal{N}(100, 10) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(100; \frac{10}{\sqrt{4}}\right) = \mathcal{N}(100, 5)$$

Ejercicio 7

El peso de las lubinas de un año producidas en una piscifactoría se puede aproximar por una distribución normal con media 600 *gramos y desviación típica* 100 *gramos. Las lubinas de un año están en un recinto aislado.*

a) Considérese una muestra aleatoria simple de 20 *lubinas de un año en la piscifactoría, calcúlese la probabilidad de que su peso medio sea superior a* 650 *gramos.*

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 *lubinas de un año. Hállese el nivel de confianza con el que se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la media:* $(580{,}4; 619{,}6)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las lubinas (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(600, 100)$$

a) $X : \mathcal{N}(600, 100) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(600, \dfrac{100}{\sqrt{20}}\right) \approx \mathcal{N}(600, 22{,}36)$

$$P(\overline{X} > 650) = P\left(Z > \frac{650 - 600}{22{,}36}\right) = P(Z > 2{,}24) = 1 - P(Z < 2{,}24)$$
$$= 1 - 0{,}9875 = 0{,}0125$$

b) $X : \mathcal{N}(600, 100) \xrightarrow{n=100} I.C.(580{,}4; 619{,}6)$

$$E = \frac{619{,}6 - 580{,}4}{2} = 19{,}6 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{100}{\sqrt{100}} = 19{,}6 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}95}$$

Intervalo de confianza para μ

Andalucia

Ejercicio 8

El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8,1 días.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ? con un error inferior a 1 día y un nivel de confianza del 92 %.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque D)

Solución.

$$X \equiv \text{“Permanencia en el hospital (días)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 8{,}1$

$$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies \alpha/2 = 0{,}015 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0{,}651$$

$$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (7{,}449; 8{,}751)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}92$

$$1 - \alpha = 0{,}92 \implies \alpha = 0{,}08 \implies \alpha/2 = 0{,}04 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}75$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}75 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1{,}75 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 27{,}56 \implies \boxed{n = 28}$$

Ejercicio 9

El peso de los paquetes de arroz de una marca comercial concreta sigue una ley Normal de media 1000 g y varianza 256 g^2.

a) *Calcule la probabilidad de que el peso medio de las muestras de tamaño 64 sea menor que 996 g.*

b) *Tras varias denuncias presentas por falta de peso en los citados paquetes, una organización de consumidores ha procedido a tomar una muestra de 64 paquetes, resultando que la suma de los pesos ha sido de 63744 g. Halle un intervalo de confianza al 90 % para estimar el peso medio real de los paquetes de arroz de esa marca.*

c) *A la vista del intervalo obtenido y teniendo en cuenta que el peso que marca el paquete es de 1000 g, ¿cree que la denuncia tiene base?*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los paquetes de arroz (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(1000, \sqrt{256}) = \mathcal{N}(1000, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(1000, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1000, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(1000, 2)$

$$P(\overline{X} < 996) = P\left(z < \frac{996 - 1000}{2}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

b) $X : \mathcal{N}(1000, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = \dfrac{63744}{64} = 996$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}} = 3{,}29$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (992{,}71; 999{,}29)}$$

c) Se entiende que la denuncia tiene base suficiente pues en el 90 % de las muestras de paquetes de arroz obtenidas el peso medio será inferior a los 1000 g que marca el paquete.

Ejercicio 10

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

b) Para estimar la media poblacional de la variable X, se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

11,8 10 9,8 12 9,7 10,8 9,6 11,3 10,4 12,2 9,1 10,5

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1,2.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque D - Extraordinario)

Solución.

a) $X:\mathcal{N}(\mu,4) \xrightarrow{n=12} \overline{X}:\mathcal{N}\left(\mu,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\mathcal{N}\left(\mu,\dfrac{4}{\sqrt{12}}\right)=N\left(\mu,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=N(\mu,1{,}1547)$

b) $X:\mathcal{N}(\mu,9) \xrightarrow{n=12} \overline{x}=\frac{11{,}8+10+9{,}8+12+9{,}7+10{,}8+9{,}6+11{,}3+10{,}4+12{,}2+9{,}1+10{,}5}{12}=10{,}6$

$1-\alpha=0{,}97 \implies \alpha=0{,}03 \implies \alpha/2=0{,}015 \implies 1-\alpha/2=0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2}=2{,}17$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2{,}17\cdot\dfrac{4}{\sqrt{12}}=2{,}506$

$I.C._{97\,\%}(\mu)=(\overline{x}-E;\overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu)=(8{,}094;13{,}106)}$

c) $n=?$ & $E<1{,}2$ & $1-\alpha=0{,}97$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2{,}17\cdot\dfrac{4}{\sqrt{n}}<1{,}2 \implies n>\left(2{,}17\cdot\dfrac{4}{1{,}2}\right)^2=52{,}32 \implies \boxed{n=53}$

Ejercicio 11

La estatura de las mujeres de una población sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 7 cm.

a) *Se toma una muestra aleatoria de 300 mujeres de esta población, que da una estatura media de 168 cm. Construya un intervalo de confianza al 97 % para estimar la estatura media de las mujeres de esta población.*

b) *Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esta población para que, con un nivel de confianza del 94 %, el error máximo cometido al estimar la estatura media de las mujeres de esa población sea inferior a 1,2 cm.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque D - Reserva)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estatura de las mujeres (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 7)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 7) \xrightarrow{n=300} \overline{x} = 168$

$$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies \alpha/2 = 0{,}015 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \frac{7}{\sqrt{300}} = 0{,}877$$

$$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (167{,}123; 168{,}877)}$$

b) $n = ?$ & $E < 1{,}2$ & $1 - \alpha = 0{,}94$

$$1 - \alpha = 0{,}94 \implies \alpha = 0{,}06 \implies \alpha/2 = 0{,}03 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}97 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}88$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}88 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} < 1{,}2 \implies n > \left(1{,}88 \cdot \frac{7}{1{,}2}\right)^2 = 120{,}27 \implies \boxed{n = 121}$$

Ejercicio 12

El tiempo, en horas, que los alumnos de un instituto dedican a estudiar para los exámenes finales, se distribuye siguiendo una ley Normal de media desconocida y varianza 81. Se toma una muestra aleatoria de 16 alumnos de dicho instituto, obteniéndose los siguientes tiempos:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 32 51 49 40

a) Obtenga un intervalo, con un 95 % de confianza, para estimar el tiempo medio de estudio de los alumnos de ese instituto.

b) Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar, para estimar el tiempo medio de estudio de esos alumnos con un error inferior a 2 horas y un nivel de confianza del 98 %.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo dedicado al estudio (h)”} \xrightarrow{\sigma^2=81 \Longrightarrow \sigma=9} X : \mathcal{N}(\mu, 9)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=116} \overline{x} = \frac{30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+32+51+49+40}{16} = 40$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{16}} = 4{,}41$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (35{,}59; 44{,}41)}$

b) $n = ?$ & $E < 2$ & $1 - \alpha = 0{,}98$

$1 - \alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies \alpha/2 = 0{,}01 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2{,}325 \cdot \dfrac{9}{2}\right)^2 = 109{,}46 \implies \boxed{n = 110}$

Ejercicio 13

La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica 15MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800MPa.

a) Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92 %, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2MPa?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D)

Solución.

$$X \equiv \text{“Resistencia a la ruptura (MPa)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 15)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 800$

$1 - \alpha = 0{,}92 \implies \alpha = 0{,}08 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}04 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}75$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}75 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{100}} = 2{,}625$

$I.C._{92\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{92\,\%}(\mu) = (797{,}375; 802{,}625)}$

b) $n =?$ & $E < 2$ & $1 - \alpha = 0{,}92 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}75$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}75 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(1{,}75 \cdot \dfrac{15}{2}\right)^2 = 172{,}26 \implies \boxed{n = 173}$

Ejercicio 14

El consumo de energía eléctrica mensual por vivienda medido en kilovatios hora (kWh) sigue una distribución Normal con varianza 4225 (kWh^2).

a) Se toma una muestra aleatoria de 100 viviendas obteniéndose un consumo total de 26830 kWh. Calcule un intervalo de confianza al $92\,\%$ para estimar el consumo medio poblacional.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar el consumo medio de energía eléctrica mensual por vivienda, con un error máximo de 5 kWh y con un nivel de confianza del $98\,\%$.

c) Tras una campaña para incentivar el ahorro energético se toma una nueva muestra y el intervalo de confianza para el consumo medio que se obtiene es $(224{,}08; 255{,}92)$. Calcule la media del consumo de energía eléctrica mensual por vivienda para dicha muestra.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Reserva)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo energía eléctrica (kWh)”} \xrightarrow{\sigma^2=4225} X : \mathcal{N}(\mu, 65)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 65) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{26830}{100} = 268{,}3$

$$1-\alpha = 0{,}92 \implies \alpha = 0{,}08 \implies \alpha/2 = 0{,}04 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}75$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}75 \cdot \frac{65}{\sqrt{100}} = 11{,}375$$

$$I.C._{92\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{92\,\%}(\mu) = (256{,}925; 279{,}765)}$$

b) $n = ?$ & $E < 5$ & $1-\alpha = 0{,}98$

$$1-\alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies \alpha/2 = 0{,}01 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{65}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(2{,}325 \cdot \frac{65}{5}\right)^2 = 913{,}55 \implies \boxed{n = 914}$$

c) $\mu = \dfrac{224{,}08 + 255{,}92}{2} = 240\ kWh$

Ejercicio 15

El peso en gramos de las tortugas terrestres de una reserva natural sigue una ley Normal de varianza 121 g^2. Para estimar el peso medio de las tortugas de la reserva, se toma una muestra de 10 tortugas, obteniéndose los siguientes datos:

980 1002 950 985 1100 1085 895 1000 912 1006

a) Halle un intervalo de confianza para el peso medio de las tortugas con un nivel de confianza del 97 %.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar con un nivel de confianza del 94 % que el error máximo cometido sea de 5 gramos?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las tortugas (g)”} \xrightarrow{\sigma^2=121} X : \mathcal{N}(\mu, 11)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 11) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{980+1002+950+985+1100+1085+895+1000+912+1006}{10} = 991{,}5$

$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies \alpha/2 = 0{,}015 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{11}{\sqrt{10}} = 7{,}55$

$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (983{,}95; 999{,}05)}$

b) $n = ?$ & $E < 5$ & $1 - \alpha = 0{,}94$

$1 - \alpha = 0{,}94 \implies \alpha = 0{,}06 \implies \alpha/2 = 0{,}03 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}97 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}88$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}88 \cdot \dfrac{11}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(1{,}88 \cdot \dfrac{11}{5}\right)^2 = 17{,}11 \implies \boxed{n = 18}$

Ejercicio 16

La vida útil de un determinado modelo de teléfono móvil (en meses) se distribuye según una ley Normal de varianza 9,61 *meses*^{2}. *En una muestra de* 10 *teléfonos, la vida útil de los mismos ha sido:*

30,6 30 31,3 29,7 32,3 32 32,8 31,5 31,2 30,5

a) Determine un intervalo de confianza para estimar la vida útil de este modelo de teléfono móvil con un nivel de confianza del 97 %.

b) Determine el tamaño mínimo muestral para que, con el mismo nivel de confianza, el error que se comete al estimar la duración media de la vida útil de este modelo de teléfono móvil sea inferior a 0,15 *meses.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Vida útil del teléfono móvil (meses)”} \xrightarrow{\sigma^2=9{,}61} X : \mathcal{N}(\mu, 3{,}1)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3{,}1) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{30{,}6+30+31{,}3+29{,}7+32{,}3+32+32{,}8+31{,}5+31{,}2+30{,}5}{10} = 31{,}19$

$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies \alpha/2 = 0{,}015 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$

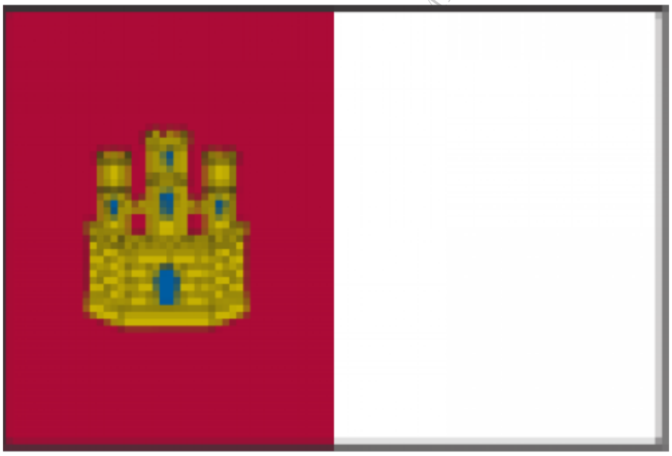
$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{3{,}1}{\sqrt{10}} = 2{,}127$

$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (29{,}06; 33{,}32)}$

b) $n = ?$ & $E < 0{,}15$ & $1 - \alpha = 0{,}97$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{3{,}1}{\sqrt{n}} < 0{,}15 \implies n > \left(2{,}17 \cdot \dfrac{3{,}1}{0{,}15}\right)^2 = 2011{,}22 \Rightarrow \boxed{n = 2012}$

Castilla-La Mancha



Ejercicio 17

El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95 %

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra.

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Sección 2 - Bloque 1)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ pacientes atendidos en el C.S. a la semana”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 50)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 50) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 322$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{25}} = 19{,}6$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (302{,}4; 341{,}6)}$

b) Si aumentamos el tamaño de muestra n, el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se reducirá y por tanto la amplitud del Intervalo de Confianza también lo hará.

c) Si aumentamos el nivel de confianza al 99 % la amplitud del Intervalo de Confianza será mayor pues aumentará $z_{\alpha/2}$, y por tanto el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Como 330 está en el $I.C._{95\,\%}(\mu)$, también lo estará en el $I.C._{99\,\%}(\mu)$, por lo que podemos dar por buena la afirmación del enunciado.

Ejercicio 18

El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros^2. Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído han sido 4, 8, 2, 9, 3, 7, 5, 6, 7 y 4 libros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97 %

b) Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza.

c) Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianz del 95,96 %

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Sección 3 - Bloque 1)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de libros leido por un estudiante”} \xrightarrow[\sigma=\sqrt{6}]{\sigma^2=6} X : \mathcal{N}(\mu, \sqrt{6})$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, \sqrt{6}) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \dfrac{4+8+2+9+3+7+5+6+7+4}{10} = 5{,}5$

$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies {}^{\alpha}\!/_2 = 0{,}015 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_2 = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = 1{,}68$

$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (3{,}82; 7{,}18)}$

b) Manteniendo el nivel de confianza, si queremos aumentar la amplitud del Intervalo de Confianza tendremos que aumentar el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, cosa que podríamos conseguir reduciendo el tamaño de la muestra n.

c) $n = 64 \quad \& \quad 1 - \alpha = 95{,}96$

$1-\alpha = 0{,}9596 \implies \alpha = 0{,}0404 \implies {}^{\alpha}\!/_2 = 0{,}0202 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_2 = 0{,}9798 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}05$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}05 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{64}} = 0{,}6277$

Luego el máximo error sería de 0,6277 libros.

Ejercicio 19

El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6{,}4$ *minutos. Se ha tomado una muestra de* 9 *personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido* 12, 11, 10, 9, 7, 12, 11, 8 *y* 10 *minutos.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97 %

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 *minutos.*

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Sección 2 - Bloque 1)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo empleado en resolver un problema (min.)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 6{,}4)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 6{,}4) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = \dfrac{12+11+10+9+7+12+11+8+10}{9} = 10$

$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}015 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{6{,}4}{\sqrt{9}} = 4{,}63$

$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (5{,}37; 14{,}63)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 3 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}97$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{6{,}4}{\sqrt{n}} < 3 \implies n > \left(2{,}17 \cdot \dfrac{6{,}4}{3}\right)^2 = 21{,}43 \implies \boxed{n = 22}$

Ejercicio 20

Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2,3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0{,}81$ bares^2:

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si, para el mismo nivel de confianza, disminuimos el tamaño de muestra.

c) La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Sección 3 - Bloque 1)

Solución.

$$X \equiv \text{“Presión de inflado (bares)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sqrt{0{,}81}) = \mathcal{N}(\mu, 0{,}9)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}9) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 2{,}3$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{100}} = 0{,}176$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (2{,}124; 2{,}476)}$$

b) Si disminuimos el tamaño de la muestra n, el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ aumentará, con lo que la amplitud del intervalo de confianza $2E$ tambén se verá aumentada.

c) Si disminuye el nivel de confianza también lo hará $z_{\alpha/2}$ y por tanto también lo hará el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto la amplitud del intervalo de confianza. Como 2 no está en el $I.C._{95\,\%}(\mu)$, tampoco estará en el $I.C._{90\,\%}(\mu)$, por lo que la afirmación del enunciado no es cierta.

Comunidad de Madrid

Ejercicio 21

Se han elegido al azar 10 televisores de un taller de electrónica y se ha anotado el número de horas que se han necesitado para su reparación. Los resultados han sido:

$$7 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 6$$

Se supone que el número de horas de reparación de este tipo de televisores es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 horas.

a) *Determínese un intervalo de confianza del 90 % para el tiempo medio de reparación.*

b) *¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea 0,5 horas con el mismo nivel de confianza?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2009 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de reparación de los electrodomésticos (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}5) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \dfrac{7+5+8+2+4+7+4+1+6+6}{10} = 5$

$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{1{,}5}{\sqrt{10}} = 0{,}78$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (4{,}22; 5{,}78)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}9$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{1{,}5}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \dfrac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2 = 24{,}35 \implies \boxed{n = 25}$

Ejercicio 22

Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una determinada familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 *euros. Se ha elegido una muestra aleatoria de* 81 *familias, obteniéndose un gasto medio de* 320 *euros.*

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 *euros con un grado de confianza del* 95 %*?*

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2009 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto mensual dedicado al ocio (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 55)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 55) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 320 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$P\Big(\big|\overline{X}-\mu\big| < 10\Big) = P\Big(-10 < \overline{X}-\mu < 10\Big) = P\left(\frac{-10}{55/\sqrt{81}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{10}{55/\sqrt{81}}\right)$$

$$= P(-1{,}64 < Z < 1{,}64) = P(Z < 1{,}64) - P(Z < -1{,}64)$$

$$= P(Z < 1{,}64) - P(Z > 1{,}64) = P(Z < 1{,}64) - \Big[1 - P(Z < 1{,}64)\Big]$$

$$= 2 \cdot P(Z < 1{,}64) - 1 = 2 \cdot 0{,}9495 - 1 = 0{,}899 < 0{,}95$$

, por lo que no podemos asegurar que se cumpla la tesis del enunciado

Otra forma:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{55}{\sqrt{81}} = 10 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}64 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}9495$$

$$1 - \alpha/2 = 0{,}9495 \implies \alpha/2 = 0{,}0505 \implies \alpha = 0{,}101 \implies 1-\alpha = 0{,}899 < 0{,}95$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 10 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{55}{\sqrt{n}} < 10 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{55}{10}\right)^2 = 116{,}21 \implies \boxed{n = 117}$$

Ejercicio 23

Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtiene las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

9,1 4,9 7,3 2,8 5,5 6,0 3,7 8,6 4,5 7,6

a) *Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95 %.*

b) *Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2009 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Agua recogida en la estación meteorológica (litros)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{9{,}1+4{,}9+7{,}3+2{,}8+5{,}5+6{,}0+3{,}7+8{,}6+4{,}5+7{,}6}{10} = 6 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{10}} = 1{,}24$

$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (4{,}76; 7{,}24)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}98$

$1-\alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}01 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(2{,}325 \cdot \dfrac{2}{1}\right)^2 = 21{,}62 \implies \boxed{n = 22}$

Ejercicio 24

Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 *minutos. Se desea estimar la media del tiempp de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a* 0,5 *minutos y con un grado de confianza del* 95 %

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 *minutos y se elige una muestra aleatoria simple de* 16 *usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre* 4 *y* 5 *minutos?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2009 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de la conversación telefónica (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}32)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 0{,}5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1{,}32}{\sqrt{n}} \leq 0{,}5 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{1{,}32}{0{,}5}\right)^2 = 26{,}77 \implies \boxed{n = 27}$$

b) $X : \mathcal{N}(4{,}36, 1{,}32) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}\left(4{,}36, \dfrac{1{,}32}{\sqrt{16}}\right) \approx \mathcal{N}(4{,}36, 0{,}33)$

$$\begin{aligned} P(4 < \overline{X} < 5) &= P\left(\frac{4-4{,}36}{0{,}33} < Z < \frac{5-4{,}36}{0{,}33}\right) = P(-1{,}09 < Z < 1{,}94) \\ &= P(Z < 1{,}94) - P(Z < -1{,}09) = P(Z < 1{,}94) - P(Z > 1{,}09) \\ &= P(Z < 1{,}94) - \Big[1 - P(Z < 1{,}09)\Big] = 0{,}9738 - (1 - 0{,}8621) = 0{,}8359 \end{aligned}$$

Ejercicio 25

Se supone que la estancia (en días) de un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) *Determínese un intervalo de confiaza del 95 % para la estancia media de un paciente en dicho hospital.*

b) *¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2009 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estancia en hospital (días)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 9)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 8 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{20}} = 3{,}94$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (4{,}06; 11{,}94)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \le 4 \implies E \le 2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \dfrac{9}{2}\right)^2 = 77{,}79 \implies \boxed{n = 78}$

Ejercicio 26

Se supone el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisor, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 Mh. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de 19,84 Mh de vida útil.

a) *Hállese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo de vida útil medio de los televisores de dicho modelo.*

b) *Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a 0,2 Mh con probabilidad mayor o igual que 0,95*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2010 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de vida útil del TV (Mh)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}5) \xrightarrow{n=4} \overline{x} = 19{,}84$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{4}} = 0{,}49$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (19{,}35; 20{,}33)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{n}} < 0{,}2 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{0{,}2}\right)^2 = 24{,}01 \implies \boxed{n = 25}$

Ejercicio 27

Se supone que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente de una cierta empresa se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 *minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de* 100 *llamadas y se obtiene un tiempo medio de espera igual a* 6 *minutos.*

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % *para el tiempo medio de espera de una llamada a dicha línea de atención al cliente.*

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total igual o inferior a 1 *minuto?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2010 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de espera en una llamada (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 6$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}098$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (5{,}902; 6{,}098)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 1 \implies E \leq 0{,}5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{0{,}5}\right)^2 = 3{,}82 \implies \boxed{n = 4}$

Ejercicio 28

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320*. Se toma una muestra aleatoria simple de* 36 *elementos.*

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50*.*

b) Determínese el intervalo de confianza del 95 % *para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a* 4820*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2010 - Opción A)

Solución.

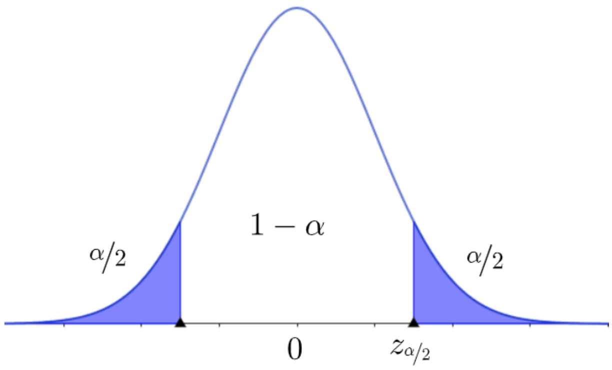
$$X : \mathcal{N}(\mu, 320) \xrightarrow{n=36}$$

a) Que la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución es mayor que 50 equivale a calcular el valor de α, para un intervalo de confianza con un error $E = 50$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{320}{\sqrt{36}} = 50 \implies z_{\alpha/2} = \frac{50 \cdot \sqrt{36}}{320} = 0{,}9375$$

$$z_{\alpha/2} = 0{,}9375 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}8264 \implies \alpha/2 = 0{,}1736 \implies \alpha = 0{,}3472$$

$$\implies P(\left|\mu - \overline{X}\right| > 50) = 0{,}3472$$



b) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=36} \overline{x} = 4820$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{320}{\sqrt{36}} = 104{,}53$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (4715{,}47; 4924{,}53)}$$

Ejercicio 29

Para estimar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5*, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño* 100*, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza* $(173{,}42; 175{,}56)$ *para dicha media poblacional.*

a) Calcúlese la media de la muestra seleccionada.

b) Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2010 - Opción B)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=100} I.C.(173{,}42; 175{,}56)$$

a) $E = \dfrac{175{,}56 - 173{,}42}{2} \implies \boxed{E = 1{,}07}$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{100}} = 1{,}07 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}14$

$z_{\alpha/2} = 1{,}14 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}9838 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0162 \Rightarrow \alpha = 0{,}0324 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}9676}$

Ejercicio 30

Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de la población (medido en miligramos por decilitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ *desconocida y desviación típica* 35 *mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y* μ *es menor que* 20 *mg/dl con una probabilidad mayor o igual a* 0,98*?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nivel de glucosa en sangre (mg/dl)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 35)$$

$n =? \qquad \& \qquad E < 20 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}98$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies \alpha/2 = 0{,}01 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} < 20 \implies n > \left(2{,}325 \cdot \frac{35}{20}\right)^2 = 16{,}55 \implies \boxed{n = 17}$$

Ejercicio 31

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 y se obtiene una media muestral igual a 12.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para estimar la media de la variable aleatoria.

b) Determínese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 0,1 con un nivel de confianza de al menos el 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 12$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{25}} = 0{,}658$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (11{,}342; 12{,}658}$

b) $n = ?$ & $E < 0{,}1$ & $1 - \alpha = 0{,}95$

$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \dfrac{2}{0{,}1}\right)^2 = 1536{,}64 \implies \boxed{n = 1537}$

Ejercicio 32

Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 15 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

a) *Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2011 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo medio dedicado a ver TV (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{n=400} \overline{x} = 3 \cdot 60 = 180$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{400}} = 1{,}47$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (178{,}53; 181{,}47)}$

b) $n = ?$ & $E \leq 3$ & $1 - \alpha = 0{,}90$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{n}} \leq 3 \implies n \geq \left(1{,}645 \cdot \dfrac{15}{3}\right)^2 = 67{,}65 \implies \boxed{n = 68}$

Ejercicio 33

Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

1,50 1,60 1,10 0,90 1,00 1,60 1,40 0,90 1,30 1,20

a) *Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y la μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2011 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Precio de un refresco (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}09)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}09) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{1{,}50+1{,}60+1{,}10+0{,}90+1{,}00+1{,}60+1{,}40+0{,}90+1{,}30+1{,}20}{10} = 1{,}25$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}09}{\sqrt{10}} = 0{,}0558$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1{,}1942; 1{,}3058)}$

b) $n = ?$ & $E \leq 0{,}1$ & $1 - \alpha = 0{,}99$

$1-\alpha = 0{,}995 \implies \alpha = 0{,}005 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}0025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}9975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}81$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{0{,}09}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1 \implies n \geq \left(2{,}575 \cdot \frac{0{,}09}{0{,}1}\right)^2 = 5{,}37 \implies \boxed{n = 6}$$

Ejercicio 34

> *Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se le hace contestar un conjunto de test y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.*
>
> *a) Para una muestra aleatoria simple de 9 test, se ha obtenido una media muestral igual a 110. Determínese un intervalo de confianza para θ al 95 %.*
>
> *b) ¿Cuál es el número mínimo de test que debería realizar la persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción B)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Coeficiente de inteligencia”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\theta, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\theta, 10) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = 110$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{9}} = 6{,}53$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (103{,}47; 116{,}53)}$

b) $n = ?$ & $E \leq 5$ & $1-\alpha = 0{,}95$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{n}} \leq 5 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \dfrac{10}{5}\right)^2 = 15{,}37 \implies \boxed{n = 16}$

Ejercicio 35

Se supone que la altura (en cm) que alcanza la espuma de un cierto detergente para lavadoras durante un lavado estándar se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1,5 cm. Una muestra aleatoria simple de 10 lavados de ese tipo ha dado las siguientes alturas de espuma:

$$7 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 2 \quad 8 \quad 6 \quad 1$$

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el valor absoluto del error máximo en la estimación sea de 0,5 cm con el mismo nivel de confianza?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de la espuma en la lavadora (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}5) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \dfrac{7+4+4+5+7+6+2+8+6+1}{10} = 5$

$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{10}} = 0{,}78$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (4{,}22; 5{,}78)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 0{,}5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}9$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{1{,}5}{\sqrt{n}} \leq 0{,}5 \implies n \geq \left(1{,}645 \cdot \dfrac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2 = 24{,}35 \implies \boxed{n = 25}$

Ejercicio 36 (2 *puntos*)

Se supone que la concentración de CO_2 en el aire de una determinada región, medida en partes por millón (ppm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 20 ppm.

a) Calcúlese el número mínimo de observaciones necesarias para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 2 ppm con un nivel de confianza mayor o igual que el 95 %.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la concentración media de CO_2 en el aire de la región si la muestra elegida contiene 121 observaciones y la concentración media muestral es igual a a 350 ppm CO_2.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2012 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Concentración de } CO_2 \text{ en el aire (ppm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{20}{2}\right)^2 = 384{,}16 \implies \boxed{n = 385}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=121} \overline{x} = 350 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{121}} = 3{,}56$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (346{,}44; 353{,}56)}$$

Ejercicio 37 (2 *puntos*)

Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día de curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

$$26 \quad 27{,}5 \quad 31 \quad 28 \quad 25{,}5 \quad 30{,}5 \quad 32 \quad 31{,}5$$

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los alumnos (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2{,}8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2{,}8) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{26 + 27{,}5 + 31 + 28 + 25{,}5 + 30{,}5 + 32 + 31{,}5}{8} = 29$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{2{,}8}{\sqrt{8}} = 1{,}628$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (27{,}372; 30{,}628)}$

b) $n =? \qquad \& \qquad E < 0{,}9 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}97$

$1 - \alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}015 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{2{,}8}{\sqrt{n}} < 0{,}9 \implies n > \left(2{,}17 \cdot \dfrac{2{,}8}{0{,}9}\right)^2 = 45{,}58 \implies \boxed{n = 46}$

Ejercicio 38 (2 *puntos*)

Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(251{,}6; 271{,}2)$ para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90 %

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto en regalos de Navidad (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 45)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 45) \xrightarrow{n=?} I.C.(251{,}6; 271{,}2) \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{271{,}2 - 251{,}6}{2} = 9{,}8 \\ E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 9{,}8 \Rightarrow n = \left(1{,}96 \cdot \frac{45}{9{,}8}\right)^2 \implies \boxed{n = 81}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 45) \xrightarrow{n=64} \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}90$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{45}{\sqrt{64}} = 9{,}253$$

Ejercicio 39 (2 *puntos*)

El consumo anual de carne en un cierto país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica 16 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 residentes y se obtiene un consumo medio de 42 kg de carne al año. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el consumo anual medio de carne en dicho país.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener la muestra para garantizar, con el mismo nivel de confianza, que el error de la estimación del consumo anual medio sea menor que 1 kg?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de carne (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 42$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{16}{\sqrt{64}} = 3{,}29$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (38{,}71; 45{,}29)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}90$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{16}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \dfrac{16}{1}\right)^2 = 692{,}74 \implies \boxed{n = 693}$

Ejercicio 40 (2 *puntos*)

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media en una muestra aleatoria simple de tamaño 100 elementos.

a) Determínese el valor de σ sabiendo que $I.C. = (125{,}2; 144,8)$ es un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcúlese la probabilidad $P(1 < \mu - \overline{X} < 4)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=100} I.C._{95\,\%}(\mu) = (125{,}2; 144,8)$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{144{,}8 - 125{,}2}{2} = 9{,}8 \\ E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 9{,}8 \implies \sigma = \frac{9{,}8 \cdot 10}{1{,}96} \implies \boxed{\sigma = 50}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=100} X : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{20}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(\mu, 2)$

$$P(1 < \overline{X} - \mu < 4) = P\left(\frac{1}{2} < \frac{\overline{X} - \mu}{2} < \frac{4}{2}\right) = P(0{,}5 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < 0{,}5) = 0{,}9772 - 0{,}6915 = 0{,}2857$$

Ejercicio 41

La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2012 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración de los neumáticos (km)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3000) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 48000$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{3000}{\sqrt{100}} = 493{,}5$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (47506{,}5; 48493{,}3)}$$

b) $n = ?$ & $E < 1000$ & $1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3000}{\sqrt{n}} < 1000 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{3000}{1000}\right)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

Ejercicio 42

El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.

b) Determínesse un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ, si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

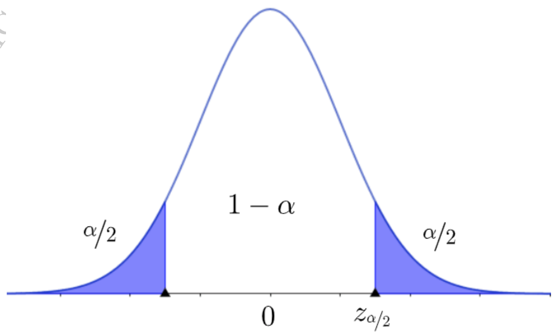
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2012 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de espera (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=121} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{3}{\sqrt{121}}\right) = N(\mu, 0{,}273)$

Es importante interpretar $\left|\overline{X} - \mu\right|$ como la distancia que hay desde μ hasta $\overline{X}$.



$$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > 0{,}5\right) = 2 \cdot P\left(\overline{X} - \mu > 0{,}5\right)$$

$$= 2 \cdot P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} > \frac{0{,}5}{0{,}273}\right) = 2 \cdot P(Z > 1{,}83)$$

$$= 2 \cdot \left[1 - P(Z < 1{,}83)\right] = 2 \cdot (1 - 0{,}9664)$$

$$= 0{,}0672$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=121} \overline{x} = 7$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{121}} = 0{,}535$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (6{,}465; 7{,}535)}$$

Ejercicio 43

El peso en gramos del contenido de las cajas de cereales de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 5 gramos. Se toma una muestra de tamaño 144

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor de 1 gramo.

b) Si la media muestral obtenida es igual a 499,5 gramos, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de ese tipo de cajas de cereales.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2013 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las cajas de cereales (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

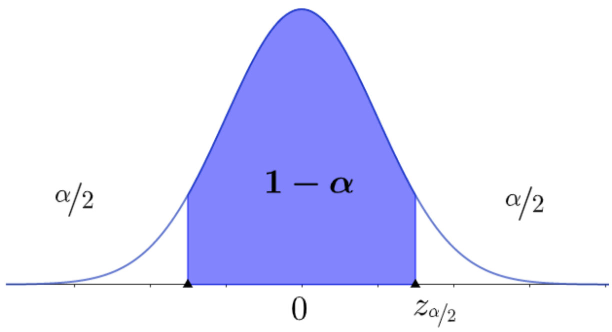
a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=144} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{5}{\sqrt{144}}\right) = \mathcal{N}(\mu, 0{,}417)$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1 \cdot \sqrt{144}}{5} = 2{,}4 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}9918$$

$$\Longrightarrow \ P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 1\right) = 0{,}9918$$

Otra Forma:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 1\right) &= P(-1 < \overline{X} - \mu < 1) \\ &= P\left(\frac{-1}{0{,}417} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} < \frac{1}{0{,}417}\right) \\ &= P(2{,}4 < Z < 2{,}4) \\ &= P(Z < 2{,}4) - P(Z < -2{,}4) \\ &= P(Z < 2{,}4) - \left[1 - P(Z < 2{,}4)\right] \\ &= 2 \cdot P(Z < 2{,}4) - 1 = 2 \cdot 0{,}9918 - 1 \\ &= 0{,}9836 \end{aligned}$$



b) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=144} \overline{x} = 499{,}5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}9$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \Longrightarrow \alpha = 0{,}1 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{144}} = 0{,}685$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (498{,}81; 500{,}19)}$$

Ejercicio 44

La altura de los árboles de una determinada comarca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y varianza 25 cm. Se toma una muestra aleatoria simple y, para un nivel de confianza del 95 %, se construye un intervalo de confianza para la media poblacional cuya amplitud es de 2,45 cm.

a) Determínese el tamaño de la muestra seleccionada.

b) Determínese el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la altura media para la muestra seleccionada fue de 170 cm.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2013 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de los árboles (cm)”} \xrightarrow{\sigma^2=25} X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$
$$I.C._{95\,\%}(\mu) \quad \& \quad 2E = 2{,}45 \implies E = 1{,}225$$

a) $n = ? \quad \& \quad E = 1{,}225 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = 1{,}96 \cdot \frac{5}{1{,}225} \implies \boxed{n = 64}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 170 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95 \quad \& \quad E = 1{,}225$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (168{,}775; 171{,}225)}$$

Ejercicio 45

El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y una desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 24.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior de 3,37 Mb?.

b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2013 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Descarga mensual de datos (Mb)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(3{,}5, 1{,}4)$$

a) $X : \mathcal{N}(3{,}5, 1{,}4) \xrightarrow{n=24} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3{,}5, \dfrac{1{,}4}{\sqrt{24}}\right) \approx \mathcal{N}(3{,}5, 0{,}28)$

$$P(\overline{X} < 3{,}37) = P\left(Z < \frac{3{,}37 - 3{,}5}{0{,}28}\right) = P(Z < -0{,}46) = P(Z > 0{,}46)$$

$$= 1 - P(Z < 0{,}46) = 1 - 0{,}6772 = 0{,}3228$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}4) \xrightarrow{n=24} \overline{x} = 3{,}42 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1{,}4}{\sqrt{24}} = 0{,}56$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (2{,}86; 3{,}98)}$$

Ejercicio 46

La duración en horas de un determinado tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 h?

b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2013 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración de las bombillas (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1940)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 100 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1940}{\sqrt{n}} < 100 \Rightarrow n > \left(1{,}96 \cdot \frac{1940}{100}\right)^2 = 1445{,}82 \Rightarrow \boxed{n = 1446}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1940) \xrightarrow{n=225} \overline{x} = 12415 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}90$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{1940}{\sqrt{225}} = 212{,}75$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (12202{,}25; 12627{,}75)}$$

Ejercicio 47

La altura en centímetros de los individuos de una población se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 20 cm.

a) En una muestra aleatoria simple de 500 individuos se ha obtenido una altura media de 174 cm. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ; al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 5 cm?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2013 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de la población (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=500} \overline{x} = 174 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{500}} = 1{,}75$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (172{,}25; 175{,}75)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 5 \implies E = 2{,}5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \leq 2{,}5 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \frac{20}{2{,}5}\right)^2 = 173{,}18 \implies \boxed{n = 174}$$

Ejercicio 48

Una envasadora empaqueta naranjas en bolsas. Para realizar un control de calidad, se tomó una muestra del peso real de 8 bolsas y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$2{,}4 \quad 1{,}8 \quad 2 \quad 2{,}4 \quad 2{,}2 \quad 2 \quad 1{,}6 \quad 2{,}2$$

El peso de las bolsas que sale de esa planta de envasado se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 0,5 kg.

a) Obténgase un intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional μ.

b) Hállese el error máximo que se cometería en la estimación de μ usando el intervalo de confianza anterior.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2013 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de naranjas (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu,)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}5) \xrightarrow{n=8} \overline{x} = \frac{2{,}4+1{,}8+2+2{,}4+2{,}2+2+1{,}6+2{,}2}{8} = 2{,}075 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{8}} = 0{,}346$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1{,}729; 2{,}421)}$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{8}} = 0{,}346$

Ejercicio 49

El tiempo de renovación de un teléfono móvil expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de renovación del teléfono (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}4)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}4) \xrightarrow{n=400} \overline{x} = 1{,}75 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{400}} = 0{,}039$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1{,}711; 1{,}789)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 0{,}02 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02 \Rightarrow n \geq \left(1{,}645 \cdot \frac{0{,}4}{0{,}02}\right)^2 = 1082{,}4 \Rightarrow \boxed{n = 1083}$$

Ejercicio 50

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.

a) *Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.*

b) *Determínese un intervalo de confianza del 99 % para μ, si la media muestral es igual a 1532.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción B)

Solución.

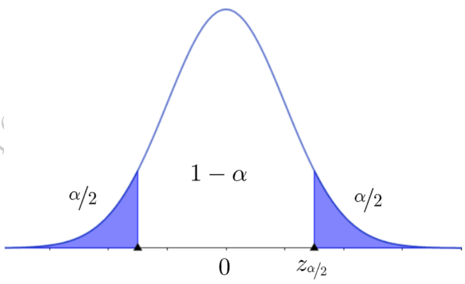
$$X : \mathcal{N}(\mu, 210) \xrightarrow{n=64} X : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{210}{\sqrt{64}}\right) \approx \mathcal{N}(\mu, 26{,}25)$$

a) $P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq 22\right) = 2 \cdot P\left(\overline{X} - \mu \geq 22\right)$

$= 2 \cdot P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \geq \dfrac{22}{26{,}25}\right) = 2 \cdot P(Z \geq 0{,}838)$

$= 2 \cdot \left[1 - P(Z < 0{,}838)\right] = 2 \cdot (1 - 0{,}7983)$

$= 0{,}4034$



b) $X : \mathcal{N}(\mu, 210) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 1532 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}99$

$1 - \alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}005 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \dfrac{210}{\sqrt{64}} = 67{,}59$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (1464{,}41; 1599{,}59)}$

Ejercicio 51

La longitud alcanzada por un lanzador de disco se puede aproximar por una variable aleatoria normal con media μ desconocida y desviación típica igual a 2 metros. El lanzador hace 10 lanzamientos en una prueba atlética. Considérense esos 10 lanzamientos como una muestra aleatoria simple.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la distancia media obtenida por el lanzador en los 10 intentos y μ sea menor que 0,75 metros.

b) Si la media de las distancias alcanzadas en los lanzamientos durante la prueba ha sido de 65 metros, determínese un intervalo de cnfianza con un nivel del 95 % para la distancia media de los lanzamientos de este atleta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud lanzamiento de disco (m)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx \mathcal{N}(\mu, 0{,}63)$

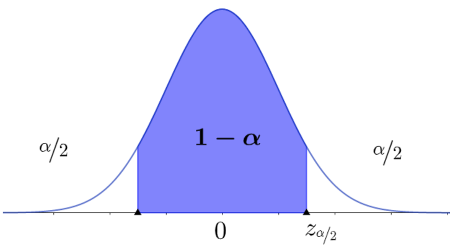
$$\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 0{,}75\right) &= P\left(-0{,}75 < \overline{X} - \mu < 0{,}75\right) = P\left(-\frac{0{,}75}{0{,}63} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} < \frac{0{,}75}{0{,}63}\right) \\
&= P(-1{,}19 < Z < 1{,}19) = P(Z < 1{,}19) - P(Z < -1{,}19) \\
&= P(Z < 1{,}19) - \left[1 - P(Z < 1{,}19)\right] = 2 \cdot P(Z < 1{,}19) - 1 \\
&= 2 \cdot 0{,}8830 = 0{,}766
\end{aligned}$$

`Otra forma:`

$$E = 0{,}75 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 0{,}75$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{0{,}75 \cdot \sqrt{10}}{2} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}1857 \overset{Tabla}{\Longrightarrow} 1 - \alpha/2 = 0{,}883$$

$$\implies \alpha/2 = 0{,}117 \implies \alpha = 0{,}234 \implies 1 - \alpha = 0{,}766$$



b) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 65 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 1{,}24$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (63{,}76; 66{,}24)}$$

Ejercicio 52

El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido en alquitrán (mg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 4)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 22$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{20}} = 1{,}47$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (20{,}53; 23{,}47)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}9$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \dfrac{4}{0{,}5}\right)^2 = 173{,}18 \implies \boxed{n = 174}$

Ejercicio 53

El número de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transporte se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) *Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:*

$$40 \quad 28 \quad 41 \quad 102 \quad 95 \quad 33 \quad 108 \quad 20 \quad 64$$

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) *¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 %, construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrida por un conductor (km/día)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 30) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = \dfrac{40 + 28 + 41 + 102 + 95 + 33 + 108 + 20 + 64}{9} = 59$

$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{9}} = 19{,}6$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (39{,}4; 78{,}6)}$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 50) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{50}{\sqrt{4}} = 25\right)$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{4}} = 41{,}125$

Ejercicio 54

La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud de los gusanos (mm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=48} \overline{x} = 36 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{48}} = 0{,}849$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (35{,}151; 36{,}849)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}05 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 24{,}35 \implies \boxed{n = 25}$$

Ejercicio 55

El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16{,}33; 19{,}27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del $95\,\%$. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del $95\,\%$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo mensual de leche (litros)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=?} I.C._{95\,\%}(16{,}33; 19{,}27)$

$$\overline{x} = \frac{16{,}33 + 19{,}27}{2} \implies \boxed{\overline{x} = 17{,}8}$$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = \frac{19{,}27 - 16{,}33}{2} = 1{,}47 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1{,}47 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{3}{\sqrt{64}}\right) \approx \mathcal{N}(\mu, 0{,}375) \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{64}} = 0{,}735$$

Ejercicio 56

La cantidad de azúcar, en gramos, del contenido de las botellas de un litro de una conocida bebida refrescante se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 2 gramos.

a) Se ha realizado un análisis de control de los contenidos de una muestral aleatoria simple de 100 de esas botellas y se ha obtenido una cantidad media de azúcar igual a 70 gramos. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 2 gramos?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de azúcar (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 70 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{100}} = 0{,}39$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (69{,}61; 70{,}39)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 2 \implies E \leq 1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}9$

$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \dfrac{2}{1}\right)^2 = 10{,}82 \implies \boxed{n = 11}$

Ejercicio 57

El peso, en gramos, del contenido de las cajas de una conocida marca de cereales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 20 de esas cajas de cereales para realizar un estudio y la media de los pesos de sus contenidos ha sido $\overline{x} = 500$. Calcúlese un interval de confianza del 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 500$, calcúlese la probabilidad de que la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 cajas sea inferior a 495 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las cajas de cereales (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 500 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4{,}38$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (495{,}62; 504{,}38)}$

b) $X : \mathcal{N}(500, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(495, \dfrac{10}{\sqrt{20}}\right) \approx \mathcal{N}(2{,}236)$

$P(\overline{X} < 495) = P\left(Z < \dfrac{495-500}{2{,}236}\right) = P(Z < -2{,}24) = P(Z > 2{,}24)$

$\qquad = 1 - P(Z < 2{,}24) = 1 - 0{,}9875 = 0{,}0125$

Ejercicio 58

La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estatura de los varones (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=625} \overline{x} = 169 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}98$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}01 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{16}{\sqrt{625}} = 1{,}488$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (167{,}512; 170{,}5)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 4 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}9$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{16}{\sqrt{n}} < 4 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \frac{16}{4}\right)^2 = 43{,}29 \implies \boxed{n = 44}$$

Ejercicio 59

El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3,290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7,840.
Exprésense los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.
Nota: Utilícese $z_{0,05} = 1{,}645$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

a) $n_1 = ? \quad \& \quad E = 3{,}29 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$n_2 = n_1 - 7500 \quad \& \quad E = 7{,}84 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \left(1{,}645 \cdot \dfrac{\sigma}{3{,}29}\right)^2 \implies \boxed{n_1 = 0{,}25\sigma^2} \\ n_2 = \left(1{,}96 \cdot \dfrac{\sigma}{7{,}84}\right)^2 \implies \boxed{n_2 = 0{,}0625\sigma^2} \end{cases}$$

$$n_2 = n_1 - 7500 \implies 0{,}0625\sigma^2 = 0{,}25\sigma^2 - 7500 \implies \sigma^2 = \frac{7500}{0{,}24375} \implies \boxed{\sigma = 200}$$

$$n_1 = 0{,}25 \cdot 200^2 \implies \boxed{n_1 = 1000} \quad \& \quad n_2 = 0{,}0625 \cdot 200^2 \implies \boxed{n_2 = 2500}$$

Ejercicio 60

La capacidad vital forzada es una medida para calcular el volumen de los pulmones de las personas adultas que se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica 1 litro.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 144 personas adultas que dieron una media de capacidad vital forzada de 4 litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral obtenido a partir de una muestra de tamaño 81, con un nivel de confianza del 99 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Capacidad vital de una persona (litros)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1) \xrightarrow{n=144} \overline{x} = 4 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{144}} = 0{,}163$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (3{,}837; 4{,}163)}$$

b) $n = 81 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}99$

$$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}005 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{1}{\sqrt{81}} \implies \boxed{E = 0{,}286}$$

Ejercicio 61

El peso en kilogramos de la cabeza humana en adultos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 0,75 *kilogramos.*

a) *Una muestra aleatoria simple de* 16 *individuos a los que se les ha realizado una densitometría, prueba diagnóstica que permite medir el peso de la cabeza, proporcionó una media muestral de* 5,137 *kilogramos. Determínese un intervalo de confianza al* 98 % *para μ.*

b) *¿Cuántas densitometrías como mínimo deben realizarse para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que* 100 *gramos, con el mismo nivel de confianza del* 98 %*?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de la cabeza humana (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}75)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}75) \xrightarrow{n=16} \overline{x} = 5{,}137 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}98$

$$1-\alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}01 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}75}{\sqrt{16}} = 0{,}436$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (4{,}701; 5{,}573)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}98$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}325 \cdot \frac{0{,}75}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \implies n > \left(2{,}325 \cdot \frac{0{,}75}{0{,}1}\right)^2 = 304{,}07 \Rightarrow \boxed{n = 305}$$

Ejercicio 62

El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6,6 kW, si $\mu = 6{,}3$ kW.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6{,}1; 6{,}9)$ para la media del consumo familiar diario.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

$$X : \text{“Consumo familiar diario de electricidad (kW)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}2)$$

a) $X : \mathcal{N}(6{,}3, 1{,}2) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6{,}3, \dfrac{1{,}2}{\sqrt{50}} = 0{,}17\right)$

$$\begin{aligned} P\left(6 \le \overline{X} \le 6{,}6\right) &= P\left(\frac{6-6{,}3}{0{,}17} \le Z \le \frac{6{,}6-6{,}3}{0{,}17}\right) = P(-1{,}77 \le Z \le 1{,}77) \\ &= P(Z \le 1{,}77) - P(Z \le -1{,}77) = P(Z \le 1{,}77) - P(Z \ge 1{,}77) \\ &= P(Z \le 1{,}77) - \left[1 - P(Z \le 1{,}77)\right] = 2P(Z \le 1{,}77) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}9616 - 1 = 0{,}9232 \end{aligned}$$

b) $I.C. = (6{,}1; 6{,}9) \implies E = \dfrac{6{,}9 - 6{,}1}{2} = 0{,}4$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 0{,}4 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{50}} \implies z_{\alpha/2} = 2{,}36 \xRightarrow{\textit{Tabla}} 1 - \alpha/2 = 0{,}9909$$

$$\implies \alpha/2 = 0{,}0091 \implies \alpha = 0{,}0182 \implies 1 - \alpha = 0{,}9818 = 98{,}18\,\%$$

Ejercicio 63

Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

a) X : "Nº de días de tratamiento contra el insomnio"

$X : \mathcal{N}(\mu, 34{,}5) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{290+275+290+325+285+365+375+310+290+300}{10} = 310{,}5$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{10}} = 21{,}38$$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (289{,}12; 331{,}88)}$

b) $n = ?$ & $E < 10$ & $1 - \alpha = 0{,}95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{n}} < 10 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{10}\right)^2 = 45{,}72 \implies \boxed{n = 46}$$

Ejercicio 64

El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de reacción } (ms)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 250)$$

a) $I.C. = (701; 799) \Longrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{701+799}{2} = 750 \\ E = \dfrac{799-701}{2} = 49 \end{cases}$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{250}{49}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{n = 100}$$

b) $E = ?$ & $n = 25$ & $1-\alpha = 0{,}8$

$$1-\alpha = 0{,}8 \Longrightarrow \alpha = 0{,}2 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}1 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}9 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}285$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}285 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 64{,}25$$

Ejercicio 65

La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) *Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100$ h?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración componente (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 8000$

$$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{1000}{\sqrt{81}} = 286{,}11$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (7713{,}89; 8286{,}11)}$$

b) $X : \mathcal{N}(8100, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8100, \dfrac{1000}{\sqrt{100}} = 100\right)$

$$\begin{aligned}
P(7904 \leq \overline{X} \leq 8296) &= P\left(\frac{7904-8100}{100} \leq \frac{8296-8100}{100}\right) = P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) \\
&= P(Z \leq 1{,}96) - P(Z \leq -1{,}96) \\
&= P(Z \leq 1{,}96) - P(Z \geq 1{,}96) \\
&= P(Z \leq 1{,}96) - \big[1 - P(Z \leq 1{,}96)\big] \\
&= 2 \cdot P(Z \leq 1{,}96) - 1 = 2 \cdot 0{,}9750 - 1 = 0{,}95
\end{aligned}$$

Ejercicio 66

El consumo de agua, medido en litros, en una ducha puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 duchas, obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 100$ litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar μ mediante la media muestral, el error cometido sea menor que 2 litros, con un nivel de confianza del 99 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de agua } (\ell)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 100$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 3{,}92$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (96{,}08; 103{,}92)}$

b) $n = ?$ & $E < 2$ & $1 - \alpha = 0{,}99$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}005 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2{,}575 \cdot \dfrac{10}{2}\right)^2 = 165{,}77 \implies \boxed{n = 166}$

Ejercicio 67

El nivel de colesterol total en sangre en adultos de 50 años, medido en miligramos por decilitro (mg/dl), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 20$ mg/dl.

a) A partir de una muestra aleatoria simple se obtiene el intervalo de confianza $(191{,}2; 210{,}8)$, expresado en mg/dl, para estimar μ con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra considerada.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcúlese la amplitud del intervalo de confianza al 98 % para μ.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nivel de colesterol } (mg/ml)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $I.C._{95\,\%}(\mu) = (191{,}2; 210{,}8) \implies \overline{x} = \dfrac{191{,}2 + 210{,}8}{2} = 201$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = \frac{210{,}8 - 191{,}2}{2} = 9{,}8 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=100}$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies \alpha/2 = 0{,}01 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2{,}325 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \implies \boxed{2E = 9{,}3}$$

Ejercicio 68

La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) *Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.*

b) *A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2,35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de fruta (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{16000}{100} = 160$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1{,}96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (158{,}04; 161{,}96)}$$

b) $n = 64 \quad \& \quad E = 2{,}35 \quad \& \quad 1 - \alpha = ?$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 2{,}35 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{64}} \implies z_{\alpha/2} = 1{,}88$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}88 \xRightarrow{Tabla} 1-\alpha/2 = 0{,}9699 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0301 \Rightarrow \alpha = 0{,}602 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}9398}$$

Ejercicio 69

En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto familiar en gas (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 75)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 15 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} < 15 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{75}{15}\right)^2 = 96{,}04 \implies \boxed{n = 97}$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 75) \xrightarrow{n=81} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(250, \frac{75}{\sqrt{81}} = 8{,}33\right)$

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230-250}{8{,}33}\right) = P(Z \geq -2{,}4) = P(Z \leq 2{,}4) = 0{,}9918$$

Ejercicio 70

La producción por hectárea, medida en kg/ha (kilogramos por hectárea) del olivar de alta densidad en cultivo intensivo de Córdoba se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 kg/ha.

a) A partir de una muestra aleatoria simple de 400 parcelas de una hectárea se ha obtenido $(9917{,}75; 10082{,}25)$ como intervalo de confianza para la media μ, expresado en kg/ha. Determínese la media de la muestra y el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

b) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al $98\,\%$ tenga de amplitud a lo sumo 50 kg/ha.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción del olivar } (kg/ha)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=400} I.C.(\mu) = (9917{,}75; 10082{,}25)$

$$\overline{x} = \frac{9917{,}75 + 10082{,}25}{2} = 10000$$

$$E = \frac{10082{,}25 - 9917{,}75}{2} = 82{,}25 \Longrightarrow E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 82{,}25 \cdot \frac{\sqrt{400}}{1000}$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha = 0{,}1 \Longrightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}9}$$

b) $n = ?$ $\quad$ & $\quad 2E \leq 50 \Longrightarrow E = 25$ $\quad$ & $\quad 1 - \alpha = 0{,}98$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \Longrightarrow \alpha = 0{,}02 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{1000}{\sqrt{n}} \leq 50 \Longrightarrow n \geq \left(2{,}325 \cdot \frac{1000}{50}\right)^2 = 8649 \Rightarrow \boxed{n = 8649}$$

Ejercicio 71

El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 50 de esas bolsas de patatas y la media de pesos de sus contenidos ha sido de $\overline{X} = 100$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o iggual que 2625 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de patatas (gr)”} \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=50} \overline{x} = 100$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}\!/\!{}_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/\!{}_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}} = 2{,}326$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (97{,}674; 102{,}326)}$$

b) $X : \mathcal{N}(10, 100) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(10, \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2\right) \qquad \& \qquad \overline{X} = \dfrac{2625}{25} = 105$

$$\left(\overline{X} \leq 105\right) = P\left(Z \leq \frac{105 - 100}{2}\right) = P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$$

Ejercicio 72

El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 98 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

$$x \equiv \text{"Tiempo dedicado a actividades deportivas (min)"}$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=250} \overline{x} = 90$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}} = 2{,}08$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (87{,}92; 92{,}08)}$$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 1 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \frac{20}{1}\right)^2 = 1082{,}4 \implies \boxed{n = 1083}$$

Ejercicio 73

El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$ euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(2265{,}375; 2424{,}625)$ para μ, con un nivel de confianza del $95\,\%$. Calcúlese la media muestran y el tamaño de la muestra elegida.

b) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del $99\,\%$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95 \quad \& \quad I.C. = (2265{,}375; 2424{,}625)$

$$\left.\begin{array}{r}\overline{x} - E = 2265{,}375\\ \overline{x} + E = 2424{,}625\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}\overline{x} = \dfrac{2265{,}375 + 2424{,}625}{2} = 2345\\[2ex] E = \dfrac{2424{,}625 - 2265{,}375}{2} = 79{,}625\end{cases}$$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{650}{\sqrt{n}} = 79{,}625 \Longrightarrow n = \left(1{,}96 \cdot \frac{650}{79{,}625}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{n = 256}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad n = 225 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}99$

$$1-\alpha = 0{,}99 \Longrightarrow \alpha = 0{,}01 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}005 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{650}{\sqrt{225}} = 111{,}58$$

Ejercicio 74

La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas $\overline{X}$ sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción diaria de leche } (\ell)\text{”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 30)$$

a) $n = ?$ $\quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95 \quad \& \quad 2E \leq 10$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$2E \leq 10 \Rightarrow 2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow n \geq \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{50}{10}\right)^2 = 384{,}16 \Rightarrow \boxed{n = 385}$$

b) $X : \mathcal{N}(950, 50) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(950, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}(950, 10)$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{940 - 950}{10}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$$
$$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

Ejercicio 75

El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{x} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de la gamba Palamós (g)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 70$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} = 1{,}96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (68{,}04; 71{,}96)}$$

b) $X : \mathcal{N}(70, 5) \xrightarrow{n=12} \overline{X} : \mathcal{N}\left(70, \frac{5}{\sqrt{12}}\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq \frac{855}{12}\right) = P\left(\overline{X} \geq 71{,}25\right) = P\left(Z \geq \frac{71{,}25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P(Z \geq 0{,}87)$$
$$= 1 - P(Z < 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = 0{,}1922$$

Ejercicio 76

El peso en kilogramos kg de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0{,}60$ kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{x} = 3{,}250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0,2 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los recién nacidos (kg)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}6)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}6) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3{,}25$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \Longrightarrow \alpha = 0{,}02 \Longrightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}01 \Longrightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} = 0{,}1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (3{,}1105; 3{,}3895)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 95\,\% \qquad \& \qquad E \leq 0{,}2$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \Longrightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{n}} \leq 0{,}2 \Longrightarrow n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}2}\right)^2 = 34{,}57 \Longrightarrow \boxed{n = 35}$$

Ejercicio 77

La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza $(159; 165)$. Determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

b) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrido (km)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=81} I.C. = (159; 165)$

$$\overline{x} = \frac{159 + 165}{2} = 162$$

$$E = \frac{165 - 159}{2} = 3 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} = 3 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}6875$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}69 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9545 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0455 \Rightarrow \alpha = 0{,}091 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}909}$$

b) $X : \mathcal{N}(160, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(160, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(160, 2)$

$$P(\overline{X} > 156) = P\left(Z > \frac{156 - 160}{2}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

Ejercicio 78

El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{x} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud al lo sumo de 10 minutos?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en regresar a casa (minutos)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 30$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{64}} = 1{,}225$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Rightarrow \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (28{,}775; 31{,}225)}$

b) $n =?$ & $1 - \alpha = 0{,}99$ & $2E \leq 10$

$1 - \alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2{,}575 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow n \geq \left(2 \cdot 2{,}575 \cdot \dfrac{5}{10}\right)^2 = 6{,}63 \Rightarrow \boxed{n = 7}$

Ejercicio 79

El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ *y desviación típica* $\sigma = 9$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 *personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de* $\overline{x} = 8{,}1$ *meses. Determínese un intervalo de confianza al* 90 % *para* μ.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 *personas se ha obtenido un intervalo de confianza* $(7{,}766; 10{,}233)$ *para* μ*, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Antiüedad de socio (meses)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 9)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 8{,}1$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1{,}48$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (6{,}62; 9{,}58)}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=144} I.C.(7{,}766; 10{,}233)$

$$\overline{x} = \frac{7{,}766 + 10{,}233}{2} = 8{,}9995$$

$$E = \frac{10{,}233 - 7{,}766}{2} = 1{,}2335 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{9}{\sqrt{144}} = 1{,}2335 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0{,}9}$$

Ejercicio 80 (2 *puntos*)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\overline{X} = 7{,}8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}9) \stackrel{n=324}{\longrightarrow} \overline{X} = 7{,}8$

$$1-\alpha = 0{,}992 \implies \alpha = 0{,}008 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}004 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}996 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}65$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}65 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{324}} = 0{,}1325$$

$$I.C._{99{,}2\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99{,}2\,\%}(\mu) = (7{,}67, 7{,}93)}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}9) \stackrel{n=?}{\longrightarrow} 2E = 0{,}2$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$2E \leq 0{,}2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}2 \implies 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{n}} \leq 0{,}2 \implies n \geq \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{0{,}2}\right)^2$$

$$\implies n \geq 311{,}17 \implies \boxed{n = 312}$$

Ejercicio 81 (2 *puntos*)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria smple de 484 contenedrores.

a) *Si la media de la muestra es $\overline{X} = 25{,}9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.*

b) *Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \overset{n=484}{\longrightarrow} \overline{X} = 25{,}9$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}} = 0{,}2243$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (25{,}68; 26{,}12)}$$

b) $X : \mathcal{N}(23, 3) \overset{n=484}{\longrightarrow} \overline{X} : \mathcal{N}(23, 3/\sqrt{484} = 0{,}136)$

Nos piden la probabilidad de que los 484 contenedores puedan ser transportados en un barco con capacidad máxima de 11000 T. Es decir, $484 \cdot \overline{X} \leq 11000$, o lo que es lo mismo, que $\overline{X} \leq 22{,}73$ T.

$$P(\overline{X} \leq 22{,}73) = P\left(Z \leq \frac{22{,}73 - 23}{0{,}136}\right) = P(Z \leq -1{,}98) = P(Z \geq 1{,}98)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1{,}98) = 1 - 0{,}9761 = 0{,}0239$$

Ejercicio 82 (2 *puntos*)

La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197,5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \qquad n = ? \qquad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/\!_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/\!_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

La amplitud del tintervalo ha de ser menor que 2, por lo que $2E \leq 2$

$$2E \leq 2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \implies 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \leq 2$$

$$\implies n \geq \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 = 311{,}17 \implies \boxed{n = 312}$$

b) $X : \mathcal{N}(202, 9) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(202, {}^{9}\!/\!\sqrt{16}) = \mathcal{N}(202, 2{,}25)$

$$P\left(\overline{X} \leq 197{,}5\right) = P\left(Z \leq \frac{197{,}5 - 202}{2{,}25}\right) = P(Z \leq -2)$$

$$= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Ejercicio 83 (2 *puntos*)

El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 25) \quad \stackrel{n=10}{\longrightarrow} \quad \overline{X} = 505$

$$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575\cdot\frac{25}{\sqrt{10}} = 20{,}36$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E;\overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu)(484{,}64, 525{,}36)}$$

b) $\quad X : \mathcal{N}(500, 25) \quad \stackrel{n=10}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(500, 25/\sqrt{10}) = \mathcal{N}(500, 7{,}91)$

$$P\left(10\overline{X} \geq 5030\right) = P\left(\overline{X} \geq 503\right) = P\left(Z \geq \frac{503-500}{7{,}91}\right) = P(Z \geq 0{,}38)$$
$$= 1 - P(Z \leq 0{,}38) = 1 - 0{,}6480 = 0{,}3520$$

Ejercicio 84 (2 *puntos*)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16, calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo $\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24{,}24, 47{,}76)$ para μ.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 24) \quad \overset{n=16}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(36, {}^{24}/_{\sqrt{16}} = 6)$$

$$P\left(\overline{X} \geq 48\right) = P\left(Z \geq \frac{48-36}{6}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

b) $$I.C. = (24{,}24, 47{,}76) \implies 2E = 47{,}76 - 24{,}24 \implies E = 11{,}76$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 11{,}76 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{24}{\sqrt{16}} \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975$$
$$\implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies \alpha = 0{,}05 \implies 1 - \alpha = 0{,}95$$

Por lo que el nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza en cuestión es del 95 %.

Ejercicio 85 (2 *puntos*)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0{,}6$ cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}6) \overset{n=100}{\Longrightarrow} \overline{X} = 7$

$$1-\alpha = 0{,}98 \Longrightarrow \alpha = 0{,}02 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}99 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} = 0{,}1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E; \overline{x}+E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (6{,}8605, 7{,}1395)}$$

b) $n = ?$ $\quad E \leq 0{,}1 \quad 1-\alpha = 0{,}98 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$E \leq 0{,}1 \Longrightarrow E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1 \Longrightarrow n \geq \left(2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}1}\right)^2$$

$$\Longrightarrow n \geq 194{,}6 \Longrightarrow \boxed{n = 195}$$

Ejercicio 86 (2 *puntos*)

El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. estos precios son los siguientes:

$$140;\ 125;\ 140;\ 175;\ 135;\ 165;\ 175;\ 110;\ 150;\ 130.$$

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \quad \xrightarrow{n=10} \quad \overline{X} = \frac{140+125+140+175+135+165+175+110+150+130}{10} = 144{,}5$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{15}{8} = 9{,}3$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (135{,}2, 153{,}7)}$$

b) $n = ? \qquad E \leq 8 \qquad 1-\alpha = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E \leq 8 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right)^2 13{,}5$$

$$\implies \boxed{n = 14}$$

Ejercicio 87 (2 *puntos*)

El consumo de combustible, en litros cada 100 *kilómetros* ($l/100\,km$), *de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media* μ *desconocida y desviación típica* $\sigma = 1{,}2\ l/100\,km$. *Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño* 49.

a) *Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza* $(4{,}528, 5{,}2)$ *para* μ.

b) *Supóngase ahora que* $\mu = 4{,}8\ l/100\,km$. *Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra,* $\overline{X}$, *esté comprendida entre* 4,5 *y* 5,1 $l/100\,km$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}2) \quad \overset{n=49}{\longrightarrow} \quad \overline{X} :$

$$2E = 5{,}2 - 4{,}528 = 0{,}672 = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{0{,}672 \cdot \sqrt{49}}{2 \cdot 1{,}2} = 1{,}96 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95$$

b) $\quad X : \mathcal{N}(4{,}8, 1{,}2) \quad \overset{n=49}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(4{,}8, {}^{1{,}2}/_{\sqrt{49}} = 0{,}1714)$

$$\begin{aligned} P(4{,}5 \leq \overline{X} \leq 5{,}1) &= P\left(\frac{4{,}5 - 4{,}8}{0{,}1714} \leq Z \leq \frac{5{,}1 - 4{,}8}{0{,}1714}\right) = P(-1{,}75 \leq Z \leq 1{,}75) \\ &= P(Z \leq 1{,}75) - P(Z \leq -1{,}75) = P(Z \leq 1{,}75) - P(Z \geq 1{,}75) \\ &= P(Z \leq 1{,}75) - [1 - P(Z \leq 1{,}75)] = -0{,}9599 - (1 - 0{,}9599) \\ &= 0{,}9198 \end{aligned}$$

Ejercicio 88

El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ kilogramos.

a) *Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:*

$$37,\ 40,\ 42,\ 39,\ 41,\ 40,\ 39,\ 42,\ 40$$

b) *Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 99 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \quad \overset{n=9}{\Longrightarrow} \quad \overline{X} = \dfrac{37+40+42+39+41+40+39+42+40}{9} = 40$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{9}} = 1{,}96$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (38{,}04, 41{,}96)}$

b) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 1$, siendo $1-\alpha = 0{,}99$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies 2{,}325 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies n \geq \left(2{,}325 \cdot \dfrac{3}{1}\right)^2 = 48{,}65 \implies \boxed{n = 49}$

Ejercicio 89 (2 *puntos*)

La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media $\mu = 4$ gramos y desviación típica $\sigma = 0{,}5$ gramos.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0,25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral , $\overline{X}$, pese más de 12,25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(4, 0{,}5) \quad \xrightarrow{n} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(4, {}^{0{,}5}/\sqrt{n})$$

a) $n = ? \quad \& \qquad \& \quad E \leq 0{,}25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \leq 0{,}25 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}25}\right)^2 = 15{,}36 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(12, 0{,}5) \quad \xrightarrow{n=25} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(12, {}^{0{,}5}/\sqrt{25}) = \mathcal{N}(12, 0{,}1)$

$$P\left(\overline{X} > 12{,}25\right) = P\left(Z > \frac{12{,}25 - 12}{0{,}1}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z < 2{,}5)$$
$$= 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

Ejercicio 90 (2 ***puntos***)

El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 10$ descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99,5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra de 10 horas la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \xrightarrow{n=40} \quad \overline{X} = 99{,}5$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{40}} = 3{,}1$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (96{,}4, 102{,}6)}$$

b) $X : \mathcal{N}(100, 10) \quad \xrightarrow{n=10} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(100, 10/\sqrt{10}) = \mathcal{N}(100, 3{,}16)$

$$P\Big(100 < \overline{X} < 110\Big) = P\left(\frac{100 - 100}{3{,}16} < Z < \frac{110 - 100}{3{,}16}\right) = P(0 < Z < 3{,}16)$$
$$= P(Z < 3{,}16) - P(z < 0) = 0{,}9992 - 0{,}5 = 0{,}4992$$

Ejercicio 91 (2 *puntos*)

El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ h y desviación típica $\sigma = 0{,}25$ h.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 15 individuos y se obtiene una media muestral $\overline{x} = 2$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 2$ h. calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1,85 y 2,15 horas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 2 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \overset{Tabla}{\implies} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}25}{\sqrt{15}} = 0{,}127$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1{,}873; 2{,}127)}$$

b) $X : \mathcal{N}(2, 0{,}25) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2, \frac{0{,}25}{\sqrt{20}} = 0{,}056\right)$

$$\begin{aligned} P(1{,}85 \leq \overline{X} \leq 2{,}15) &= P\left(\frac{1{,}85-2}{0{,}056} \leq Z \leq \frac{2{,}15-2}{0{,}056}\right) = P(-2{,}68 \leq Z \leq 2{,}68) \\ &= P(Z \leq 2{,}68) - P(Z \leq -2{,}68) = P(Z \leq 2{,}68) - P(Z \geq 2{,}68) \\ &= P(Z \leq 2{,}68) - [1 - P(Z \leq 2{,}68)] = 2 \cdot P(Z \leq 2{,}68) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}9963 - 1 = 0{,}9926 \end{aligned}$$

Ejercicio 92

El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0{,}2$ kg.

a) *Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que $0{,}05$ kg, con un nivel de confianza del $95\,\%$.*

b) *Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1{,}5$ kg.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}2) \quad \& \quad n =? \quad \& \quad E < 0{,}05 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{n}} < 0{,}05 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}05}\right)^2 = 61{,}46 \implies \boxed{n = 62}$$

b) $X : \mathcal{N}(1{,}5, 0{,}2) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1{,}5, \frac{0{,}2}{\sqrt{20}} = 0{,}045\right)$

Si la suma de los pesos de 20 ejemplares es de 32 kg, quiere decir que la media será $\overline{x} = \frac{32}{20} = 1{,}6$ kg

$$P(\overline{X} > 1{,}6) = P\left(Z > \frac{1{,}6 - 1{,}5}{0{,}045}\right) = P(Z > 2{,}22) = 1 - P(Z < 2{,}22)$$
$$= 1 - 0{,}9868 = 0{,}0132$$

Ejercicio 93

La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para μ sea a lo sumo de 23550 km.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 24000) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95 \quad \& \quad 2E \leq 23550$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 23550 \implies n \geq \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{24000}{23550}\right)^2 = 15{,}95 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(150000, 24000) \overset{n=25}{\longrightarrow} \overline{X} : \mathcal{N}\left(150000, \frac{24000}{\sqrt{25}} = 4800\right)$

$$\begin{aligned} P(144240 \leq \overline{X} \leq 153840) &= P\left(\frac{144240-150000}{4800} \leq \overline{X} \leq \frac{153840-150000}{4800}\right) \\ &= P(-1{,}2 \leq Z \leq 0{,}8) = P(Z \leq 0{,}8) - P(Z \leq -1{,}2) \\ &= P(Z \leq 0{,}8) - P(Z \geq 1{,}2) = P(Z \leq 0{,}8) \\ &- [1 - P(Z \leq 1{,}2)] = 0{,}7881 - (1 - 0{,}8849) = 0{,}673 \end{aligned}$$

Ejercicio 94

El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0{,}1$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimción de μ sea menor que 0,025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Sabiendo que $\mu = 0{,}7$ kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0,65 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Llamamos $X \equiv$ ”Contenido en azúcares en los botes de miel (kg)”

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0{,}025$, siendo $1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E < 0{,}025 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}025 \implies 1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}025$$

$$\implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}025}\right)^2 = 61{,}46 \text{ y por tanto } \boxed{n = 62}$$

b) $$X : \mathcal{N}(0{,}7, 0{,}1) \quad \xrightarrow{n=20} \quad \overline{X} : \mathcal{N}\left(0{,}7; \frac{0{,}1}{\sqrt{20}} = 0{,}022\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 0{,}65) = P\left(Z \leq \frac{0{,}65 - 0{,}7}{0{,}022}\right) = P(Z \leq -2{,}24) = P(Z \geq 2{,}24)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2{,}27) = 1 - 0{,}9875 = 0{,}0125$$

Ejercicio 95

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2 % para estimar el precio medio mensual μ, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Nos dicen que la varianza $\sigma^2 = 49 \implies \sigma = 7$

$$X : \mathcal{N}(\mu, 7) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(\mu, 0{,}875)$$

$1 - \alpha = 0{,}992 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}65 \qquad \& \qquad \overline{x} = 34$

$I.C._{99,2\,\%}(\mu) = \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 34 \pm 2{,}65 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{64}} \implies \boxed{I.C._{99,2\,\%}(\mu) = (31{,}68; 36{,}32)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 95\,\% \qquad \& \qquad E < 3$

$1 - \alpha = 0{,}95 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1{,}96 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{n}} < 3 \Rightarrow n > \left(\dfrac{1{,}96 \cdot 7}{3}\right)^2 = 20{,}92 \Rightarrow \boxed{n = 21 \text{ centros}}$

Ejercicio 96

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5° y 6° de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1{,}5$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos.
Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu; 1,5) \xrightarrow{n=?}$ I.C. de amplitud $2E = 0{,}49$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}49}{2} \implies n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 1{,}5}{0{,}245}\right)^2 \implies \boxed{n = 144 \text{ mochilas}}$$

b) $X : \mathcal{N}(6; 1{,}5) \xrightarrow{n=225} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6; \dfrac{1{,}5}{\sqrt{225}}\right) = \mathcal{N}(6; 0{,}1)$

$$P(\overline{X} \geq 5{,}75) = P\left(Z \geq \frac{5{,}75 - 6}{0{,}1}\right) = P(Z \geq -2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$$

Ejercicio 97

El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 5 min, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0{,}1587$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad n =? \quad \& \quad E < 5 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{10}{5}\right)^2 = 15{,}36 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(40, 5) \xrightarrow{n=?} \overline{X} : \mathcal{N}\left(40, \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{{}^{10}/_{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0{,}1587 \implies P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0{,}8413$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{\sqrt{n}}{5} = 1{,}00 \implies \sqrt{n} = 5 \implies \boxed{n = 25}$$

Ejercicio 98

En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) Suponiendo $\mu = 3000$ €, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 € sea 0,20.

b) Suponiendo una desviación típica poblacional igual a 1000 € y el valor de μ desconocido, determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ, basado en la información de una muestra aleatoria simple de 100 locales comerciales en la que se observó un alquiler mensual medio de 3300 €.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(3000, \sigma) \xrightarrow{n=49} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} > 3125) = P\left(Z > \frac{3125 - 3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z > \frac{875}{\sigma}\right) = 1 - P(Z < \frac{875}{\sigma}) = 0{,}20$$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{875}{\sigma}\right) = 0{,}80 \xRightarrow{Tabla} \frac{875}{\sigma} = 0{,}845 \Longrightarrow \boxed{\sigma = 1035{,}5}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3300$

$1 - \alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1000}{\sqrt{100}} = 196$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (3104, 3496)}$

Ejercicio 99

Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

Sea $X \equiv$ Peso de los paquetes de harina, entonces $X : \mathcal{N}(\mu, 25)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 560 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}} = 12{,}65$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (547{,}35; 572{,}65)}$$

b) $X : \mathcal{N}(560, 25) \xrightarrow{n=50} \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right) = \mathcal{N}(560, 3{,}54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565-560}{3{,}54}\right) = P(Z \geq 1{,}41) = 1 - P(Z \leq 1{,}41)$$
$$= 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793$$

Ejercicio 100

La factura, en euros, de una cena para una persona, reservando en pucherodelujo.com *se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media* $\mu = 25$ *y desviación típica* $\sigma = 5$.

a) Calcúlese la probabilidad de que el coste medio por comensal, de 9 personas escogidas al azar que reserven en la página, no sea mayor que 30 euros.

b) Determínese el número mínimo de comensales que debería tener una muestra aleatoria simple para que el coste medio por comensal no exceda los 30 euros con probabilidad no inferior a 0,95.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(25, 5) \xrightarrow{n=9} \overline{X} : \mathcal{N}\left(25, \dfrac{5}{\sqrt{9}} = 1{,}67\right)$

$$P(\overline{X} < 30) = P\left(Z < \frac{30-25}{1{,}67}\right) = P(Z < 3) = 0{,}9987$$

b) $n = ?$ & $1-\alpha = 0{,}95$ & $E \leq 5$

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{n}} \leq 5 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{5}{5}\right)^2 = 3{,}84 \implies \boxed{n = 4}$

Ejercicio 101

La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0,09 mg^2.

a) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.

b) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0,05 mg con un nivel de confianza del 98 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) Nos dicen que la varianza $\sigma^2 = 0{,}09 \implies \sigma = 0{,}3$

$X \equiv$ "Cantidad de principio activo" $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}3) \xrightarrow{n=400} \overline{x} = 13$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}005 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{400}} = 0{,}039$$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (12{,}961; 13{,}039)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1-\alpha = 98\,\% \qquad \& \qquad E < 0{,}05$

$1-\alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies \alpha/2 = 0{,}1 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{n}} < 0{,}05 \implies n > \left(\frac{2{,}325 \cdot 0{,}3}{0{,}05}\right)^2 = 194{,}6 \implies \boxed{n = 195}$$

Ejercicio 102

En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450$ g.

a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\overline{x} = 2700$ g, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

b) Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000$ g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pesen en media entre 3000 g y 3450 g.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Peso sandías (g)" $\quad \& \quad X : \mathcal{N}(\mu, 450) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 2700 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{450}{\sqrt{25}} = 176{,}4$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (2523{,}6, 2876{,}4)}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 450) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{450}{\sqrt{4}}\right) = \mathcal{N}(3000, 225)$

$$P(3000 < X < 3450) = P\left(\frac{3000-3000}{225} < Z < \frac{3450-3000}{225}\right) = P(0 < Z < 2)$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0{,}9772 - 0{,}5 = 0{,}4772$$

Ejercicio 103

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) *Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.*

b) *Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

a) $n = ? \quad \& \quad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}5) \quad \& \quad E \leq 0{,}05 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9544$

$1-\alpha = 0{,}9544 \Rightarrow \alpha = 0{,}0456 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0228 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}9772 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}00$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05 \implies n \geq \left(2 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}05}\right)^2 = 400 \implies \boxed{n = 400 \text{ bolígrafos}}$$

b) $X : \mathcal{N}(2, 0{,}5) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(2, \frac{0{,}5}{\sqrt{16}} = 0{,}125)$

$$P\left(\overline{X} \geq \frac{30}{16}\right) = P(\overline{X} \geq 1{,}875) = P\left(Z \geq \frac{1{,}875-2}{0{,}125}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0{,}8413$$

Ejercicio 104

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) *En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este producto fueron los siguientes:*

$$40 \quad 45 \quad 38 \quad 44 \quad 41 \quad 40 \quad 35 \quad 50 \quad 40 \quad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) *A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

$X \equiv$ Consumo de agua (litros)

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}7) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \dfrac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = 41$

$$1-\alpha = 0{,}90 \implies \alpha = 0{,}10 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 3{,}64$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (37{,}36; 44{,}64)}$$

b) $n = 64 \quad \& \quad 2E = 5 \implies E = 2{,}5$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{64}} = 2{,}5 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}857 \xrightarrow{Tabla} 1-\alpha/2 = 0{,}9979$$

$$1-\alpha/2 = 0{,}9979 \implies \alpha/2 = 0{,}0021 \implies \alpha = 0{,}0042 \implies 1-\alpha = 0{,}9958 \implies 99{,}58\,\%$$

Ejercicio 105

El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{"Salario medio bruto anual (euros)"} \longrightarrow X : (\mu, 900)$$

a) $n = ?$ & $E \leq 200$ & $1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}056 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 200 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{900}{200}\right)^2 = 77{,}79 \implies \boxed{n = 78 \text{ euros}}$$

b) $X : \mathcal{N}(1889, 900) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1889, \dfrac{900}{\sqrt{64}} = 112{,}5\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 1900\right) = P\left(Z \geq \frac{1900 - 1889}{112{,}5}\right) = P(Z \geq 0{,}098) = 1 - P(Z \leq 0{,}098)$$
$$= 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$$

Ejercicio 106

Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$ euros.

a) *Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.*

b) *A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 5100$

$$1 - \alpha = 0{,}90 \implies \alpha = 0{,}10 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{500}{\sqrt{100}} = 82{,}25$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (5017{,}75; 5182{,}25)}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \quad \& \quad n = 36 \quad \& \quad E = 160$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{500}{\sqrt{36}} = 160 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}92$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}92 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}9726 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0274 \Rightarrow \alpha = 0{,}0548 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9452$$

Ejercicio 107

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $\mu = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0{,}9940$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 20 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} < 20 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{60}{20}\right)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = 6\right)$

$$P(\overline{X} \leq 220) = P(Z < \frac{220 - \mu}{6}) = 0{,}9940 \xrightarrow{Tabla} 2{,}51 = \frac{220 - \mu}{6} \implies \boxed{\mu = 204{,}94}$$

Ejercicio 108

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarde en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximare por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26{,}9, 37{,}1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del $98{,}92\,\%$. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 36 minutos de media para completar el recorrido.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad I.C.(26{,}9, 37{,}1) \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9892$

$$1-\alpha = 0{,}9892 \Rightarrow \alpha = 0{,}0108 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0054 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}9946 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}55$$

$$\overline{x} = \frac{26{,}9+37{,}1}{2} = 32$$

$$E = \frac{37{,}1-26{,}9}{2} = 5{,}1$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}55\cdot\frac{10}{\sqrt{n}} = 5{,}1 \implies n > \left(2{,}55\cdot\frac{10}{5{,}1}\right)^2 \implies \boxed{n = 25}$$

b) $X : \mathcal{N}(30, 10) \xrightarrow{n=160} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2{,}5\right)$

$$\begin{aligned} P(25 \le \overline{X} \le 35) &= P(\frac{25-30}{2{,}5} < Z < \frac{35-30}{2{,}5}) = P(-2 \le Z \le 2) \\ &= P(Z\le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - P(Z \ge 2) \\ &= P(Z \le 2) - \left[1 - P(Z\le 2)\right] = 2P(Z\le 2) - 1 \xrightarrow{Tabla} \\ &= 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544 \end{aligned}$$

Ejercicio 109

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}1) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 30$

$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}25 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4{,}38$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (25{,}62; 34{,}38)}$

b) $X : \mathcal{N}(28, 10) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = 3{,}16\right)$

$$P\left(28 \le \overline{X} \le 30\right) = P\left(\frac{28-28}{3{,}16} \le Z \le \frac{30-28}{3{,}16}\right) = P(0 \le Z \le 0{,}63)$$
$$= P(Z \le 0{,}63) - P(Z \le 0) = 0{,}7357 - 0{,}5 = 0{,}2357$$

Ejercicio 110

Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar un muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 100 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} < 100 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{300}{100}\right)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 300) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{300}{\sqrt{50}} = 42{,}43\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 2700\right) = P\left(Z \geq \frac{2700-3000}{42{,}43}\right) = P(Z \geq -7{,}07) = P(Z \leq 7{,}07) \simeq 1$$

Ejercicio 111

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117{,}3444; 124{,}6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Consumo de pan (kg)"

$$X : \mathcal{N}(120, 20) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}\left(120, \frac{20}{\sqrt{36}} = 3{,}33\right)$$

$$P(\overline{X} < 125) = P\left(Z < \frac{125 - 120}{3{,}33}\right) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$$

b) $n = 81 \quad \& \quad I.C.(117{,}3444; 124{,}6556)$

$$\overline{x} = \frac{117{,}3444 + 124{,}6556}{2} = 121 \qquad \& \qquad E = \frac{124{,}6556 - 117{,}3444}{2} = 3{,}6556$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{3{,}6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1{,}645 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}95$$

$$1 - \alpha/2 = 0{,}95 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0{,}9 = 90\,\%}$$

Ejercicio 112

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) *Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.*

b) *Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución. $X \equiv$ "Peso barra mantequilla (gr)" & $X : \mathcal{N}(\mu, 4)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 254$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} = 2{,}024$$

$$I.C_{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{E} + E) \implies \boxed{I.C_{95\,\%}(\mu) = (251{,}98; 256{,}02)}$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 4) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}(250, 0{,}8)$

$$P(\overline{X} \geq 248) = P\left(Z \geq \frac{248-250}{0{,}8}\right) = P(Z \geq -2{,}5) = P(Z < 2{,}5) = 0{,}9938$$

Ejercicio 113

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los huevos (gr)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 60$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 3{,}506$$

$$I.C_{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C_{95\,\%}(\mu) = (56{,}494; 63{,}506)}$$

b) $X : \mathcal{N}(59, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(59, \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right)$

$$\begin{aligned} P(57 < \overline{X} < 61) &= P\left(\frac{57-59}{8/\sqrt{10}} < Z < \frac{61-59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0{,}79 < Z < 0{,}79) \\ &= P(Z < 0{,}79) - P(Z < -0{,}79) = P(Z < 0{,}79) - P(Z > 0{,}79) \\ &= P(Z < 0{,}79) - \big[1 - P(Z < 0{,}79)\big] = 2 \cdot P(Z < 0{,}79) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}7852 - 1 = 0{,}5704 \end{aligned}$$

Ejercicio 114

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo para hacer el test (minuotos)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (1{,}96 \cdot 3)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(32, 3) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}\left(32, \dfrac{3}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}(32, 0{,}75)$

$$P(\overline{X} < 30{,}5) = P\left(Z < \frac{30{,}5 - 32}{0{,}75}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Ejercicio 115

El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0,25 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2,9 horas si $\mu = 2{,}75$ horas.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(2{,}9388, 3{,}0613)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(2{,}75, 0{,}25) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2{,}75, \dfrac{0{,}25}{\sqrt{25}} = 0{,}05\right)$

$$P\left(\overline{X} < 2{,}9\right) = P\left(Z < \frac{2{,}9 - 2{,}75}{0{,}05}\right) = P(Z < 3) = 0{,}9987$$

b) $n = 64 \qquad \& \qquad IC = (2{,}9388, 3{,}0623)$

$$E = \frac{3{,}0623 - 2{,}9388}{2} = 0{,}06125 \xrightarrow{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0{,}25}{\sqrt{64}} = 0{,}06125 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}95}$$

Ejercicio 116

Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) *Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 98 % para estimar μ.*

b) *Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 6) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 44$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{6}{\sqrt{81}} = 1{,}0967$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (42{,}9033; 45{,}0967)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 3 \implies E \leq 1{,}5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \leq 1{,}5 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{6}{1{,}5}\right)^2 = 61{,}47 \implies \boxed{n = 62}$$

Ejercicio 117

Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) *Se toma una muestra aleatoria de tamaño* 20 *y se obtiene que su media muestral es* 50 *kg. Determine un intervalo de confianza del* 99 % *para el peso medio de un saco de cemento.*

b) *Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que* 1 *kilogramo con un nivel de confianza del* 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los sacos de cemento (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 50$

$$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1{,}15$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (48{,}85; 51{,}15)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10{,}82 \implies \boxed{n = 11}$$

Ejercicio 118

Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73{,}8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=10} I.C.(58{,}2; 73{,}8)$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = \frac{73{,}8 - 58{,}2}{2} = 7{,}8 \implies E = 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 7{,}8 \implies \boxed{\sigma = 12{,}58}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 6{,}32\right)$

$$P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) = P\left(\frac{-10}{6{,}32} < Z < \frac{10}{6{,}32}\right) = P(-1{,}58 < Z < 1{,}58)$$

$$= P(Z < 1{,}58) - P(Z < -1{,}58) = P(Z < 1{,}58) - P(Z > 1{,}58)$$

$$= P(Z < 1{,}58) - \left[1 - P(Z < 1{,}58)\right] = 2 \cdot P(Z < 1{,}58) - 1$$

$$= 2 \cdot 0{,}9429 - 1 = 0{,}8858$$

Ejercicio 119

El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de palomitas (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 200$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4{,}38$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (195{,}62; 204{,}38)}$$

b) $n =?$ & $E < 0{,}5$ & $1 - \alpha = 0{,}9$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \Rightarrow n > \left(1{,}645 \cdot \frac{10}{0{,}5}\right)^2 = 1082{,}41 \Rightarrow \boxed{n = 1083}$$

Ejercicio 120

Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.

a) Determine el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}5) \qquad \& \qquad I.C. = (11{,}0703; 12{,}9297)$

$$\overline{x} = \frac{11{,}0703 + 12{,}9297}{2} = 12$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}5) \xrightarrow{n=10} 1 - \alpha = ?$

$$E = \frac{12{,}9297 - 11{,}0703}{2} = 0{,}9297$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{10}} = 0{,}9297 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}975$$

$$1 - \alpha/2 = 0{,}975 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \boxed{1 - \alpha = 0{,}95}$$

Navarra

Ejercicio 121

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos:

49,8   34,4   42,1   55,7   54,9   53   54,6   53,3   68,9   42,4

i) *Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.*

ii) *Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad.*

(Escriba lass fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto por cliente en un supermercado (€)”} \xrightarrow{\sigma^2=64} X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{49{,}8+34{,}4+42{,}1+55{,}7+54{,}9+53+54{,}6+53{,}3+68{,}9+42{,}4}{10} = 50{,}91$

$1-\alpha = 0{,}93 \implies \alpha = 0{,}07 \implies \alpha/2 = 0{,}035 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}965 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}81$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}81 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{10}} = 4{,}58$

$I.C._{93\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{93\,\%}(\mu) = (46{,}33; 55{,}49)}$

b) $n = ?$ & $E' = \dfrac{E}{2} = \dfrac{4{,}58}{2} = 2{,}29$ & $1 - \alpha = 0{,}93$

$E' = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}81 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{n}} = 2{,}29 \implies n = \left(1{,}81 \cdot \dfrac{8}{2{,}29}\right)^2 = 39{,}98 \implies \boxed{n = 40}$

Ejercicio 122

El consumo energético mensual (en kWh) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400*. Se elige una muestra de* 64 *hogares, obteniéndose una suma total del consumo de* 17280 *kWh.*

I) *Calcule un intervalo de confianza al* 92 % *para el consumo energético medio en hogares.*

II) *Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo se reduzca a la mitad.*

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo mensual (kWh)”} \xrightarrow{\sigma^2=400} X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

I) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = \dfrac{17280}{64} = 270$

$1 - \alpha = 0{,}92 \implies \alpha = 0{,}08 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}04 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}75$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}75 \cdot \dfrac{20}{\sqrt{64}} = 4{,}375$

$I.C._{92\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{92\,\%}(\mu) = (265{,}625; 274{,}375)}$

II) $n = ? \qquad \& \qquad E' = \dfrac{E}{2} = \dfrac{4{,}375}{2} = 2{,}1875 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}92$

$E' = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}75 \cdot \dfrac{20}{\sqrt{n}} = 2{,}1875 \implies n = \left(1{,}75 \cdot \dfrac{20}{2{,}1875}\right)^2 \implies \boxed{n = 256}$

Intervalo de confianza para p

Andalucia

Ejercicio 123

Se quiere estudiar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en una determinada población. Para ello, se elige una muestra al azar de 1000 ciudadanos, revelándose que el 15 % de ellos están enfermos.

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 95 %, para estimar la proporción real de enfermos de COVID-19 en dicha población.

b) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en esa población sea inferior al 1 %.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque D - Suplente)

Solución.

a) $n = 1000 \quad \& \quad \hat{p} = 0{,}15 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}85 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{1000}} = 0{,}0221$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}1279; 0{,}1721)}$$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 0{,}01 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}} < 0{,}01 \implies n \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}01}\right)^2 \cdot 0{,}15\cdot 0{,}85 = 4898{,}04$$

$$\implies \boxed{n = 4899}$$

Ejercicio 124

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 *de estos residentes, obteniéndose que* 115 *estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.*

a) Calcule un intervalo de confianza al 99,5 %*, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.*

b) Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %*.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque D - Extraordinario)

Solución.

a) $n = 250 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{115}{2500} = 0{,}46 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}54 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}995$

$$1-\alpha = 0{,}995 \implies \alpha = 0{,}005 \implies \alpha/2 = 0{,}0025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}9975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}81$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}81 \cdot \sqrt{\frac{0{,}46 \cdot 0{,}54}{250}} = 0{,}0886$$

$$I.C._{99{,}5\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{99{,}5\,\%}(p) = (0{,}3714; 0{,}5486)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}05 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}995$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}81 \cdot \sqrt{\frac{0{,}46 \cdot 0{,}54}{n}} < 0{,}05 \implies n > \left(\frac{2{,}81}{0{,}05}\right)^2 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}54 = 784{,}56$$

$$\implies \boxed{n = 785}$$

Ejercicio 125

Para un estudio acerca del uso del transporte público en una ciudad, se selecciona una muestra aleatoria de 500 individuos, obteniéndose que 175 de ellos lo usan.

a) Halle un intervalo de confianza al 94 % para estimar la proporción real de individuos que usan el transporte público en esa ciudad.

b) Manteniendo la proporción muestral, ¿cuántos individuos se deberían seleccionar como mínimo, para que, con un nivel de confianza del 97 %, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 2 %?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque D - Reserva)

Solución.

a) $n = 500 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{175}{500} = 0{,}35 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}65 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}94$

$$1 - \alpha = 0{,}94 \implies \alpha = 0{,}06 \implies \alpha/2 = 0{,}03 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}97 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}88$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1{,}88 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{500}} = 0{,}0401$$

$$I.C._{94\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{94\,\%}(p) = (0{,}3099; 0{,}3901)}$$

b) $n = ? \quad \& \quad E \leq 0{,}02 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}97$

$$1 - \alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies \alpha/2 = 0{,}015 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{n}} \leq 0{,}02 \implies n \geq \left(\frac{2{,}17}{0{,}02}\right)^2 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 2678{,}19$$

$$\implies \boxed{n = 2679}$$

Ejercicio 126

Un taller desea estimar el grado de satisfacción de sus clientes. para ello, a 120 clientes seleccionados al azar, les pregunta si volverían a solicitar sus servicios en caso de necesitarlo, de los que 96 respondieron que sí lo harían.

a) Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de clientes de este taller que volverían a solicitar sus servicios.

b) Mediante una nueva muestra queremos estimar la proporción de clientes de ese taller que volverían a solicitar sus servicios con un error máximo del 5 % y un nivel de confianza del 97 %. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, ¿qué tamaño mínimo debe tener dicha muestra?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Reserva)

Solución.

a) $n = 120 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{96}{120} = 0{,}8 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}2 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{120}} = 0{,}0716$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}7284; 0{,}8716)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}05 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}97$

$$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies \alpha/2 = 0{,}015 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{n}} < 0{,}05 \implies n \geq \left(\frac{2{,}17}{0{,}05}\right)^2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 301{,}37$$

$$\implies \boxed{n = 302}$$

Ejercicio 127

> *Se desea estimar la proporción de personas mayores de 45 años de una determinada ciudad que tienen presbicia (vista cansada). Para ello, se toma una muestra aleatoria de 540 personas mayores de 45 años, obteniéndose que 378 tienen presbicia.*
>
> *a) Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97 %, para estimar la proporción poblacional de personas mayores de 45 años con presbicia en dicha ciudad.*
>
> *b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuántas personas se deberán seleccionar como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 3 %?*
>
> *(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Suplente)*

Solución.

a) $n = 540 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{378}{5400} = 0{,}7 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}3 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}97$

$$1-\alpha = 0{,}97 \implies \alpha = 0{,}03 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}015 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{540}} = 0{,}0428$$

$$I.C._{97\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(p) = (0{,}6572; 0{,}7428)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}3 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}97$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{n}} < 0{,}03 \implies n \geq \left(\frac{2{,}17}{0{,}03}\right)^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1098{,}94$$

$$\implies \boxed{n = 1099}$$

Ejercicio 128

Se desea estimar la proporción de estudiantes de una universidad que proceden de otras provincias, para ello se selecciona una muestra de tamaño 2100 de los que 630 lo cumplen.

a) Calcule un intervalo de confianza con un nivel del 97,5 % para estimar la proporción poblacional de estudiantes de esa universidad procedentes de otras provincias.

b) En una nueva muestra que mantiene la misma proporción muestral, y con el mismo nivel de confianza, queremos que el error máximo cometido sea de 0,01. Halle su tamaño mínimo.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque D - Reserva)

Solución.

a) $n = 2100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{630}{2100} = 0{,}3 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}7 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}975$

$$1 - \alpha = 0{,}975 \Rightarrow \alpha = 0{,}025 \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}0125 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}9875 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}24$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}24 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{2100}} = 0{,}0224$$

$$I.C._{97{,}5\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{97{,}5\,\%}(p) = (0{,}2776; 0{,}3224)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}01 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}975$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}24 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}} < 0{,}01 \implies n \geq \left(\frac{2{,}24}{0{,}01}\right)^2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 10536{,}96$$

$$\implies \boxed{n = 10537}$$

Ejercicio 129

Se desea estimar la proporción de jóvenes de una localidad que están suscritos a una determinada plataforma de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 *jóvenes de los que* 36 *afirman estar suscritos a dicha plataforma.*

a) Determine un intervalo de confianza, con un nivel del 92 %*, para la proporción de jóvenes que están suscritos a esta plataforma.*

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño muestral mínimo que se debería tomar si se quisiera que el error máximo fuera 0,025.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Proporción de suscritos a la plataforma de televisión)”}$$

a) $n = 100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{36}{100} = 0{,}36 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}64 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}92$

$$1-\alpha = 0{,}92 \implies \alpha = 0{,}08 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}04 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}75$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}75 \cdot \sqrt{\frac{0{,}36\cdot 0{,}64}{100}} = 0{,}084$$

$$I.C._{92\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{92\,\%}(p) = (0{,}276; 0{,}444)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}025 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}92$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}755\cdot\sqrt{\frac{0{,}36\cdot 0{,}64}{n}} < 0{,}025 \Rightarrow n \geq \left(\frac{1{,}75}{0{,}025}\right)^2 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}64 = 1128{,}96$$

$$\implies \boxed{n = 1129}$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 130

Un determinado partido político desea estimar la proporción de votantes, p, que actualmente se decantaría por él.

a) Asumiendo que $p = 0{,}5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de votantes para garantizar que, con una confianza del $90\,\%$, el margen de error en la estimación no supera el $2\,\%$ ($\pm 2\,\%$).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 1200 votantes de los cuales 240 afirmaron que votarían por el partido en cuestión. Obténgase un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la proporción de votantes de ese partido en la población.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C. = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

a) $n = ? \quad \& \quad E \leq 0{,}02 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}90$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} \leq 0{,}02 \implies n \geq \left(\frac{1{,}645\cdot 0{,}5}{0{,}02}\right)^2 = 1691{,}27$$

$$\implies \boxed{n = 1692}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{240}{1200} = 0{,}2 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}8 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{1200}} = 0{,}023$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}1774, 0{,}2226)}$$

Ejercicio 131

Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3 % (±3 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

El intervalo de confianza para una proporción es el siguiente:

$$I.C. = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0{,}03$, siendo $1-\alpha = 0{,}95$ y $\hat{p} = 0{,}5$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E \leq 0{,}03 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \leq 0{,}03 \implies 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} \leq 0{,}03$$

$$\implies n \geq \left(\frac{1{,}96\cdot 0{,}5}{0{,}03}\right)^2 = 1067{,}11 \text{ y por tanto } \boxed{n = 1068}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{90}{450} = 0{,}2 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}8 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{450}} = 0{,}031$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p}-E; \hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0{,}169, 0{,}231)}$$

Ejercicio 132

Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes, P, que estarían dispuestos a contratarlo.

a) *Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}5$, Determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del $95\,\%$, el margen de error en la estimación no supere el $2\,\%$ ($\pm 2\,\%$).*

b) *Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del $90\,\%$ para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C. = \hat{p} \pm E, \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0{,}02$, siendo $1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tablaa} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E \leq 0{,}02 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \leq 0{,}02 \implies 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} \leq 0{,}02$$

$$\implies n \geq \left(\frac{1{,}96\cdot 0{,}5}{0{,}02}\right)^2 = 2401 \quad \text{y por tanto} \quad \boxed{n = 2401 \text{ encuestados}}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{85}{500} = 0{,}17 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}83 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}10 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = \hat{p}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 0{,}17\pm 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}17\cdot 0{,}83}{500}} \implies \boxed{I.C_{90\,\%}(p) = (0{,}1424; 0{,}1976)}$$

Ejercicio 133

Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0{,}22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 habían faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $p = 0{,}22 \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}99 \quad \& \quad \varepsilon < 0{,}04$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < 0{,}04 \implies n > \left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sqrt{pq}}{0{,}04}\right)^2 = \left(2{,}575\cdot\frac{\sqrt{0{,}22\cdot 0{,}78}}{0{,}04}\right)^2 = 711{,}13$$

Luego $\boxed{n = 712 \text{ trabajadores}}$

b) $n = 1000 \quad \& \quad p = \dfrac{250}{1000} = 0{,}25 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}25\cdot 0{,}75}{1000}} = 0{,}0268$$

$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}2231; 0{,}2768)}$

Ejercicio 134

En las especificaciones de una máquina tragaperras se establece que la proporción P de veces que la máquina devuelve algo a quien la use es $1/4$.

a) Utilice la aproximación por la distribución normal para calcular la probabilidad de obtener al menos 20 devoluciones de 100 veces que se juega.

b) Sin tomar en cuenta las especificaciones, si en 100 juegos la máquina devolvió algo al jugador sólo en 15 ocasiones, calcúlese un intervalo de confianza del $99\,\%$ para la proporción P.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{B}(100, {}^1\!/_4) \begin{cases} n > 10 \\ np = 100 \cdot {}^1\!/_4 = 25 > 5 \\ nq = 100 \cdot {}^3\!/_4 = 75 > 5 \end{cases} \xrightarrow{Yates} Y : \mathcal{N}\Big(np = 25, \sqrt{npq} = 4{,}33\Big)$

$$P(X \geq 20) = P(Y > 19{,}5) = P\left(Z > \frac{19{,}5 - 25}{4{,}33}\right) = P(Z > -1{,}27)$$
$$= P(Z < 1{,}27) = 0{,}9880$$

b) $\hat{p} = \dfrac{15}{100} = 0{,}15 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}85 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}99$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^\alpha\!/_2 = 0{,}005 \implies 1-{}^\alpha\!/_2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}} = 0{,}092$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}058; 0{,}242)}$$

Ejercicio 135

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) *Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.*

b) *Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $n = 500 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{320}{500} = 0{,}64 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}36 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}96$

$$1 - \alpha = 0{,}96 \implies \alpha = 0{,}04 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}02 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}98 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}055$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{500}} = 0{,}0441$$

$$I.C_{96\,\%}(p) = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{96\,\%}(p) = (0{,}5959; 0{,}6841)}$$

b) $p = 0{,}5 \quad \& \quad q = 1 - p = 0{,}5 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95 \quad \& \quad E \leq 0{,}05$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} \leq 0{,}05 \implies n \geq 384{,}16 \implies \boxed{n = 385}$$

Ejercicio 136

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0{,}2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$P \equiv \text{“Proporción de cajas grandes sobre el total”}$$

a) $n = ? \quad \& \quad p = 0{,}2 \quad \& \quad q = 1 - p = 0{,}8 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}99$

$$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{n}} \leq 0{,}08 \Longrightarrow n \geq 165{,}77 \Longrightarrow \boxed{n = 166}$$

b) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{25}{200} = 0{,}125 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}875 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{200}} = 0{,}046$$

$$I.C_{95\,\%}(P) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C_{95\,\%}(P) = (0{,}079; 0{,}171)}$$

Ejercicio 137

Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

a) Si la proporción poblacional fuese $P = 0{,}8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del $99\,\%$, el margen de error en la estimación no supera el $6\,\%$.

b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para la proporción de familias que tienen internet.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $n = ? \quad \& \quad p = 0{,}8 \implies q = 0{,}2 \quad \& \quad 2E < 0{,}06 \implies E < 0{,}03 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}99$

$$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}575\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{n}} \leq 0{,}06 \implies n \geq \left(\frac{2{,}575}{0{,}06}\right)^2 \cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 294{,}69$$

$$\implies \boxed{n = 295}$$

b) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{170}{200} = 0{,}85 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}15 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}85\cdot 0{,}15}{200}} = 0{,}0495$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}8005; 0{,}8995)}$$

Ejercicio 138

Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) *Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del $98{,}02\,\%$, el margen de error en la estimación no supera el $10\,\%$.*

b) *Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) $n = ? \quad \& \quad \hat{p} = 0{,}55 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}45 \quad \& \quad E < 0{,}1 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}9802$

$1 - \alpha = 0{,}9802 \implies \alpha = 0{,}0198 \implies \alpha/2 = 0{,}0099 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}9901 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}33$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{n}} < 0{,}1 \implies n \geq \left(\frac{2{,}33}{0{,}1}\right)^2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45 = 134{,}36$$

$$\implies \boxed{n = 135}$$

b) $n = 100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0{,}7 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}3 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{100}} = 0{,}0898$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}6102; 0{,}7898)}$$