MATEMATICAS II & CCSS

PROBABILIDAD TOTAL

https://aprendeconmigomelon.com

25 de mayo de 2022

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Probabilidad Total, entre los cuales se encuentran todos los que se han propuesto en los exámenes de Matemáticas aplicadas a las CCSS y en Matemáticas II de la EVAU de la Comunidad de Madrid de los últimos 22 años. En total más de 90 problemas resueltos que espero que te resulten de utilidad. He juntado en este libro los exámenes de Matemáticas CCSS y Matemáticas II porque el nivel es el mismo así que utiliza indistintamente unos y otros.

Índice general

Ejercicios de Probabilidad Total

Ejercicio 1

En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.

a) Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

b) Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo.

Solución.

Sean los sucesos:

$R \equiv$ "La silla tiene respaldo" $\qquad N \equiv$ "La silla es nueva"

1ª Forma: Tabla de Contingencia

Resolveremos el ejercicio mediante una tabla de contingencia en donde pondremos los datos y completaremos el resto (en azul).

	R	$\overline{R}$	**Total**
N	7	3	10
$\overline{N}$	23	7	30
Total	30	10	40

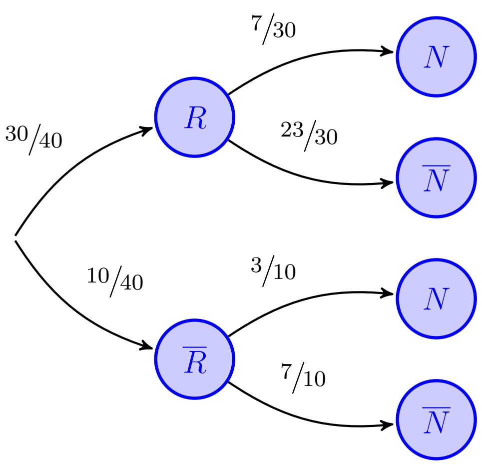
a) $P(N) = \dfrac{10}{40} = 0.25$

b) $P(\overline{R} \mid \overline{N}) = \dfrac{7}{30} = 0.2333$

2ª Forma: Diagrama de Árbol

$$P(R) = \frac{30}{40} \quad \& \quad P(R \cap N) = P(R) \cdot P(N \mid R) \Rightarrow P(N \mid R) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{7/40}{30/40} = \frac{7}{30}$$

$$P(\overline{R} \cap N) = P(\overline{R}) \cdot P(N \mid \overline{R}) \implies P(N \mid \overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap N)}{P(\overline{R})} = \frac{3/40}{1 - 30/40} = \frac{3}{10}$$



a) $$\begin{aligned} P(N) &= P\big((R \cap N) \cup (\overline{R} \cap N)\big) \\ &= P(R \cap N) + P(\overline{R} \cap N) \\ &= P(R) \cdot P(N \mid R) + P(\overline{R}) \cdot P(N \mid \overline{R}) \\ &= \frac{30}{40} \cdot \frac{7}{30} + \frac{10}{40} \cdot \frac{3}{10} = 0.25 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{R} \mid \overline{N}) &= \frac{P(\overline{R} \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{P(\overline{R}) \cdot P(\overline{N} \mid \overline{R})}{1 - P(N)} \\ &= \frac{10/40 \cdot 7/10}{1 - 0.25} = 0.2333 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

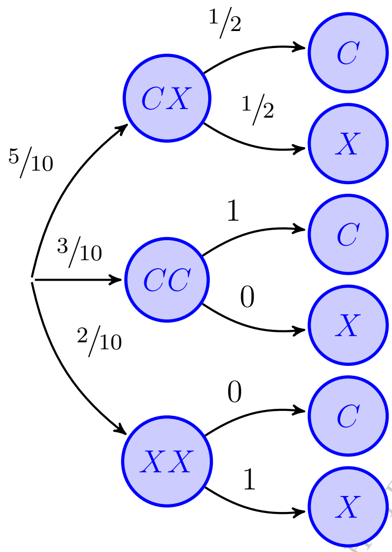
Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.

b) (1 punto) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

Solución.

$CX \equiv$ "Elegir una moneda con cara y cruz" $CC \equiv$ "Elegir una moneda con dos caras"
$XX \equiv$ "Elegir una moneda con dos cruces" $C \equiv$ "Salir cara en el lanzamiento"
$X \equiv$ "Salir curz en el lanzamiento"



a) $P(C) = P\Big((CX \cap C) \cup (CC \cap C) \cup (XX \cap C)\Big)$
$= (CX \cap C) + P(CC \cap C) + P(XX \cap C)$
$= P(CX) \cdot P(C \mid CX) + P(CC) \cdot P(C \mid CC)$
$+ P(XX) \cdot P(C \mid XX) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{1}{2}$
$+ \dfrac{3}{10} \cdot 1 + \dfrac{2}{10} \cdot 0 = \dfrac{11}{20}$

b) $P(CX \mid C) = \dfrac{P(CX \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(CX) \cdot P(C \mid CX)}{P(C)}$
$= \dfrac{1/2 \cdot 1/2}{11/20} = \dfrac{5}{11}$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se tiene tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

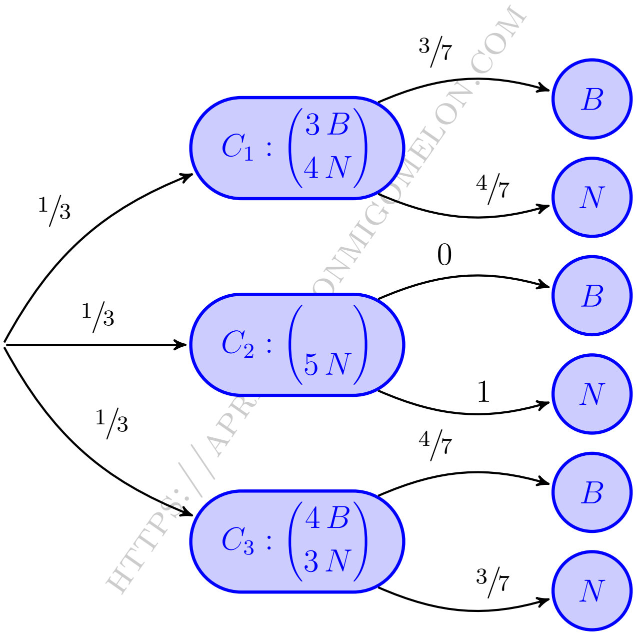
a) (1 punto) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) (1 punto) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

Solución.

Sean los sucesos:

$$C_i \equiv \text{“La bola extraída es de la caja i”}$$
$$B \equiv \text{“La bola extraída es blanca”}$$
$$N \equiv \text{“La bola extraída es negra”}$$



a) $P(N) = P\big((C_1 \cap N) \cup (C_2 \cap N) \cup (C_3 \cap N)\big) = P(C_1 \cap N) + P(C_2 \cap N) + P(C_3 \cap N)$

$$= P(C_1) \cdot P(N \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(N \mid C_2) + P(C_3) \cdot P(N \mid C_3)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

b) $P(C_2 \mid N) = \dfrac{P(C_2 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{P(C_2) \cdot P(N \mid C_2)}{P(N)} = \dfrac{1/3 \cdot 1}{2/3} = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Tenemos dos urnas A y B y una moneda trucada de manera que la probabilidad de sacar cara es tres veces la de sacar cruz. La urna A contiene 4 bolas rojas y 5 blancas. La urna B contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. Se lanza la moneda al aire. Si sale cara se pasa una bola de la urna A a la urna B, si sale cruz se pasa una bola de la urna B a la urna A. Se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La bola extraída sea blanca.

b) Sabiendo que la bola extraida es roja calcúlese la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda halla salido cruz.

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ "Ha salido cara en la moneda"	$X \equiv$ "Ha salido cruz en la moneda"
$b \equiv$ "Se pasa una bola blanca"	$r \equiv$ "Se pasa bola roja"
$B \equiv$ "Se extrae bola blanca de la urna B"	$R \equiv$ "Se extrae bola roja de la urna B"

Teniendo en cuenta que la moneda está trucada y que la probabilidad de sacar cara es tres veces la de sacar cruz:

$$\left.\begin{array}{l} P(C) = 3P(X) \\ P(C) + P(X) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3P(X) + P(X) = 1 \Longrightarrow 4P(X) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} P(C) = {}^{3}\!/\!_{4} \\ P(X) = {}^{1}\!/\!_{4} \end{cases}$$

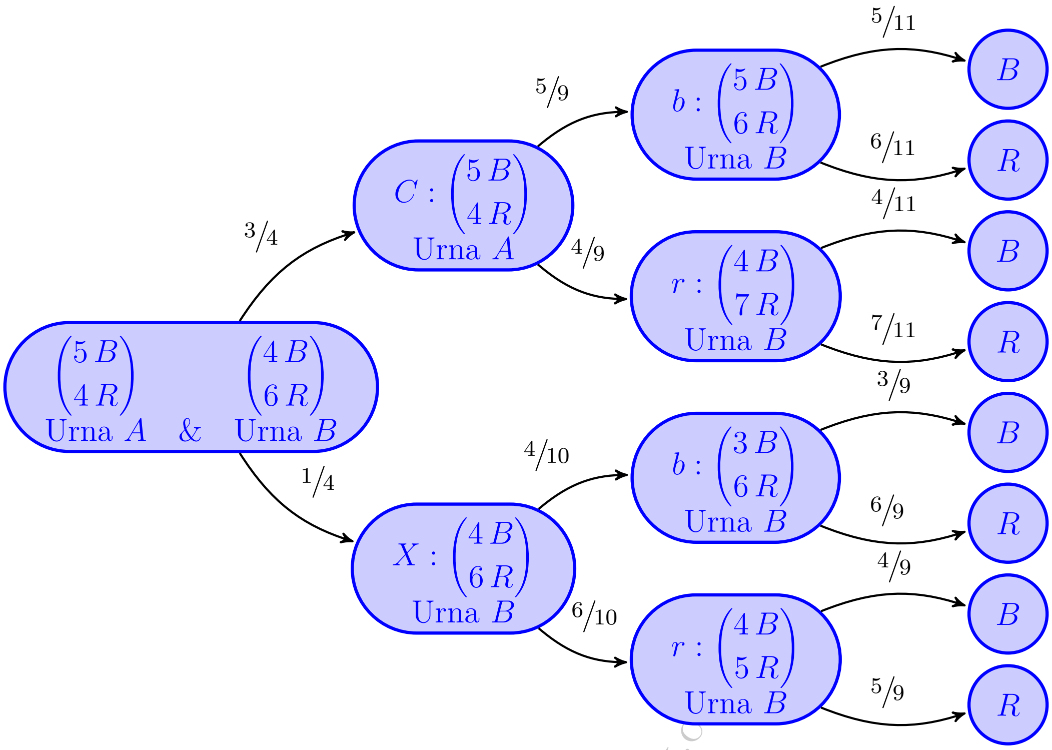
Si sale cara en la moneda pasamos una bola de la urna A a la urna B. La configuración de la urna B será:

$$C \Longrightarrow \begin{cases} P(b \mid C) = {}^{5}\!/\!_{9} \Longrightarrow \underset{\text{Urna } B}{\begin{pmatrix} 5B \\ 6R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap b) = {}^{5}\!/\!_{11} \\ P(R \mid C \cap b) = {}^{6}\!/\!_{11} \end{cases} \\ \\ P(r \mid C) = {}^{4}\!/\!_{9} \Longrightarrow \underset{\text{Urna } B}{\begin{pmatrix} 4B \\ 7R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap r) = {}^{4}\!/\!_{11} \\ P(R \mid C \cap r) = {}^{7}\!/\!_{11} \end{cases} \end{cases}$$

Mientras que si sale cruz pasamos una bola de la urna B a la urna A. La configuración de la urna B será:

$$X \Longrightarrow \begin{cases} P(b \mid C) = {}^{4}\!/\!_{10} \Longrightarrow \underset{\text{Urna}B}{\begin{pmatrix} 3B \\ 6R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap b) = {}^{3}\!/\!_{9} \\ P(R \mid C \cap b) = {}^{6}\!/\!_{9} \end{cases} \\ \\ P(r \mid C) = {}^{6}\!/\!_{10} \Longrightarrow \underset{\text{Urna}B}{\begin{pmatrix} 4B \\ 5R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap r) = {}^{4}\!/\!_{9} \\ P(R \mid C \cap r) = {}^{5}\!/\!_{9} \end{cases} \end{cases}$$

Conviene darse cuenta de que si sale cara la urna B, termina con una bola más que las iniciales 10 que tenía, mientras que si sale cruz, terminará con una bola menos.



a) $P(B) = P\big((C \cap b \cap B) \cup (C \cap r \cap B) \cup (X \cap b \cap B) \cup (X \cap r \cap B)\big)$

$$
\begin{aligned}
&= P(C \cap b \cap B) + P(C \cap r \cap B) + P(X \cap b \cap B) + P(X \cap r \cap B) \\
&= P(C \cap b) \cdot P(B \mid C \cap b) + P(C \cap r) \cdot P(B \mid C \cap r) \\
&+ P(X \cap b) \cdot P(B \mid X \cap b) + P(X \cap r) \cdot P(B \mid X \cap r) \\
&= P(C) \cdot P(b \mid C) \cdot P(B \mid C \cap b) + P(C) \cdot P(r \mid C) \cdot P(B \mid C \cap r) \\
&+ P(X) \cdot P(b \mid X) \cdot P(B \mid X \cap b) + P(X) \cdot P(r \mid X) \cdot P(B \mid X \cap r) \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{11} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0.411
\end{aligned}
$$

b) $P(X \mid R) = \dfrac{P(X \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P\big((X \cap b \cap R) \cup (X \cap r \cap R)\big)}{1 - P(B)}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(X \cap b \cap R) + P(X \cap r \cap R)}{1 - P(B)} \\
&= \frac{P(X) \cdot P(b \mid X) \cdot P(R \mid X \cap b) + P(X) \cdot P(r \mid X) \cdot P(R \mid X \cap r)}{1 - P(B)} \\
&= \frac{1/4 \cdot 4/10 \cdot 6/9 + 1/4 \cdot 6/10 \cdot 5/9}{1 - 0.411} = 0.2547
\end{aligned}
$$

Matemáticas CCSS - EVAU Madrid

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Si se escoge un número al azar en la guía telefónica de cierta ciudad española, la probabilidad de que sea nombre de un hombre es 0.7 y de que figure una mujer es 0.3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0.8 y de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un número de teléfono al azar.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una persona que trabaja?

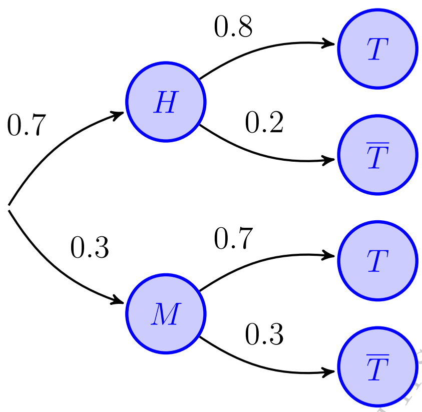
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2000 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$H = \text{“El número elegido es de un hombre”}$$
$$M = \text{“El número elegido es de una mujer”}$$
$$T = \text{“El propietario del número de teléfono trabaja”}$$



a) $P(T) = P\big((H \cap T) \cup (M \cap T)\big)$
$= P(H \cap T) + P(M \cap T)$
$= P(H) \cdot P(T \mid H) + P(M) \cdot P(T \mid M)$
$= 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.77$

b) $P(H \mid T) = \dfrac{P(H \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(H) \cdot P(T \mid H)}{P(T)}$
$= \dfrac{0.7 \cdot 0.8}{0.77} = 0.727$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

a) *(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?*

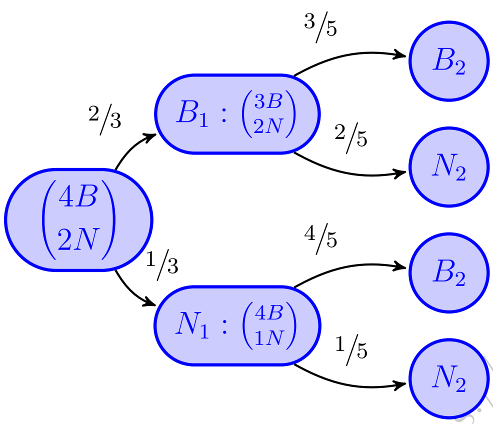
b) *(1 punto) Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2000 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$B_i = \text{“Sacar bola blanca en la extracción } i\text{”}$$
$$N_i = \text{“Sacar bola negra en la extracción } i\text{”}$$



a) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$

b) $$P(N_1 \mid N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1)}{P(N_2)} \overset{\circledast}{=} \frac{{}^1\!/_3 \cdot {}^1\!/_5}{{}^1\!/_3} = \frac{1}{5}$$

$$\circledast\ P(N_2) = P\Big((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap N_2)\Big) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P(N_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0.3; de que se remita al bufete B es 0.5 y de que se remita al bufete C es 0.2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0.6; para el bufete B esta probabilidad es de 0.8 y para el bufete C es 0.7.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.

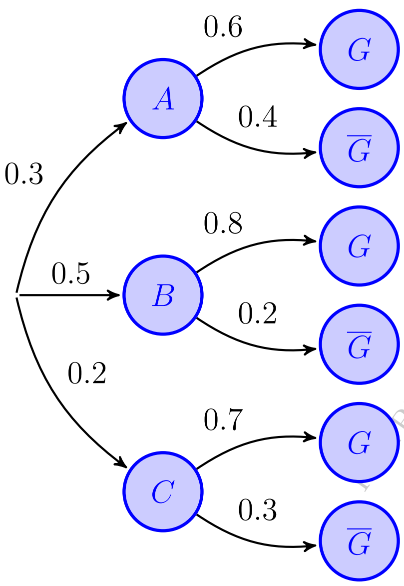
b) (1 punto) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2000 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El caso es tratado por el bufete A" $\quad B =$ "El caso es tratado por el bufete B"
$C =$ "El caso es tratado por el bufete C" $\quad G =$ "El caso es ganado"



a) $$\begin{aligned} P(G) &= P\big((A\cap G)\cup(B\cap G)\cup(C\cap G)\big) \\ &= P(A\cap G)+P(B\cap G)+P(C\cap G) \\ &= P(A)\cdot P(G\mid A)+P(B)\cdot P(G\mid B) \\ &+P(C)\cdot P(G\mid C) \\ &= 0.3\cdot 0.6+0.5\cdot 0.8+0.2\cdot 0.7=0.72 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A\mid G) &= \frac{P(A\cap G)}{P(G)}=\frac{P(A)\cdot P(G\mid A)}{P(G)} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.6}{0.72}=0.25 \end{aligned}$$

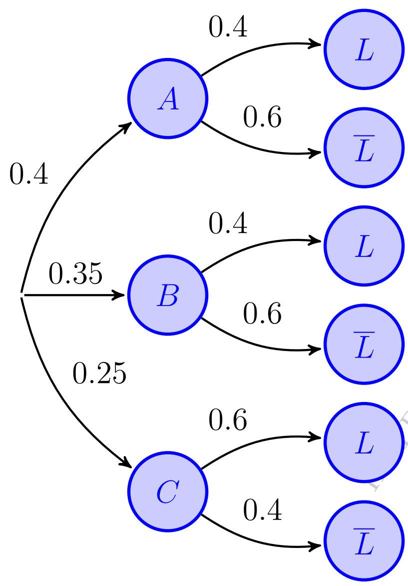
Ejercicio 8 (2 *puntos*)

> *En una ciudad la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0.4; la probabilidad de que vote al partido B es 0.35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0.25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0.4; 0.4 y 0.6. Se elige una persona de la ciudad al azar:*
>
> *a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.*
>
> *b) (1 punto) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2001 - Opción A)*

Solución.

Sean los sucesos

A = "La persona es votante del partido A" B = "La persona es votante del partido B"
C = "La persona es votante del partido C" L = "La persona lee diariamente el periódico"



$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad P(L) &= P\big((A\cap L)\cup(B\cap L)\cup(C\cap L)\big)\\
&= P(A\cap L)+P(B\cap L)+P(C\cap L)\\
&= P(A)\cdot P(L\mid A)+P(B)\cdot P(L\mid B)\\
&\quad + P(C)\cdot P(L\mid C)\\
&= 0.4\cdot 0.4+0.35\cdot 0.4+0.25\cdot 0.6=0.45
\end{aligned}$$

$$\text{b)}\quad P(B\mid L)=\frac{P(B\cap L)}{P(B)}=\frac{P(B)\cdot P(L\mid B)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.35\cdot 0.4}{0.45}=0.311$$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diésel. Sabemos que el 60 % de los modelos son del tipo A y el 30 % del tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diésel, el 30 % de los coches del modelo A son de tipo diésel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diésel.
Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) (0.5 puntos) El coche es del modelo C.

b) (0.75 puntos) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diésel

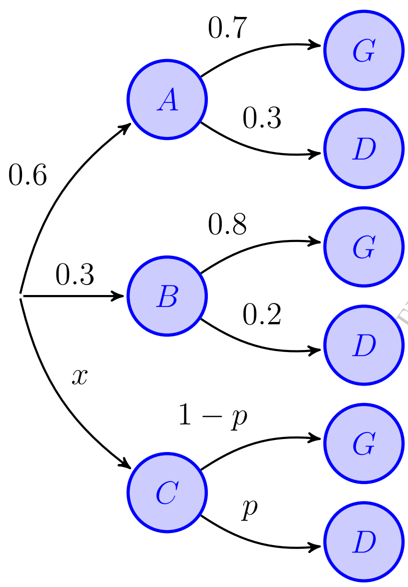
c) (0.75 puntos) El coche tiene motor diésel, sabiendo que es del modelo C

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2001 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

A = "El coche es del modelo A"
B = "El coche es del modelo B"
C = "El coche es del modelo C"
G = "El coche tiene motor de gasolina"
D = "El coche tiene motor diésel"



a) $P(C) = 1-\big(P(A)+P(B)\big) = 1-(0.6+0.3) = 0.1$

b) $P(A \mid D) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A)\cdot P(D\mid A)}{P(D)}$

$$= \frac{0.6\cdot 0.3}{0.3} = 0.6$$

c)
$$\begin{aligned} P(D) &= P\big((A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)\big)\\ &= P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)\\ &= P(A)\cdot P(D\mid A)+P(B)\cdot P(D\mid B)\\ &+ P(C)\cdot P(D\mid C)\\ &= 0.6\cdot 0.3+0.3\cdot 0.2+0.1\cdot p = 0.3\\ &\Longrightarrow\ p = 0.6 \ \Longrightarrow\ P(D\mid C) = 0.6 \end{aligned}$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0.01 para A, de 0.02 para B y de 0.03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2001 - Opción B)

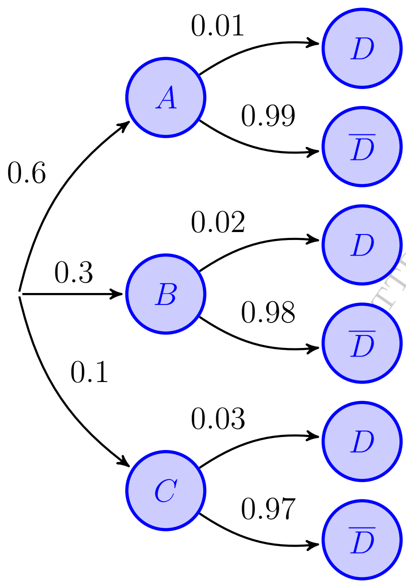
Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El tornillos es de la fábrica A" $\quad$ $B =$ "El tornillos es de la fábrica A"

$C =$ "El tornillos es de la fábrica A" $\quad$ $D =$ "El tornillo es defectuoso"

$$P(A) = \frac{}{1000} \quad \& \quad P(B) = \frac{300}{1000} = 0.3 \quad \& \quad P(C) = \frac{100}{1000} = 0.1$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P\Big((A\cap\overline{D})\cup(B\cap\overline{D})\cup(C\cap\overline{D})\Big) \\ &= P(A\cap\overline{D}) + P(B\cap\overline{D}) + P(C\cap\overline{D}) \\ &= P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{D}\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(\overline{D}\mid C) \\ &= 0.6\cdot 0.99 + 0.3\cdot 0.98 + 0.1\cdot 0.97 = 0.985 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A\mid\overline{D}) &= \frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A)}{P(\overline{D})} \\ &= \frac{0.6\cdot 0.99}{0.985} = 0.603 \end{aligned}$$

Ejercicio 11 (2 *puntos*)

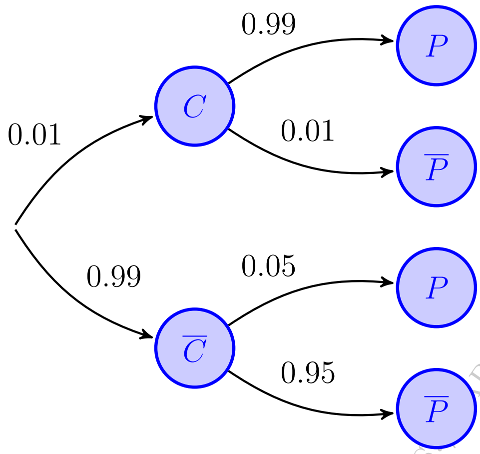
Una prueba para determinar cierta contaminación del agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0.05 de falsos positivos, esto es, casos en los que el agua está libre de contaminación pero el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0.99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0.99. Si se realizara una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2002 - Opción B)
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2003 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$C = \text{“El agua está contaminada”}$$
$$P = \text{“El test es positivo en contaminación”}$$



$$P(\overline{C} \mid P) = \frac{P(\overline{C} \cap P)}{P(P)} = \frac{P(\overline{C}) \cdot P(P \mid \overline{C})}{P(P)}$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{0.99 \cdot 0.05}{0.0594} = 0.8333$$

$$\circledast\ P(P) = P\Big((C \cap P) \cup (\overline{C} \cap P)\Big)$$
$$= P(C \cap P) + P(\overline{C} \cap P)$$
$$= P(C) \cdot P(P \mid C) + P(\overline{C}) \cdot P(P \mid \overline{C})$$
$$= 0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.05 = 0.0594$$

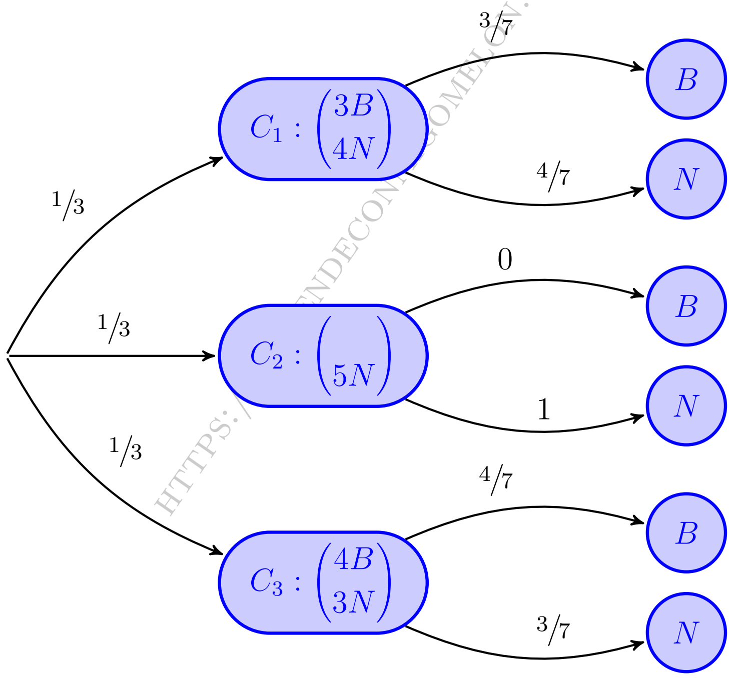
Ejercicio 12 (2 *puntos*)

> *Se tiene tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.*
>
> *a) (1 punto) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?*
>
> *b) (1 punto) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2002 - Opción A)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$C_i \equiv \text{“La bola extraída es de la caja i”}$$
$$B \equiv \text{“La bola extarída es blanca”}$$
$$N \equiv \text{“La bola extraída es negra”}$$



a) $P(N) = P\Big((C_1 \cap N) \cup (C_2 \cap N) \cup (C_3 \cap N)\Big) = P(C_1 \cap N) + P(C_2 \cap N) + P(C_3 \cap N)$

$$= P(C_1) \cdot P(N \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(N \mid C_2) + P(C_3) \cdot P(N \mid C_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

b) $P(C_2 \mid N) = \dfrac{P(C_2 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{P(C_2) \cdot P(N \mid C_2)}{P(N)} = \dfrac{1/3 \cdot 1}{2/3} = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 13 (2 *puntos*)

Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las ventas pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?

b) (1 punto) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

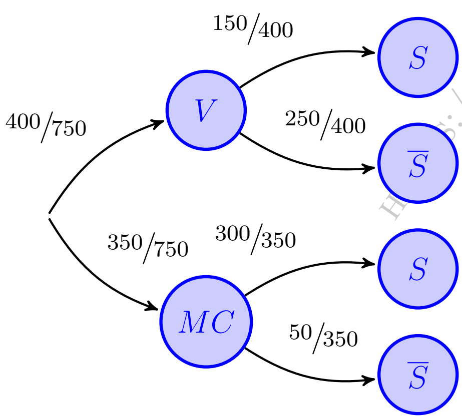
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2002 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$\begin{aligned} V &= \text{“La compra se ha pagado con la tarjeta } V\text{”} \\ MC &= \text{“La compra se ha pagado con la tarjeta } MC\text{”} \\ S &= \text{“La compra supera los 150 euros”} \end{aligned}$$

1ª Forma: Diagrama de árbol



a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\big((V\cap S)\cup(MC\cap S)\big) \\ &= P(V\cap S)+P(MC\cap S) \\ &= P(V)\cdot P(S\mid V)+P(MC)\cdot P(S\mid MC) \\ &= \frac{400}{750}\cdot\frac{150}{400}+\frac{350}{750}\cdot\frac{300}{350}=\frac{3}{5} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(MC\mid\overline{S}) &= \frac{P(MC\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} \\ &= \frac{P(MC)\cdot P(\overline{S}\mid MC)}{1-P(S)} \\ &= \frac{{}^{350}/_{750}\cdot{}^{50}/_{350}}{1-{}^{3}/_{5}}={}^{1}/_{6} \end{aligned}$$

2ª Forma: Tabla de contingencia

	V	MC	Total
S	150	300	450
$\overline{S}$	250	50	300
Total	400	350	750

a) $P(S)=\dfrac{450}{750}=\dfrac{3}{5}$

b) $P(MC\mid\overline{S})=\dfrac{50}{300}=\dfrac{1}{6}$

Ejercicio 14 (2 *puntos*)

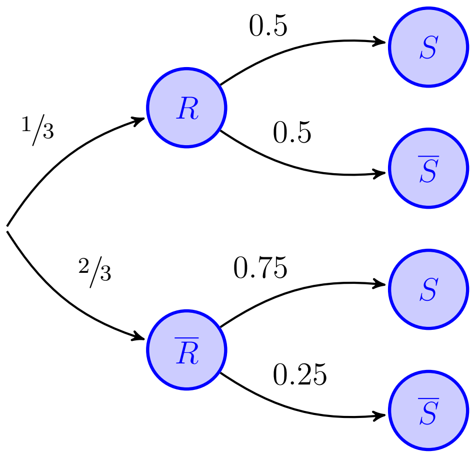
Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0.25. La probabilidad de no regar el rosal es $^2/_3$. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2003 - Opción A)
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2004 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$R = \text{“El rosal es regado”}$$
$$S = \text{“El rosal se seca”}$$



$$P(\overline{R} \mid S) = \frac{P(\overline{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\overline{R}) \cdot P(S \mid \overline{R})}{P(S)}$$
$$\overset{\circledast}{=} \frac{^2/_3 \cdot 0.75}{^2/_3} = \frac{3}{4}$$

$$\circledast \; P(S) = P\Big((R \cap S) \cup (\overline{R} \cap S)\Big)$$
$$= P(R \cap S) + P(\overline{R} \cap S)$$
$$= P(R) \cdot P(S \mid R) + P(\overline{R}) \cdot P(S \mid \overline{R})$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 0.5 + \frac{2}{3} \cdot 0.75 = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 15 (2 *puntos*)

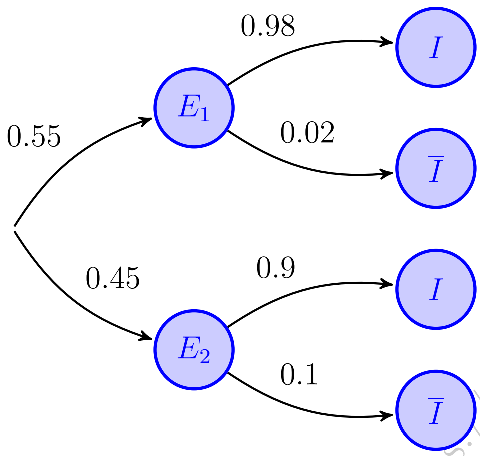
Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0.55 y por E_2 es 0.45. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar a indemnización es 0.98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2004 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{“La peritación ha sido realizada por } E_1\text{”} \\ E_2 &= \text{“La peritación ha sido realizada por } E_2\text{”} \\ I &= \text{“La peritación ha dado lugar a indemnización”} \end{aligned}$$



$$P(E_2 \mid I) = \frac{P(E_2 \cap I)}{P(I)} = \frac{P(E_2) \cdot P(I \mid E_2)}{P(I)}$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{0.45 \cdot 0.9}{0.944} = 0.429$$

$$\begin{aligned} \circledast\ P(I) &= P\big((E_1 \cap I) \cup (E_2 \cap I)\big) \\ &= P(E_1 \cap I) + P(E_2 \cap I) \\ &= P(E_1) \cdot P(I \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(I \mid E_2) \\ &= 0.55 \cdot 0.98 + 0.45 \cdot 0.9 = 0.944 \end{aligned}$$

Ejercicio 16 (2 *puntos*)

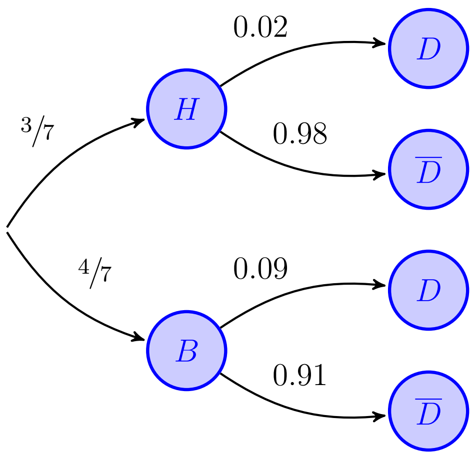
En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0.02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0.09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2004 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$H = \text{“La bombilla es halógena”}$$
$$B = \text{“La bombilla es de bajo consumo”}$$
$$D = \text{“La bombilla es defectuosa”}$$



$$P(H \mid \overline{D}) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H) \cdot P(\overline{D} \mid H)}{P(\overline{D})}$$
$$\overset{\circledast}{=} \frac{3/7 \cdot 0.98}{0.94} = 0.4468$$

$$\circledast\ P(\overline{D}) = P\big((H \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D})\big)$$
$$= P(H \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D})$$
$$= P(H) \cdot P(\overline{D} \mid H) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)$$
$$= \frac{3}{7} \cdot 0.98 + \frac{4}{7} \cdot 0.91 = 0.94$$

Ejercicio 17 (2 *puntos*)

En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa población el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol.

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.

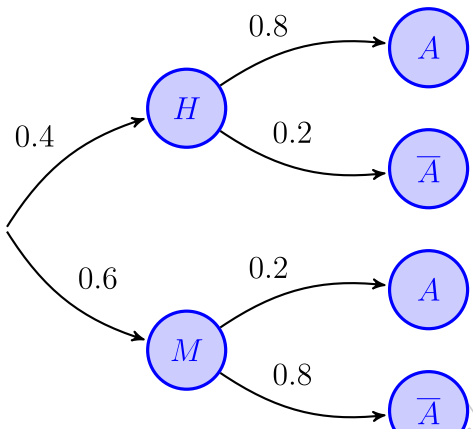
b) (1 punto) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2004 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$\begin{aligned} H &= \text{“La persona es hombre”} \\ M &= \text{“La persona es mujer”} \\ A &= \text{“La persona es aficionada al fútbol”} \end{aligned}$$



a) $P(A) = P\big((H \cap A) \cup (M \cap A)\big)$

$$\begin{aligned} &= P(H \cap A) + P(M \cap A) \\ &= P(H) \cdot P(A \mid H) + P(M) \cdot P(A \mid M) \\ &= 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.44 \end{aligned}$$

b) $P(M \mid A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(M) \cdot P(A \mid M)}{P(A)}$

$$= \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.44} = 0.273$$

Ejercicio 18 (2 *puntos*)

En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2° curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	*Chicos*
Científico-Tecnológica	64	52
Humanidades y CCSS	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2° de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

a) (1 punto) No curse la opción Científico-Tecnológica.

b) (1 punto) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2005 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$\begin{aligned} M &= \text{“El estudiante es chica”} \\ H &= \text{“El estudiante es chico”} \\ CT &= \text{“Opción Científico-Tecnológica”} \\ CCSS &= \text{“Opción Humanidades y Ciencias Sociales”} \end{aligned}$$

	M	H	Total
CT	64	52	116
CCSS	74	50	124
Total	138	102	240

a) $P(\overline{CT}) = 1 - P(CT) = 1 - \dfrac{116}{240} = 0.5166$

b) $P(CCSS \mid H) = \dfrac{50}{102} = 0.4901$

Ejercicio 19 (2 *puntos*)

En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía internet. De los inversores que realizan operaciones vía internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan inversiones vía internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

a) (1 punto) Obtener la probabilidad de que un inversor elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.

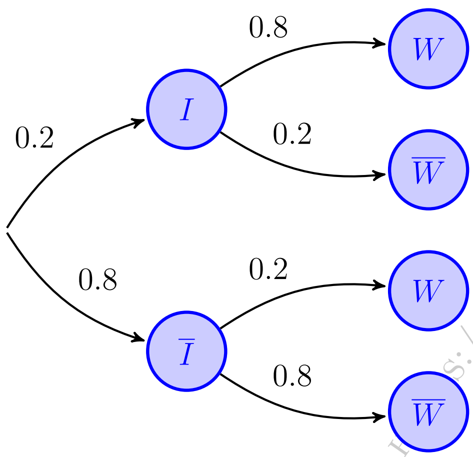
b) (1 punto) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por internet?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2005 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$I = \text{“El inversor realiza operaciones por internet”}$$
$$W = \text{“El inversor consulta InfoBolsaWeb”}$$



a) $P(W) = P\Big((I \cap W) \cup (\overline{I} \cap W)\Big)$
$= P(I \cap W) + P(\overline{I} \cap W)$
$= P(I) \cdot P(W \mid I) + P(\overline{I}) \cdot P(W \mid \overline{I})$
$= 0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.2 = 0.32$

b) $$P(I \mid W) = \frac{P(I \cap W)}{P(W)} = \frac{P(I) \cdot P(W \mid I)}{P(W)} = \frac{0.2 \cdot 0.8}{0.32} = 0.5$$

Ejercicio 20 (2 *puntos*)

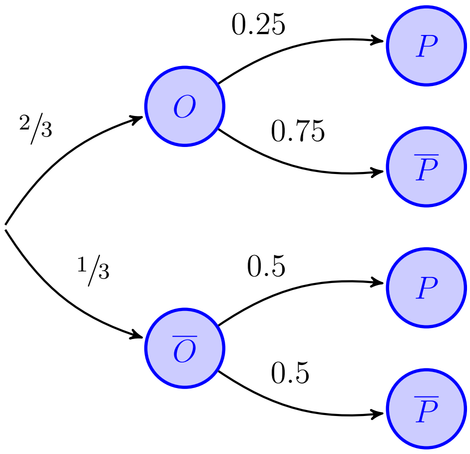
Una persona cuida de su jardín, pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $^2/_3$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0.25.
Si el jardín se ha estropeado ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2006 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$O \equiv \text{“La persona olvida regar el jardín”}$$
$$P \equiv \text{“El jardín progresa”}$$



$$P(O \mid \overline{P}) = \frac{P(O \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(O) \cdot P(\overline{P} \mid O)}{P(\overline{P})} \overset{\circledast}{=} \frac{^2/_3 \cdot 0.75}{^2/_3} = \frac{3}{4}$$

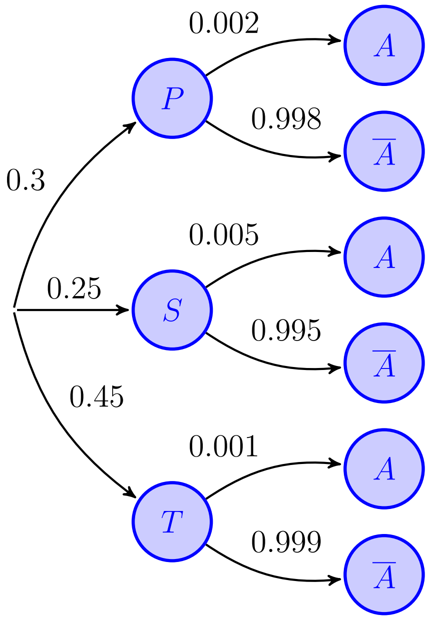
$$\circledast\ P(\overline{P}) = P\big((O \cap \overline{P}) \cup (\overline{O} \cap \overline{P})\big)$$
$$= P(O \cap \overline{P}) + P(\overline{O} \cap \overline{P})$$
$$= P(O) \cdot P(\overline{P} \mid O) + P(\overline{O}) \cdot P(\overline{P} \mid \overline{O})$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.75 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 21 (2 *puntos*)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0.2 %, mientras que dicha proporción es 0.5 % en la segunda, y 0.1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2006 - Opción A)

Solución.



Sean los sucesos

$P =$ "El tigre es de la primera reserva"
$S =$ "El tigre es de la segunda reserva"
$T =$ "El tigre es de la tercera reserva"
$A =$ "El tigre es albino"

$$\begin{aligned}P(A) &= P\big((P \cap A) \cup (S \cap A) \cup P(T \cap A)\big)\\ &= P(P \cap A) + P(S \cap A) + P(T \cap A)\\ &= P(P) \cdot P(A \mid P) + P(S) \cdot P(A \mid S)\\ &+ P(T) \cdot P(A \mid T) = 0.3 \cdot 0.002\\ &+ 0.25 \cdot 0.005 + 0.45 \cdot 0.001 = 0.0023\end{aligned}$$

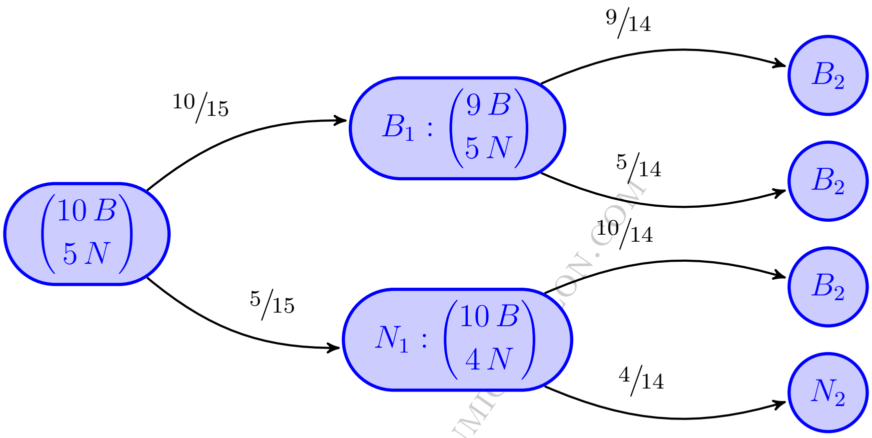
Ejercicio 22 (2 *puntos*)

> *Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2006 - Opción B)*

Solución.

Sean los sucesos

$$B_i = \text{“Sacar bola blanca en la extracción } i\text{”}$$
$$N_i = \text{“Sacar bola negra en la extracción } i\text{”}$$



$$\begin{aligned} P\big((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)\big) &= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) \\ &= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{21} = 0.5238 \end{aligned}$$

Ejercicio 23 (2 *puntos*)

Los pianistas de la isla sordina se forman en tres conservatorios C_1, C_2 y C_3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.

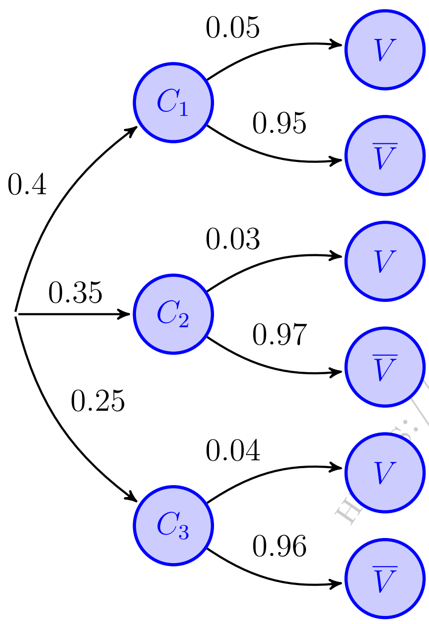
b) (1 punto) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio C_1.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2007 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$C_i = \text{“El pianista es del conservatorio } i\text{”}$$
$$V = \text{“El pianista es virtuoso”}$$



a) $$\begin{aligned} P(V) &= P\Big((C_1 \cap V) \cup (C_2 \cap V) \cup P(C_3 \cap C_1)\Big) \\ &= P(C_1 \cap V) + P(C_2 \cap V) + P(C_3 \cap V) \\ &= P(C_1) \cdot P(V \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(V \mid C_2) \\ &+ P(C_3) \cdot P(V \mid C_3) = 0.4 \cdot 0.05 \\ &+ 0.35 \cdot 0.03 + 0.25 \cdot 0.04 = 0.0405 \end{aligned}$$

b) $$P(C_1 \mid V) = \frac{P(C_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{P(C_1) \cdot P(V \mid C_1)}{P(V)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.0405} = 0.4938$$

Ejercicio 24 (2 *puntos*)

En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0.01 para la marca A; 0.02 pra la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

a) *(1 punto) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.*

b) *(1 punto) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?.*

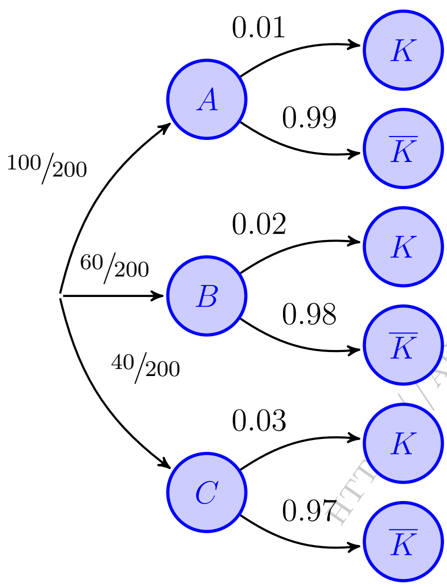
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2007 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

A = "El yogur es de la marca A" $\quad$ B = "El yogur es de la marca B"

C = "El yogur es de la marca C" $\quad$ K = "El yogur está caducado"



a) $$\begin{aligned}P(K) &= P\big((A\cap K)\cup(B\cap K)\cup P(C\cap K)\big)\\ &= P(A\cap K)+P(B\cap K)+P(C\cap K)\\ &= P(A)\cdot P(K\mid A)+P(B)\cdot P(K\mid B)\\ &+P(C)\cdot P(K\mid C)=\frac{100}{200}\cdot 0.01\\ &+\frac{60}{200}\cdot 0.02+\frac{40}{200}\cdot 0.03=0.017\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}P(B\mid K) &= \frac{P(B\cap K)}{P(K)}=\frac{P(B)\cdot P(K\mid B)}{P(K)}\\ &= \frac{60/200\cdot 0.02}{0.017}=0.3529\end{aligned}$$

Ejercicio 25 (2 *puntos*)

Un instituto tiene dos grupos de 2° de Bachillerato. El grupo A está formado por 18 alumnas, de las cuales 5 juegan al baloncesto, y 12 alumnos, 7 de los cuales juegan al mismo deporte. El grupo B está formado por 12 alumnas, 4 de ellas jugadoras de baloncesto, y 13 alumnos, 7 de los cuales practican baloncesto.

a) (1 punto) Si se elige un alumno de 2° de Bachillerato al azar, calcular la probabilidad de que sea mujer.

b) (1 punto) ¿En qué grupo es más probable elegir al azar un estudiante que juegue al baloncesto?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2008 - Opción A)

Solución.

a) Hacemos una tabla de distribución de los alumnos de 2° de Bachillerato que son hombres y mujeres:

Grupo	Alumnos	Alumnas	Total
A	12	18	30
B	13	12	25
Total	25	30	55

$$P(Alumna) = \frac{30}{55} = 0.5454$$

a) Hacemos una tabla de distribución de los alumnos de 2° de Bachillerato que juegan y no juegan al baloncesto.

Grupo	Juega Baloncesto	No Juega	Total
A	12	18	30
B	11	14	25
Total	23	32	55

$$P(Juega_A) = \frac{12}{30} = 0.4$$

$$P(Juega_B) = \frac{11}{25} = 0.44$$

Por lo que hay más probabilidad de encontrar un estudiante que juegue baloncesto en el grupo B.

Ejercicio 26 (2 *puntos*)

Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto *y* raya *y que el telégrafo envía un* punto *con probabilidad* $3/7$ *y una* raya *con probabilidad* $4/7$. *Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un* punto *se reciba una* raya *con probabilidad* $1/4$ *y que cuando se envíe una* raya *se reciba un* punto *con probabilidad* $1/3$.

a) *(1 punto) Si se recibe una* raya, *¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una* raya*?*

b) *(1 punto) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe* punto-punto *se hubiera enviado* raya-raya*?*

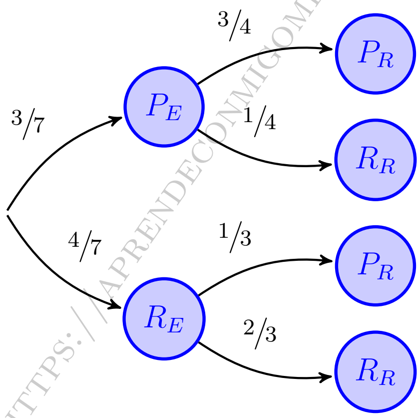
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2008 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$P_E \equiv$ "Se envía un punto" $\qquad R_E \equiv$ "Se envía una raya"

$P_R \equiv$ "Se recibe un punto" $\qquad R_R \equiv$ "Se recibe una raya"



a) $P(R_E \mid R_R) = \dfrac{P(R_E \cap R_R)}{P(R_R)} = \dfrac{P(R_E)\cdot P(R_R \mid R_E)}{P(R_R)} \overset{\circledast}{=} \dfrac{4/7 \cdot 2/3}{0.4881} = 0.7805$

$\circledast\ P(R_R) = P\big((P_E \cap R_R) \cup (R_E \cap R_R)\big) = P(P_E \cap R_R) + P(R_E \cap R_R)$

$$= P(P_E)\cdot P(R_R \mid P_E) + P(R_E)\cdot P(R_R \mid R_E) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3} = 0.4881$$

b) $P(R_E R_E \mid P_R P_R) = P(R_E \mid P_R)\cdot P(R_E \mid P_R) \overset{\odot}{=} 0.3721 \cdot 0.3721 = 0.1385$

$\odot\ P(R_E \mid P_R) = \dfrac{P(R_E \cap P_R)}{P(P_R)} = \dfrac{P(R_E)\cdot P(P_R \mid R_E)}{1 - P(R_R)} = \dfrac{4/7 \cdot 1/3}{1 - 0.4881} = 0.3721$

Ejercicio 27 (2 *puntos*)

La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0.2. *Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a* 0.85. *Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a* 0.1.

a) (1 punto) Se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

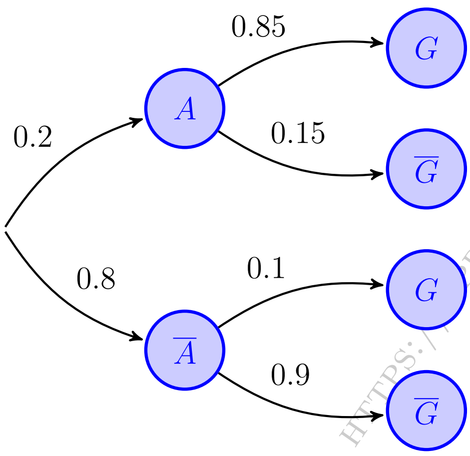
b) (1 punto) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2009 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El vehículo sufre un accidente”}$$
$$G \equiv \text{“El vehículo necesita la asistencia de una grúa”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(G) &= P\big((A\cap G)\cup(\overline{A}\cap G)\big) \\ &= P(A\cap G) + P(\overline{A}\cap G) \\ &= P(A)\cdot P(G\mid A) + P(\overline{A})\cdot P(G\mid \overline{A})) \\ &= 0.2\cdot 0.8 + 0.85\cdot 0.1 = 0.245 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(\overline{A}\mid G) &= \frac{P(\overline{A}\cap G)}{P(G)} = \frac{P(\overline{A})\cdot P(G\mid \overline{A})}{P(G)} \\ &= \frac{0.8\cdot 0.1}{0.245} = 0.3265 \end{aligned}$$

Ejercicio 28 (2 *puntos*)

Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0.01 si la bombilla es blanca, es igual a 0.02 si la bombilla es azul e igual a 0.03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

b) (1 punto) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona calcule la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

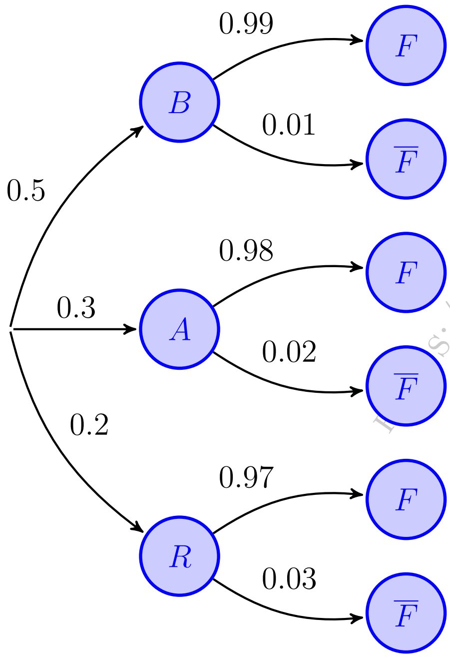
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2009 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$B \equiv$ "La bombilla elegida es blanca — $A \equiv$ "La bombilla elegida es azul

$R \equiv$ "La bombilla elegida es roja — $F \equiv$ "La bombilla funciona



$$P(B) = \frac{200}{200+120+80} = \frac{200}{400} = 0.5$$

$$P(A) = \frac{120}{400} = 0.3 \quad \& \quad P(R) = \frac{80}{400} = 0.2$$

a) $P(\overline{F}) = P\Big((B\cap\overline{F})\cup(A\cap\overline{F})\cup(R\cap\overline{F})\Big)$
$= P(B\cap\overline{F}) + P(A\cap\overline{F}) + P(R\cap\overline{F})$
$= P(B)\cdot P(\overline{F}\mid B) + P(A)\cdot P(\overline{F}\mid A)$
$+ P(R)\cdot P(\overline{F}\mid R) = 0.5\cdot 0.01$
$+ 0.3\cdot 0.02 + 0.2\cdot 0.03 = 0.017$

b) $P(A\mid\overline{F}) = \dfrac{P(A\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(A)\cdot P(\overline{F}\mid A)}{P(\overline{F})}$
$= \dfrac{0.3\cdot 0.02}{0.017} = 0.3529$

Ejercicio 29 (2 *puntos*)

En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

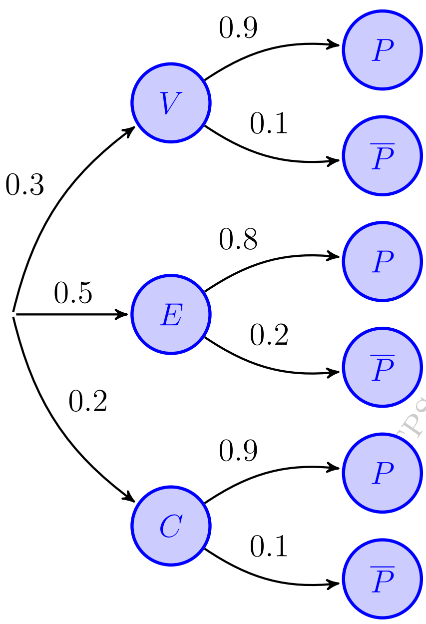
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo sabiendo que se ha pagado?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2009 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$V \equiv$ "El crédito está destinado a vivienda" $E \equiv$ "El crédito está destinado a empresas"
$C \equiv$ "El crédito está destinado a consumo" $P \equiv$ "El crédito resulta pagado"



a) $P(P) = P\big((V \cap P) \cup (E \cap P) \cup (C \cap P)\big)$
$= P(V \cap P) + P(E \cap P) + P(C \cap P)$
$= P(V) \cdot P(P \mid V) + P(E) \cdot P(P \mid E)$
$+ P(C) \cdot P(P \mid C) = 0.3 \cdot 0.9$
$+ 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.85$

b) $$P(C \mid P) = \frac{P(C \cap P)}{P(P)} = \frac{P(C) \cdot P(P \mid C)}{P(P)}$$
$$= \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.85} = 0.212$$

Ejercicio 30 (2 *puntos*)

Se consideran los siguientes sucesos:

- *(1 punto) Suceso A: La economía de un cierto país está en recesión.*
- *(1 punto) Suceso B: Un indicicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.*

Se sabe que:

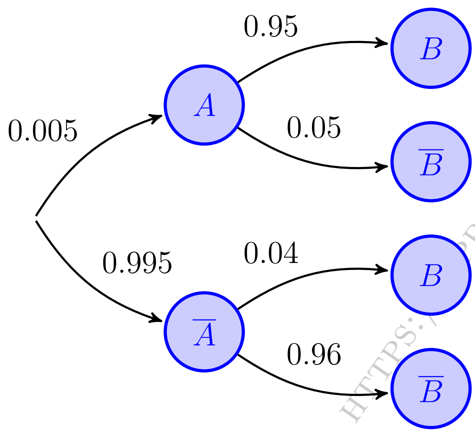
$$P(A) = 0.005 \qquad \& \qquad P(B \mid A) = 0.95 \qquad \& \qquad P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0.96$$

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2010 - Opción B)

Solución.



a) $P(\overline{B} \cap A) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B} \mid A)$

$$= 0.005 \cdot 0.05 = 0.00025$$

b) $P(B) = P\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big)$

$$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$$
$$= 0.005 \cdot 0.95 + 0.995 \cdot 0.04$$
$$= 0.00475 + 0.0398 = 0.04455$$

Ejercicio 31 (2 *puntos*)

En una residencia universitaria viven 183 estudiantes de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos, 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería?

b) (1 punto) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2010 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$L \equiv$ "El estudiante usa la lavandería" $\qquad B \equiv$ "El estudiante usa la biblioteca"

1ª Forma: Tabla de Contingencia

Resolveremos el ejercicio mediante una tabla de contingencia en donde pondremos los datos y completaremos el resto (en azul).

	B	$\overline{B}$	**Total**
L	70	20	90
$\overline{L}$	60	33	93
Total	130	53	183

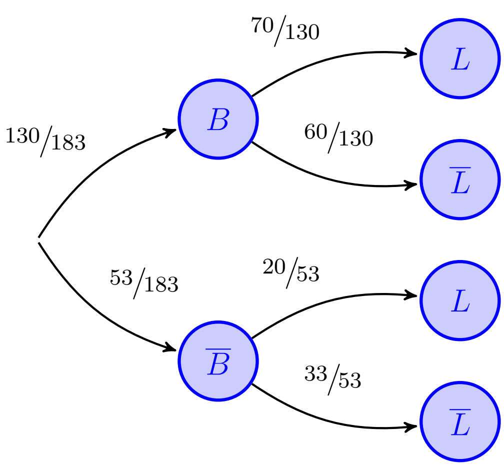
a) $P(L) = \dfrac{90}{183} = 0.4918$

b) $P(B \mid \overline{L}) = \dfrac{60}{93} = 0.6452$

2ª Forma: Diagrama de Árbol

$$P(B) = \frac{130}{183} \quad \& \quad P(B \cap L) = P(B) \cdot P(L \mid B) \Rightarrow P(L \mid B) = \frac{P(B \cap L)}{P(B)} = \frac{70/183}{130/183} = \frac{70}{130}$$

$$P(\overline{B} \cap \overline{L}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{L} \mid \overline{B}) \implies P(\overline{L} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{L})}{P(\overline{B})} = \frac{20/183}{53/183} = \frac{20}{53}$$



a) $$\begin{aligned} P(L) &= P\Big((B \cap L) \cup (\overline{B} \cap L)\Big) \\ &= P(B \cap L) + P(\overline{B} \cap L) \\ &= P(B) \cdot P(L \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(L \mid \overline{B}) \\ &= \frac{130}{183} \cdot \frac{70}{130} + \frac{53}{183} \cdot \frac{20}{53} = 0.4918 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(B \mid \overline{L}) &= \frac{P(B \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{L} \mid B)}{1 - P(L)} \\ &= \frac{130/183 \cdot 60/130}{1 - 0.4918} = 0.6451 \end{aligned}$$

Ejercicio 32 (2 *puntos*)

En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0.2*. Entre los habitantes que siguen una dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a* 0.6*. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a* 0.3*. Se elige al azar un habitante de la población.*

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.

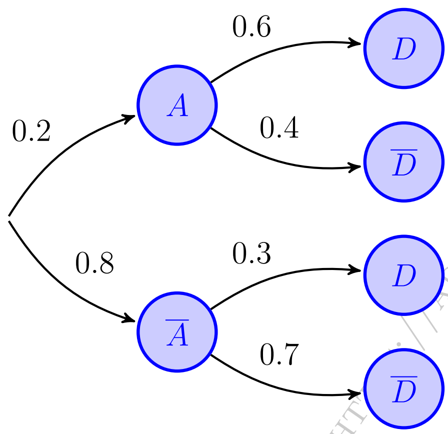
b) (1 punto) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2011 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El habitante sigue una dieta de adelgazamiento”}$$
$$D \equiv \text{“El habitante practica deporte regularmente”}$$



a) $$\begin{aligned} P(D) &= P\big((A \cap D) \cup (\overline{A} \cap D)\big) \\ &= P(A \cap D) + P(\overline{A} \cap D) \\ &= P(A) \cdot P(D \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(D \mid \overline{A}) \\ &= 0.2 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.4 = 0.36 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A \mid D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.36} = 0.333 \end{aligned}$$

Ejercicio 33 (2 *puntos*)

En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0.5*, de que sea un camión es* 0.3 *y de que sea una motocicleta es* 0.2*. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es* 0.06 *para un coche,* 0.02 *para un camión y* 0.12 *para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.*

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

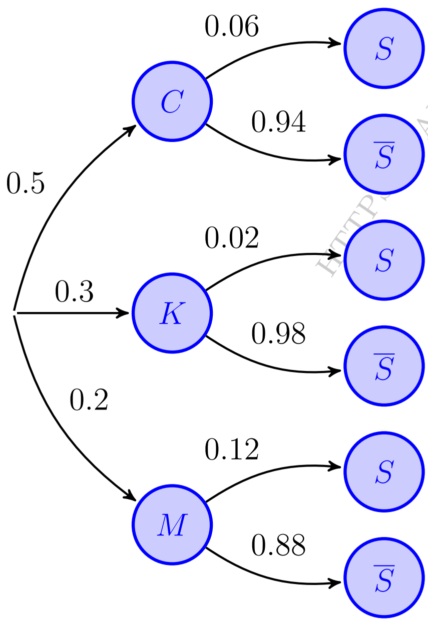
b) (1 punto) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cual es la probabilidad de qu se trate de una motocicleta?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2011 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$C = \text{“El vehículo que pasa por el radar es un coche”}$$
$$K = \text{“El vehículo que pasa por el radar es un camión”}$$
$$M = \text{“El vehículo que pasa por el radar es un motocicleta”}$$
$$S = \text{“El vehículo supera la velocidad máxima permitida”}$$



a) $$P(S) = P\Big((C\cap S)\cup(K\cap S)\cup P(M\cap S)\Big) = P(C\cap S)+P(K\cap S)+P(M\cap S) = P(C)\cdot P(S\mid C)+P(K)\cdot P(S\mid K) + P(M)\cdot P(S\mid M) = 0.5\cdot 0.06 + 0.3\cdot 0.02 + 0.2\cdot 0.12 = 0.06$$

b) $$P(M\mid S) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{P(M)\cdot P(S\mid M)}{P(S)} = \frac{0.2\cdot 0.12}{0.06} = 0.4$$

Ejercicio 34 (2 *puntos*)

Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

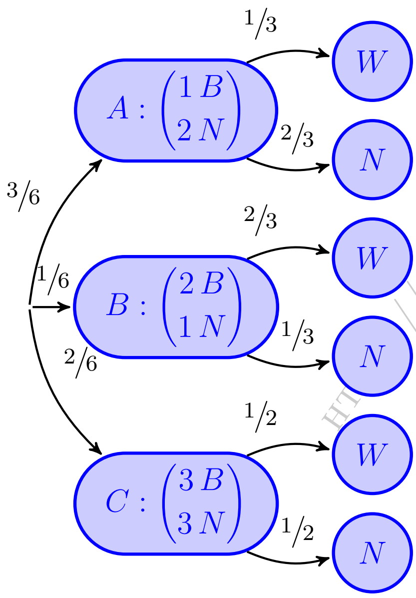
b) (1 punto) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de qe la bola haya sido extraída de la urna C?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

A = "Sale 1, 2 o 3 en el dado" $\quad$ B = "Sale 4 en el dado"
C = "Sale 5 en el dado" $\quad$ W = "La bola extraida es blanca"
N = "La bola extraida es negra"



$$\begin{aligned}
\text{a) } P(W) &= P\Big((A\cap W)\cup(B\cap W)\cup P(C\cap W)\Big)\\
&= P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)\\
&= P(A)\cdot P(W\mid A)+P(B)\cdot P(W\mid B)\\
&+ P(C)\cdot P(W\mid C) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3}\\
&+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{9}=0.444
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } P(C\mid W) &= \frac{P(C\cap W)}{P(W)}=\frac{P(C)\cdot P(W\mid C)}{P(W)}\\
&= \frac{3/6\cdot 1/3}{4/9}=\frac{3}{8}=0.375
\end{aligned}$$

Ejercicio 35 (2 *puntos*)

> *Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probababilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2012 - Opción A)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} U &\equiv \text{“La moneda elegida tiene cara y cruz”} \\ D &\equiv \text{“La moneda elegida tiene dos caras”} \\ C_i &\equiv \text{“Sacar cara en el lanzamiento } i\text{”} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2) &= P\Big((U \cap C_1 \cap C_2) \cup (D \cap C_1 \cap C_2)\Big) \\ &= P(U \cap C_1 \cap C_2) + P(D \cap C_1 \cap C_2) \\ &= P(U) \cdot P\Big((C_1 \cap C_2) \mid U\Big) + P(D) \cdot P\Big((C_1 \cap C_2) \mid U\Big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$P\Big(D \mid (C_1 \cap C_2)\Big) = \frac{P(D \cap C_1 \cap C_2)}{P(C_1 \cap C_2)} = \frac{P(D) \cdot P\Big((C_1 \cap C_2) \mid D\Big)}{P(C_1 \cap C_2)} = \frac{1/2 \cdot 1 \cdot 1}{5/8} = \frac{4}{5}$$

Ejercicio 36 (2 *puntos*)

En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de graddo se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

b) (1 punto) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

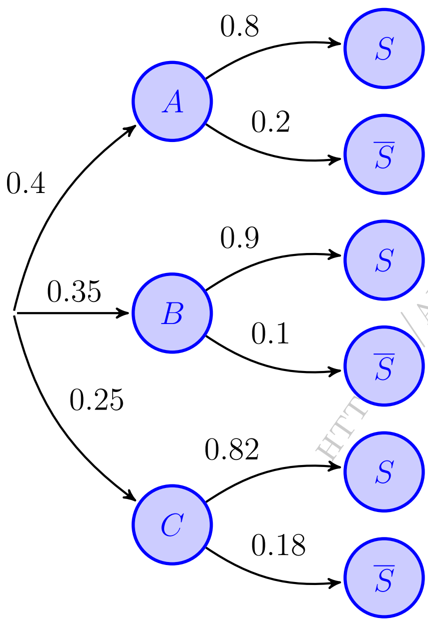
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El alumno es del colegio A" $\quad B =$ "El alumno es del colegio B"

$C =$ "El alumno es del colegio C" $\quad S =$ "El alumno ha superado la prueba"



$$P(A) = \frac{80}{80+70+50} = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$P(B) = \frac{70}{200} = 0.35 \quad \& \quad P(C) = \frac{50}{200} = 0.25$$

a) $$P(S) = P\big((A\cap S)\cup(B\cap S)\cup P(C\cap S)\big)$$
$$= P(A\cap S) + P(B\cap S) + P(C\cap S)$$
$$= P(A)\cdot P(S \mid A) + P(B)\cdot P(S \mid B)$$
$$+ P(C)\cdot P(S \mid C) = 0.4\cdot 0.8$$
$$+ 0.35\cdot 0.9 + 0.25\cdot 0.82 = 0.84$$

b) $$P(B \mid \overline{S}) = \frac{P(B\cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(B)\cdot P(\overline{S}\mid B)}{P(\overline{S})}$$
$$= \frac{0.35\cdot 0.1}{1-0.84} = 0.2187$$

Ejercicio 37 (2 *puntos*)

Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo de 0.03 para las bombillas de 20 W, de 0.02 para las de 15 W y de 0.01 para las bombillas de 12 W.

a) (1 punto) Se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

b) (1 punto) Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

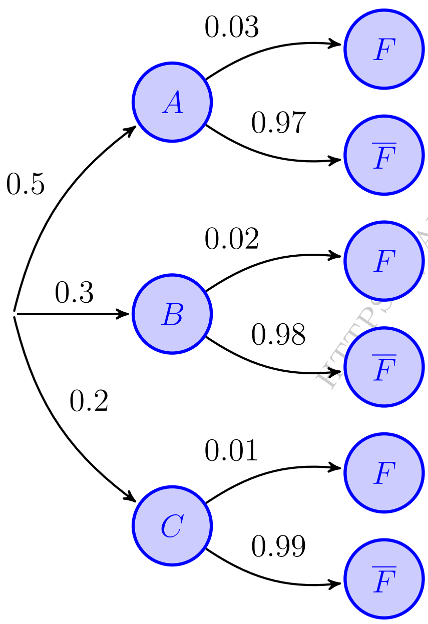
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

A = "La bombilla es de 20 W" $\qquad$ B = "La bombilla es de 15 W"

C = "La bombilla es de 12 W" $\qquad$ F = "La bombilla falla en la primera hora"



$$P(A) = \frac{80}{500+200+300} = \frac{500}{1000} = 0.5$$

$$P(B) = \frac{200}{1000} = 0.2 \quad \& \quad P(C) = \frac{300}{1000} = 0.3$$

a) $$\begin{aligned} P(F) &= P\Big((A \cap F) \cup (B \cap F) \cup P(C \cap F)\Big) \\ &= P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) \\ &= P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid B) \\ &+ P(C) \cdot P(F \mid C) = 0.5 \cdot 0.03 \\ &+ 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.01 = 0.023 \end{aligned}$$

b) $$P(A \mid F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \frac{0.5 \cdot 0.03}{0.023} = 0.6522$$

Ejercicio 38 (2 *puntos*)

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquuina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03. En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

a) *(1 punto) Calcúlese la probabilidad de que un tormillo elegido al azar no sea defectuoso.*

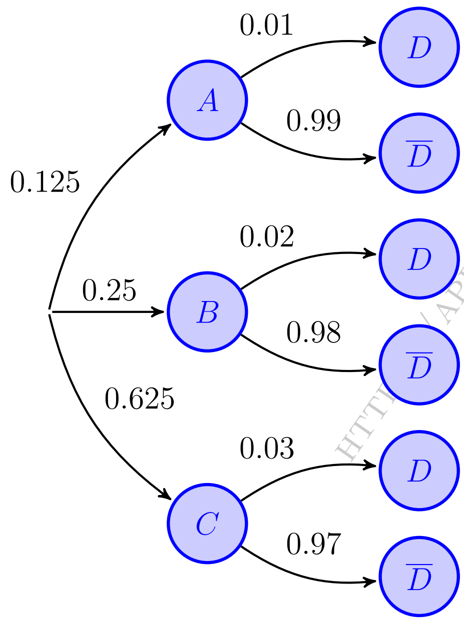
b) *(1 punto) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en la máquina B?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2013 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El tornillo es de la máquina A" $\quad B =$ "El tornillo es de la máquina B"
$C =$ "El tornillo es de la máquina C" $\quad D =$ "El tornillo es defectuoso"



$$P(A) = \frac{15}{120} = 0.125$$

$$P(B) = \frac{30}{120} = 0.25 \quad \& \quad P(C) = \frac{75}{120} = 0.625$$

a) $$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P\Big((A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D}) \cup P(C \cap \overline{D})\Big) \\ &= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D}) \\ &= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) \\ &+ P(C) \cdot P(\overline{D} \mid C) = 0.125 \cdot 0.99 \\ &+ 0.25 \cdot 0.98 + 0.625 \cdot 0.97 = 0.975 \end{aligned}$$

b) $$P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{1 - P(\overline{D})} = \frac{0.25 \cdot 0.02}{1 - 0.975} = 0.2$$

Ejercicio 39 (2 *puntos*)

Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) (1 punto) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

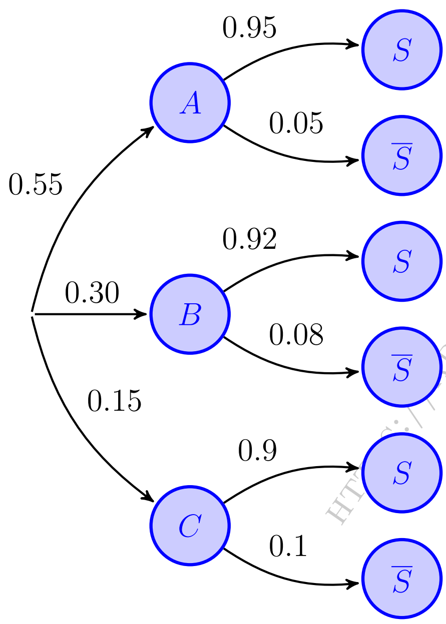
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2013 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El encargo se hace al sastre A" $\quad B =$ "El encargo se hace al sastre B"

$C =$ "El encargo se hace al sastre C" $\quad D =$ "El cliente está satisfecho"



a) $$P(\overline{S}) = P\Big((A\cap\overline{S})\cup(B\cap\overline{S})\cup P(C\cap\overline{S})\Big)$$
$$= P(A\cap\overline{S}) + P(B\cap\overline{S}) + P(C\cap\overline{S})$$
$$= P(A)\cdot P(\overline{S}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{S}\mid B)$$
$$+ P(C)\cdot P(\overline{S}\mid C) = 0.55\cdot 0.05$$
$$+ 0.3\cdot 0.08 + 0.15\cdot 0.1 = 0.0665$$

b) $$P(A\mid\overline{S}) = \frac{P(A\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{S}\mid A)}{P(\overline{S})}$$
$$= \frac{0.55\cdot 0.05}{0.0665} = 0.4135$$

Ejercicio 40 (2 *puntos*)

En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % *de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.*

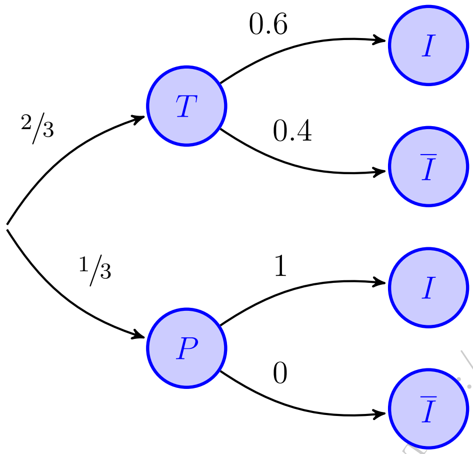
a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) (1 punto) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción A)

Solución. Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{“El pasajero viaja en clase turista”}$$
$$P \equiv \text{“El pasajero viaja en clase preferente”}$$
$$I \equiv \text{“El pasajero habla inglés”}$$



a) $P(I) = P\big((T \cap I) \cup (P \cap I)\big)$

$$= P(T \cap I) + P(P \cap I)$$
$$= P(T) \cdot P(I \mid T) + P(P) \cdot P(I \mid P)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0.7333$$

b) $P(T \mid I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(I)} = \dfrac{P(T) \cdot P(I \mid T)}{P(I)}$

$$= \frac{2/3 \cdot 0.6}{0.7333} = 0.5454$$

Ejercicio 41 (2 *puntos*)

Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

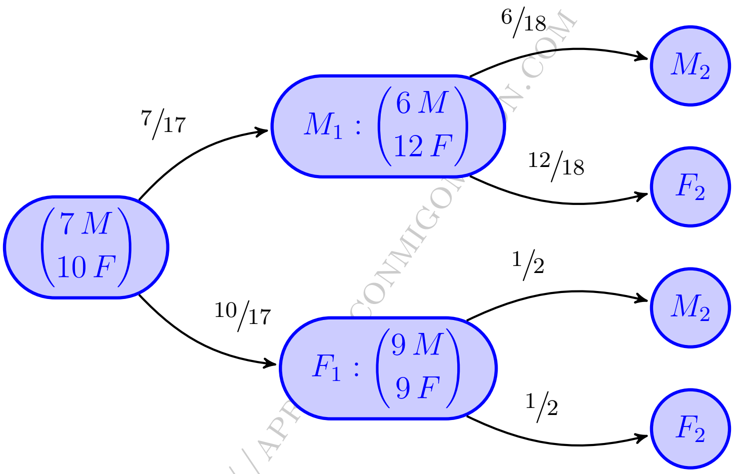
a) (1 punto) El segundo caramelo sea de fresa.

b) (1 punto) El segundo sea del mismo sabor que el primero.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción B)

Solución. Sean los sucesos:

$$M_i \equiv \text{"El caramelo extraído en la posición } i \text{ es de menta"}$$
$$F_i \equiv \text{"El caramelo extraído en la posición } i \text{ es de fresa"}$$



a) $P(F_2) = P\big((M_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_2)\big) = P(M_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap F_2)$

$$= P(M_1) \cdot P(F_2 \mid M_1) + P(F_1) \cdot P(F_2 \mid F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{51} = 0.5686$$

b) $P(\text{Mismo sabor}) = P\big((M_1 \cap M_2) \cup (F_1 \cap F_2)\big) = P(M_1 \cap M_2) + P(F_1 \cap F_2)$

$$= P(M_1) \cdot P(M_2 \mid M_1) + P(F_1) \cdot P(F_2 \mid F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{22}{51} = 0.4314$$

Ejercicio 42 (2 *puntos*)

> *En un avión viajan un 10 % de los pasajeros en primera clase. Del total de pasajeros del avión un 20 % son mujeres. Se sabe que los pasajeros que viajan en primera clase y además son mujeres, son el 2 % del total. Determínese la probabilidad de que:*
>
> *a) (1 punto) Al escoger un pasajero de primera clase al azar sea mujer.*
>
> *b) (1 punto) Al escoger un varón del avión al azar, no viaje en primera clase.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción B - Coincidentes)*

Solución. Sean los sucesos: Sean los sucesos:

$$P \equiv \text{“El pasajero viaja en primera clase”}$$
$$M \equiv \text{“El pasajero es mujer”}$$

Resolveremos el ejercicio mediante una tabla de contingencia en donde pondremos los datos y completaremos el resto (en azul).

	M	$\overline{M}$	**Total**
P	0.02	0.08	0.1
$\overline{P}$	0.18	0.72	0.9
Total	0.2	0.8	1

a) $P(M \mid P) = \dfrac{0.02}{0.1} = 0.2$

b) $P(\overline{P} \mid \overline{M}) = \dfrac{0.72}{0.8} = 0.9$

Ejercicio 43 (2 *puntos*)

En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) (1 punto) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Modelo - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“La dieta tiene supervisión médica”}$$
$$A \equiv \text{“El cliente abandona la dieta antes del primer mes”}$$

1ª FORMA: TABLA DE CONTINGENCIA

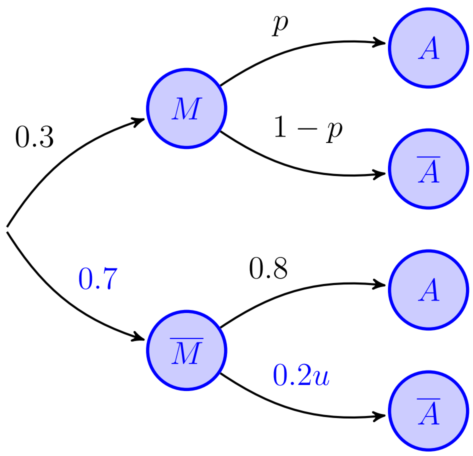
	M	$\overline{M}$	Total
A	0.56	0.56	0.6
$\overline{A}$	0.26	0.14	0.4
Total	0.3	0.7	1

a) $P(A \mid \overline{M}) = \dfrac{P(A \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} \Rightarrow P(A \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \cdot P(A \mid \overline{M})$

$\Longrightarrow P(A \cap \overline{M}) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(A \mid M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0.04}{0.3} = 0.133$

2ª FORMA: DIAGRAMA DE ARBOL



a) $P(A \cap \overline{M}) = P(\overline{M} \cap A) = P(\overline{M}) \cdot P(A \mid \overline{M})$

$= 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(\overline{A}) = P\big((M \cap \overline{A}) \cup (\overline{M} \cap \overline{A})\big)$

$= P(M \cap \overline{A}) + P(\overline{M} \cap \overline{A})$

$= P(M) \cdot P(\overline{A} \mid M) + P(\overline{M}) \cdot P(\overline{A} \mid \overline{M})$

$\Longrightarrow 0.4 = 0.3 \cdot (1-p) + 0.7 \cdot 0.2 \Longrightarrow p = 0.133$

$\Longrightarrow P(A \mid M) = 0.133$

Ejercicio 44 (2 *puntos*)

Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) (1 punto) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

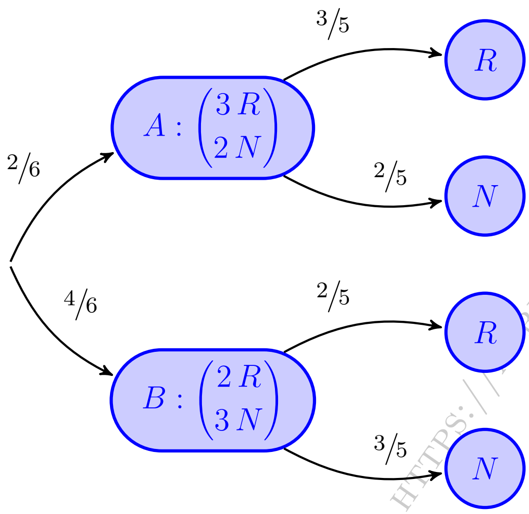
(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Junio - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "Sacar 1 ó 2 en el dado" $\qquad B \equiv$ "Sacar más de 2 en el dado"

$R \equiv$ "Extraer bola roja" $\qquad N \equiv$ "Extraer bola negra"



a)
$$\begin{aligned} P(R) &= P\big((A\cap R)\cup(B\cap R)\big) \\ &= P(A\cap R) + P(B\cap R) \\ &= P(A)\cdot P(R\mid A) + P(B)\cdot P(R\mid B) \\ &= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(A\mid R) &= \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)\cdot P(R\mid A)}{P(R)} \\ &= \frac{{}^2/_6\cdot{}^3/_5}{{}^7/_{15}} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Ejercicio 45 (2 *puntos*)

Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan, sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) *(1 punto) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.*

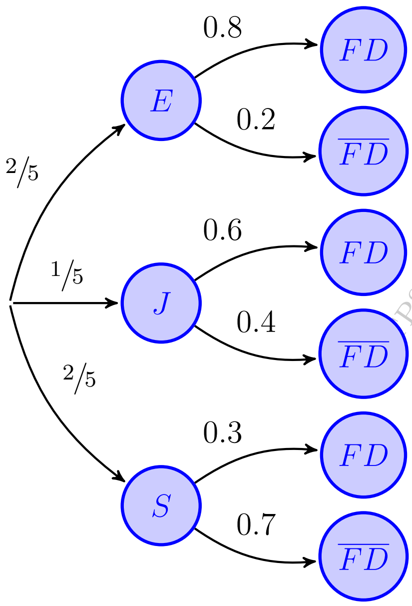
b) *(1 punto) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Educación”}$$
$$J \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Justicia”}$$
$$S \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Sanidad”}$$
$$FD \equiv \text{“Al trabajador le hacen una fiesta de despedida”}$$



Sean: $P(J) = p \quad \& \quad P(E) = P(S) = 2p$

$P(E) + P(S) + P(J) = 2p + 2p + p = 1 \implies p = 1/5$

a) $P(FD) = P\big((E \cap FD) \cup (J \cap FD) \cup (S \cap FD)\big)$
$= P(E \cap FD) + P(J \cap FD) + P(S \cap FD)$
$= P(E) \cdot P(FD \mid E) + P(J) \cdot P(FD \mid J)$
$+ P(S) \cdot P(FD \mid S) = \dfrac{2}{5} \cdot 0.8 + \dfrac{1}{5} \cdot 0.6$
$+ \dfrac{2}{5} \cdot 0.3 = 0.56$

b) $P(S \mid \overline{FD}) = \dfrac{P(S \cap \overline{FD})}{P(\overline{FD})} = \dfrac{P(S) \cdot P(\overline{FD} \mid S)}{1 - P(FD)}$
$= \dfrac{2/5 \cdot 0.7}{1 - 0.56} = 0.6363$

Ejercicio 46 (2 *puntos*)

Se ha cometido un delito. La probabilidad de que lo haya cometido un varón es el doble de que lo haya cometido una mujer. Por otra parte, la probabilidad de que al examinar un área determinada de la huella dactilar de un varón se encuentren 15 *crestas es* 0.26*, mientras que en una mujer es* 0.04*.*

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que una huella encontrada en la escena del delito tenga 15 *crestas en el recuento de dicha área.*

b) (1 punto) Se ha encontrado en la escena del delito una huella dactilar con 15 *crestas en esa área determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha huella pertenezca a un varón?*

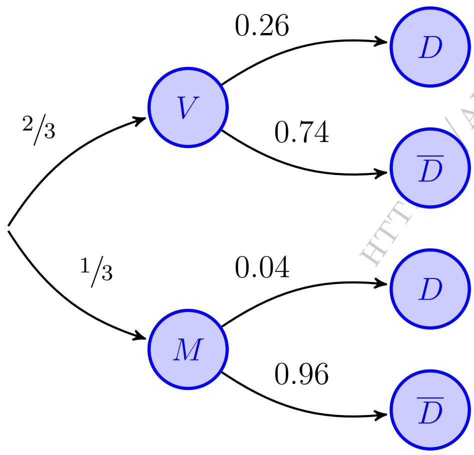
(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$V \equiv \text{“El delito ha sido cometido por un varón”}$$
$$M \equiv \text{“El delito ha sido cometido por una mujer”}$$
$$D \equiv \text{“La huella dactilar tiene 15 crestas”}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{P(V)=2P(M)}\\ \text{P(V)+P(M)=1}\end{array}\right\} \Longrightarrow 2P(M)+P(M)=1 \Longrightarrow \begin{cases}\text{P(M)=}^1\!/_3\\ P(V)={}^2\!/_3\end{cases}$$



a) $P(D)=P\big((V\cap D)\cup(M\cap D)\big)$
$$=P(V\cap D)+P(M\cap D)$$
$$=P(V)\cdot P(D\mid V)+P(M)\cdot P(D\mid M)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 0.26+\frac{1}{3}\cdot 0.04=0.1867$$

b) $P(V\mid D)=\dfrac{P(V\cap D)}{P(D)}=\dfrac{P(V)\cdot P(D\mid V)}{P(D)}$
$$=\frac{{}^2\!/_3\cdot 0.26}{0.1867}=0.9284$$

Ejercicio 47 (**2** ***puntos***)

Una urna contiene 5 *bolas blancas y* 4 *negras y otra urna contiene* 3 *bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:*

a) (1 punto) Del mismo color.

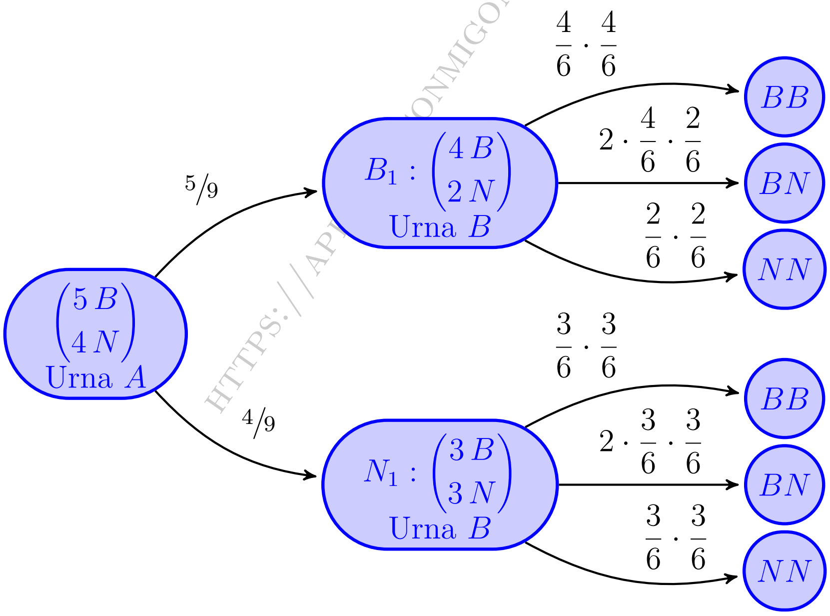
b) (1 punto) De distinto color.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Modelo - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} B_1 &\equiv \text{“Pasar una bola blanca de la Urna } A \text{ a la } B\text{”} \\ N_1 &\equiv \text{“Pasar una bola negra de la Urna } A \text{ a la } B\text{”} \\ BB &\equiv \text{“Extraer dos bolas blancas de la urna } B\text{”} \\ BN &\equiv \text{“Extraer una bola blanca y otra negra de la urna } B\text{”} \\ NN &\equiv \text{“Extraer dos bolas negras de la urna } B\text{”} \end{aligned}$$



a) $P(\text{mismo color}) = P(BB \cup NN) = P(BB) + P(NN) = P\big((B_1 \cap BB) \cup (N_1 \cap BB)\big)$

$$+ P\big((B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN)\big) = P(B_1 \cap BB) + P(N_1 \cap BB)$$
$$+ P(B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN) = P(B_1) \cdot P(BB \mid B_1)$$
$$+ P(N_1) \cdot P(BB \mid N_1) + P(B_1) \cdot P(NN \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(NN \mid N_1)$$
$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{43}{81}$$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

Ejercicio 48 (2 *puntos*)

En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas.
Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Las dos bolas sean del mismo color.

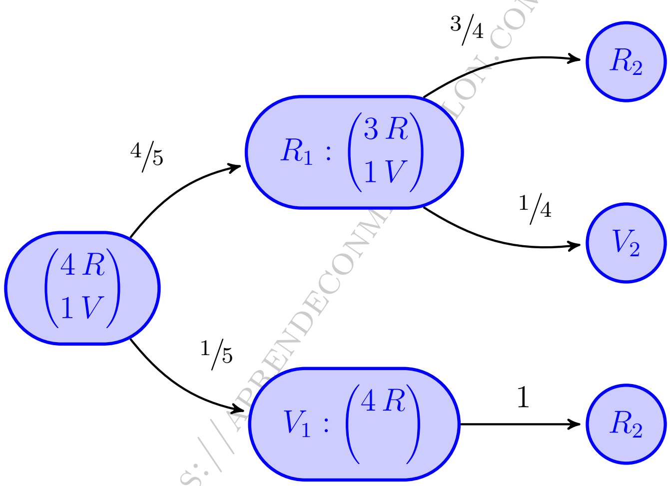
b) (1 punto) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{roja} \text{ en la extracción } i\text{”}$$
$$V_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{verde} \text{ en la extracción } i\text{”}$$



a) $P(\text{mismo color}) = P\Big((R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)\Big) = P(R_1 \cap R_2) + \cancelto{0}{P(V_1 \cap V_2)}$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

b) $P(V_1 \mid R_2) = \dfrac{P(V_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap R_2)}$

$$= \frac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) + P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 1}{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 49 (2 *puntos*)

En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determínese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.

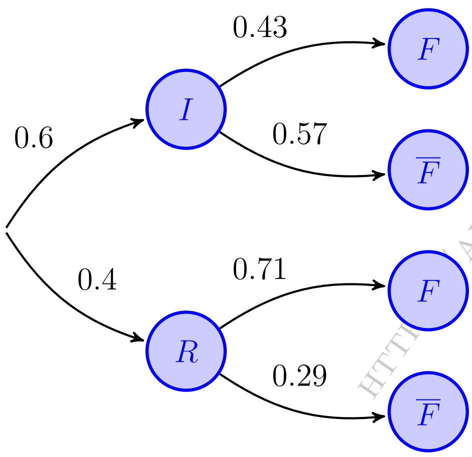
b) (1 punto) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$I \equiv$ "El paciente es tratado con interferón"
$R \equiv$ "El paciente es tratado con ribavirina más interferón"
$F \equiv$ "El tratameinto tiene resultados favorables"



a) $P(F) = P\Big((I \cap F) \cup (R \cap F)\Big)$
$= P(I \cap F) + P(R \cap F)$
$= P(I) \cdot P(F \mid I) + P(R) \cdot P(F \mid R)$
$= 0.6 \cdot 0.43 + 0.4 \cdot 0.71 = 0.542$

b) $$P(I \mid F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{P(I) \cdot P(F \mid I)}{P(F)} = \frac{0.6 \cdot 0.43}{0.542} = 0.476$$

Ejercicio 50 (2 *puntos*)

> *En una universidad de Madrid el 65 % del profesorado es funcionario. Por otro lado, el 60 % del profesorado son mujeres de las cuales el 70 % son funcionarias. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado tomado al azar:*
>
> *a) (1 punto) Sea funcionario y hombre.*
>
> *b) (1 punto) Sea mujer sabiendo que no es funcionario.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$F \equiv \text{“El miembro del profesorado es funcionario”}$$
$$M \equiv \text{“El miembro del profesorado es mujer”}$$

1ª Forma: Tabla de Contingencia

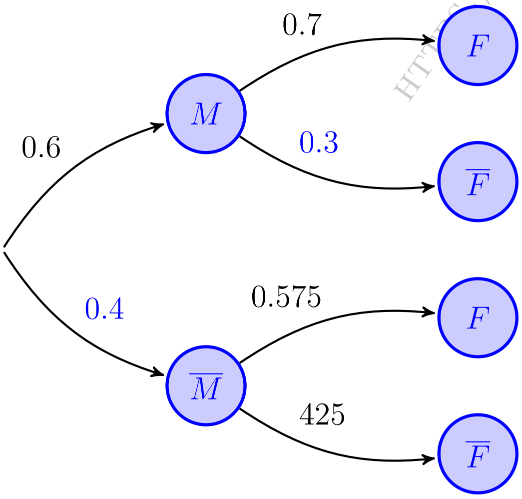
$$P(F \mid M) = \frac{P(F\cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(F\cap M) = P(M)\cdot P(F \mid M) = 0.6\cdot 0.7 = 0.42$$

	F	$\overline{F}$	Total
M	0.42	0.18	0.6
$\overline{M}$	0.23	0.17	0.4
Total	0.65	0.35	1

a) $P(F\cap \overline{M}) = 0.23$

b) $P(M \mid \overline{F}) = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0.18}{0.35} = 0.514$

2ª Forma: Diagrama de Arbol



$$\begin{aligned}P(F) &= P\big((M\cap F)\cup(\overline{M}\cap F)\big)\\ &= P(M\cap F) + P(\overline{M}\cap F)\\ &= P(M)\cdot P(F\mid M) + P(\overline{M})\cdot P(F\mid \overline{M})\end{aligned}$$
$$\Longrightarrow 0.65 = 0.6\cdot 0.7 + 0.4\cdot P(F\mid \overline{M})$$
$$\Longrightarrow P(F\mid \overline{M}) = 0.575$$

a) $P(F\cap \overline{M}) = P(\overline{M})\cdot P(F\mid \overline{M})$
$\qquad = 0.4\cdot 0.575 = 0.23$

b) $P(M \mid \overline{F}) = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{1-P(F)}$
$\qquad = \dfrac{0.6\cdot 0.3}{1-0.7} = 0.514$

Ejercicio 51 (2 *puntos*)

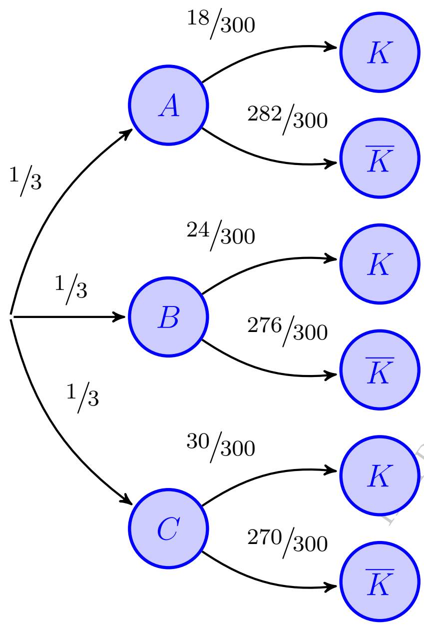
> *En un polígono industrial se almacenan 30000 latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en 2016 caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 procedentes de la B y 3000 que procede de la fábrica C.*
>
> *a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.*
>
> *b) (1 punto) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fabrica A?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)*

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La lata es de la fábrica A" $\qquad B \equiv$ "La lata es de la fábrica B"

$C \equiv$ "La lata es de la fábrica C" $\qquad K \equiv$ "La lata está caducada"



a) $P(K) = P\big((A\cap K)\cup(B\cap K)\cup(C\cap K)\big)$
$= P(A\cap K) + P(B\cap K) + P(C\cap K)$
$= P(A)\cdot P(K \mid A) + P(B)\cdot P(K\mid B)$
$+ P(C)\cdot P(K\mid C) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{18}{300}$
$+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{24}{300}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{30}{300} = 0.24$

b) $P(A\mid K) = \dfrac{P(A\cap K)}{P(K)} = \dfrac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)}$
$= \dfrac{1/3\cdot 18/300}{0.24} = 0.25$

Ejercicio 52 (2 *puntos*)

Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) La segunda bola extraída sea roja.

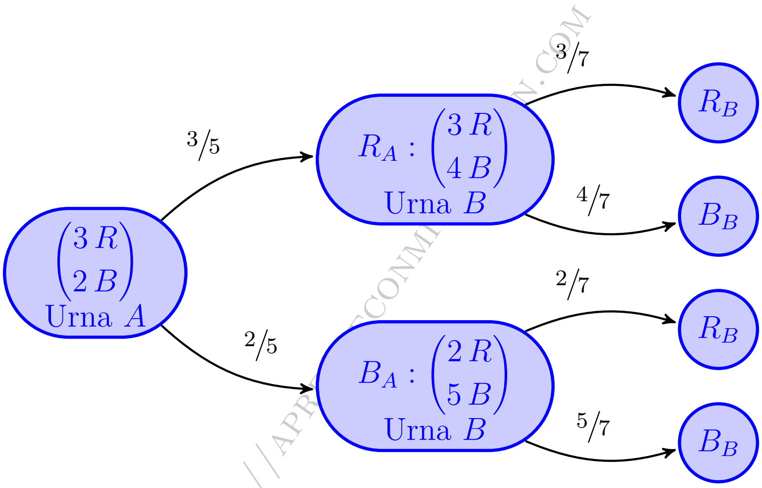
b) (1 punto) las dos bolas extraídas sean blancas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Se extrae una bola roja de la urna } i\text{”}$$
$$B_i \equiv \text{“Se extrae una bola blanca de la urna } i\text{”}$$



a) $P(R_B) = P\big((R_A \cap R_B) \cup (B_A \cap R_B)\big) = P(R_A \cap R_B) + P(B_A \cap R_B)$

$$= P(R_A) \cdot P(R_B \mid R_A) + P(B_A) \cdot P(R_B \mid B_A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0.371$$

b) $P(B_A \cap B_B) = P(B_A) \cdot P(B_B \mid B_A) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7} = 0.286$

Ejercicio 53 (2 *puntos*)

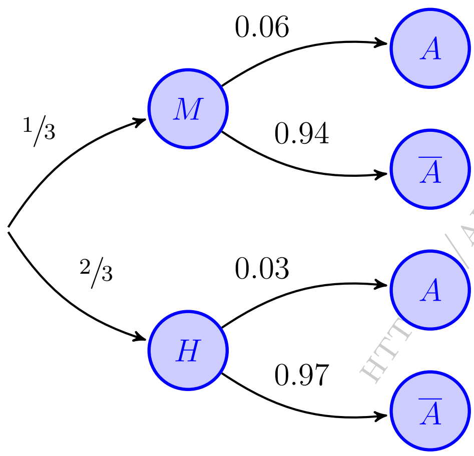
> *En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:*
>
> *a) (1 punto) Padezca albinismo.*
>
> *b) (1 punto) Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
M &\equiv \text{“El individuo es macho”}\\
H &\equiv \text{“El individuo es hembra”}\\
A &\equiv \text{“El individuo es albino”}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} P(H) = 2\cdot P(M) \\ P(H)+P(M)=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2P(M)+P(M)=1 \Longrightarrow \begin{cases} P(M) = 1/3 \\ P(H) = 2/3 \end{cases}
$$



a)
$$
\begin{aligned}
P(A) &= P\big((M\cap A)\cup(H\cap A)\big)\\
&= P(M\cap A)+P(H\cap A)\\
&= P(M)\cdot P(A\mid M)+P(H)\cdot P(A\mid H)\\
&= \frac{1}{3}\cdot 0.06+\frac{2}{3}\cdot 0.03 = 0.04
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
P(H\mid A) &= \frac{P(H\cap A)}{P(A)} = \frac{P(H)\cdot P(A\mid H)}{P(A)}\\
&= \frac{2/3\cdot 0.03}{0.04} = 0.5
\end{aligned}
$$

Ejercicio 54 (2 *puntos*)

Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientas que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabildad de que:

a) (1 punto) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

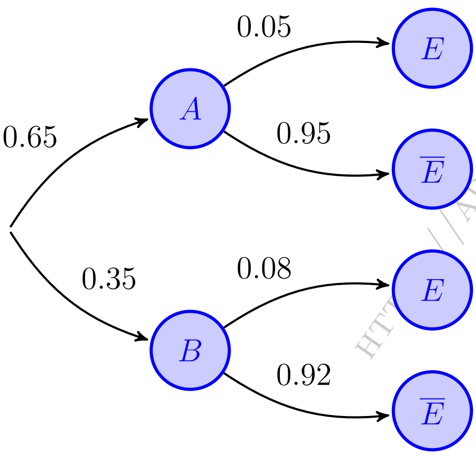
b) (1 punto) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El escáner utilizado es el A”}$$
$$B \equiv \text{“El escáner utilizado es el B”}$$
$$E \equiv \text{“El diagnóstico efectuado es erróneo”}$$



a) $$P(E) = \big(P(A\cap E)\cup(B\cap E)\big) = P(A\cap E) + P(B\cap E) = P(A)\cdot P(E\mid A) + P(B)\cdot P(E\mid B) = 0.65\cdot 0.05 + 0.35\cdot 0.08 = 0.0605$$

b) $$P(A\mid E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)\cdot P(E\mid A)}{P(E)} = \frac{0.65\cdot 0.05}{0.0605} = 0.537$$

Ejercicio 55 (2 *puntos*)

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % *de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el* 40 % *tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es* 0.01 *si tiene una antigüedad inferior a dos años;* 0.05 *si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y* 0.12 *si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:*

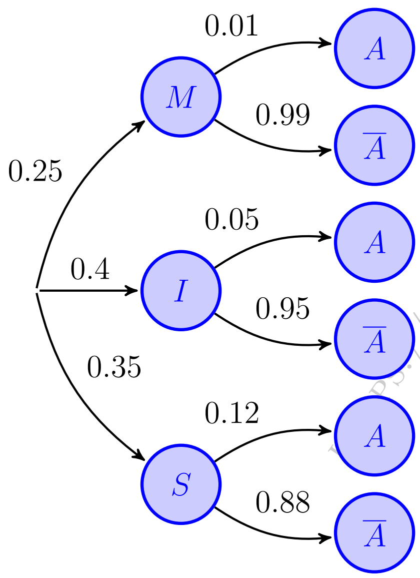
a) (1 punto) Se estropee.

b) (1 punto) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

$$M \equiv \text{Antigüedad} < 2 \text{ años} \qquad I \equiv 2 < \text{ Antigüedad } < 4 \text{ años}$$
$$S \equiv \text{Antigüedad} > 4 \text{ años} \qquad E \equiv \text{La furgoneta se estropea}$$



a) $$\begin{aligned} P(E) &= P\big((M\cap E)\cup(I\cap E)\cup(S\cap E)\big) \\ &= P(M\cap E)+P(I\cap E)+P(S\cap E) \\ &= P(M)\cdot P(E\mid M)+P(I)\cdot P(E\mid I) \\ &+ P(S)\cdot P(E\mid S) = 0.25\cdot 0.01 \\ &+ 0.4\cdot 0.05 + 0.35\cdot 0.12 = 0.0645 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(S\mid \overline{E}) &= \frac{P(S\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(S)\cdot P(\overline{E}\mid S)}{1-P(E)} \\ &= \frac{0.35\cdot 0.88}{1-0.0645} = 0.329 \end{aligned}$$

Ejercicio 56 (2 *puntos*)

El profesorado de cierta Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad elegido al azar:

a) (1 punto) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

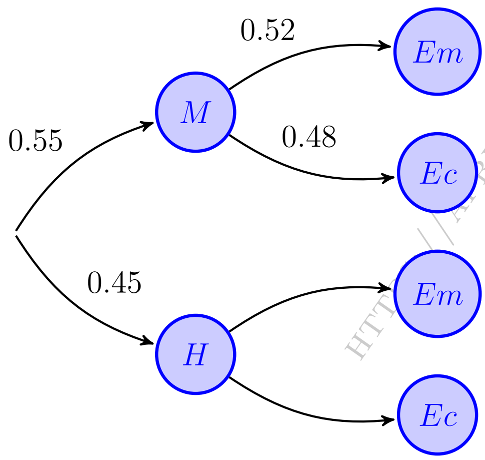
b) (1 punto) Sea de Economía y sea mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Junio - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} Ec &\equiv \text{El profesor es de Económía} \\ Em &\equiv \text{´´El profesor es de Empresa''} \\ M &\equiv \text{´´El miembro del profesorado es mujer''} \\ H &\equiv \text{´´El miembro del profesorado es hombre''} \end{aligned}$$



$$P(Ec) = 0.6 \implies P(Em) = 1 - P(Ec) = 0.4$$

a) $$P(M \mid Em) = \frac{P(M \cap Em)}{P(Em)} = \frac{P(M) \cdot P(Em \mid M)}{P(Em)} = \frac{0.55 \cdot 0.52}{0.4} = 0.715$$

b) $$P(Ec \cap M) = P(M \cap Ec) = P(M) \cdot P(Ec \mid M) = 0.55 \cdot 0.48 = 0.264$$

Ejercicio 57 (2 *puntos*)

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0.02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0.06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador

a) (1 punto) No salga defectuoso.

b) (1 punto) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

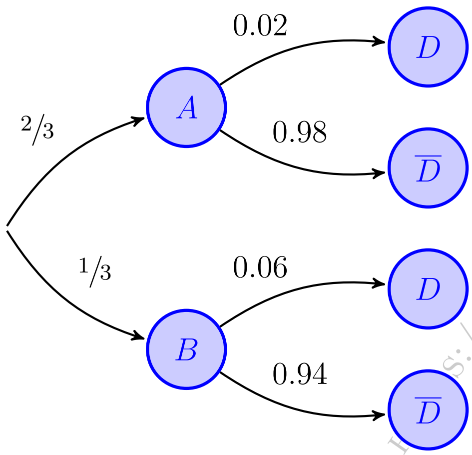
(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Septiembre - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El ordenador es del modelo A"
$B \equiv$ "El ordenador es del modelo B"
$D \equiv$ "El ordenador es defectuoso"

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array}\right\} \implies 2P(B) + P(B) = 1 \implies \begin{cases} P(A) = 2/3 \\ P(B) = 1/3 \end{cases}$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P\Big((A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D})\Big) \\ &= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) \\ &= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A \mid D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{1 - P(\overline{D})} \\ &= \frac{2/3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.404 \end{aligned}$$

Ejercicio 58 (2 *puntos*)

En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) (1 punto) Reciba clases de flamenco.

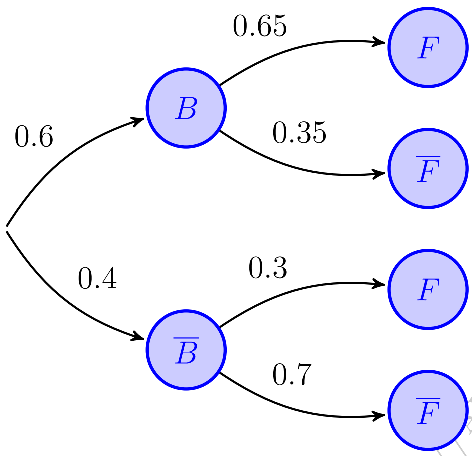
b) (1 punto) Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$$B = \text{“El alumno recibe clases de ballet”}$$
$$F = \text{“El alumno recibe clases de flamenco”}$$



a) $P(F) = P\Big((B\cap F)\cup(\overline{B}\cap F)\Big)$

$$P(B\cap F) + P(\overline{B}\cap F)$$
$$= P(B)\cdot P(F \mid B) + P(\overline{B})\cdot P(F \mid \overline{B})$$
$$= 0.6\cdot 0.65 + 0.4\cdot 0.3 = 0.51$$

b) $P(B \mid \overline{F}) = \dfrac{P(B\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(B)\cdot P(\overline{F}\mid B)}{1-P(F)}$

$$= \frac{0.6\cdot 0.35}{1-0.51} = 0.429$$

Ejercicio 59 (2 *puntos*)

En una comunidad de vecinos en el $70\,\%$ *de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el* $30\,\%$ *restante un nombre femenino. En dicha comunidad la probabildad de que un hombre trabaje es de 0.8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es* 0.7*. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:*

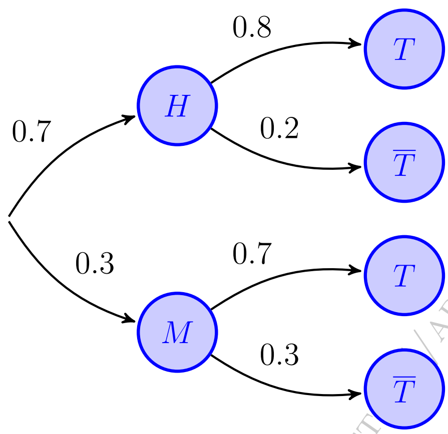
a) (1 punto) Una persona que trabaja.

b) (1 punto) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.
Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
H &\equiv \text{“El primer nombre del buzon es masculino”}\\
M &\equiv \text{“El primer nombre del buzon es femenino”}\\
T &\equiv \text{“La persona trabaja”}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\text{a)}\ \ P(T) &= P\big((H\cap T)\cup(M\cap T)\big)\\
&= P(H\cap T)+P(M\cap T)\\
&= P(H)\cdot P(T\mid H)+P(M)\cdot P(T\mid M)\\
&= 0.7\cdot 0.8+0.3\cdot 0.7=0.77
\end{aligned}
$$

$$
\text{b)}\ \ P(H\mid T)=\frac{P(H\cap T)}{P(T)}=\frac{P(H)\cdot P(T\mid H)}{P(T)}
$$

$$
=\frac{0.7\cdot 0.8}{0.77}=0.727
$$

Ejercicio 60 (2 *puntos*)

Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

a) (1 punto) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) (1 punto) Si el 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

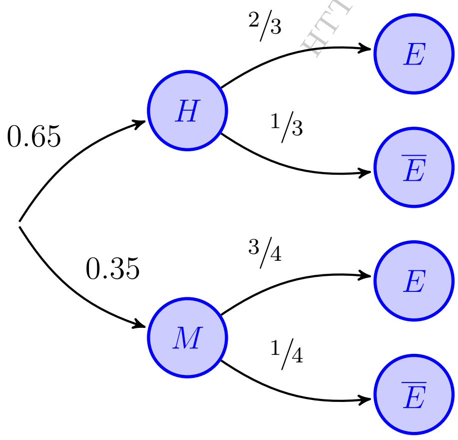
a) Denominamos los sucesos:

$$He \equiv \text{“El hombre elegido ha entrenado”}$$
$$Me \equiv \text{“La mujer elegida ha entrenado”}$$

$$P(He \cup Me) = P(He) + P(Me) - P(He \cap Me) = P(He) + P(Me) - P(He) \cdot P(Me)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$$

b) Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“La persona elegida es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“La persona elegida es mujer”}$$
$$E \equiv \text{La persona ha entrenado}$$



$$P(E) = P\big((H \cap E) \cup (M \cap E)\big)$$
$$= P(H \cap E) + P(M \cap E)$$
$$= P(H) \cdot P(E \mid H) + P(M) \cdot P(E \mid M)$$
$$= 0.65 \cdot \frac{2}{3} + 0.35 \cdot \frac{3}{4} = 0.6958$$

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{P(H) \cdot P(E \mid H)}{P(E)}$$
$$= \frac{0.65 \cdot {}^{2}\!/_{3}}{0.6958} = 0.6227$$

f

Ejercicio 61 (2 *puntos*)

En una determinada sede de la EVAU hay un 45 % de alumnos de la modalidad de Ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACCSSII). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen MACCSSII. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de MACCSSII. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Se examine de MACCSSII.

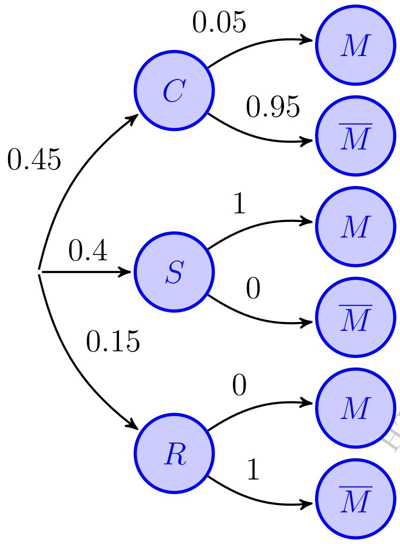
b) (1 punto) Sabiendo que se examina de MACCSS sea un alumno de la modalidad de Ciencias.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

$C \equiv$ "El alumno es de Ciencias" $\quad S \equiv$ "El alumno es de Ciencias Sociales"

$R \equiv$ "El alumno es de otra modalidad" $\quad M \equiv$ "El alumno se examina de MACCSSII"



a) $$P(M) = P\big((C\cap M)\cup(S\cap M)\cup(R\cap M)\big)$$
$$= P(C\cap M) + P(S\cap M) + P(R\cap M)$$
$$= P(C)\cdot P(M \mid C) + P(S)\cdot P(M \mid S)$$
$$+ P(R)\cdot P(M \mid R) = 0.45\cdot 0.05$$
$$+ 0.4\cdot 1 + 0.15\cdot 0 = 0.4225$$

b) $$P(C \mid M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)\cdot P(M \mid C)}{P(M)}$$
$$= \frac{0.45\cdot 0.05}{0.4225} = 0.0533$$

Ejercicio 62 (2 *puntos*)

Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0.2. *La probabilidad de que, siendo extranjero, sea hombre es* 0.45. *Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es* 0.1. *calcúlese la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Conocido que es español, sea un hombre.

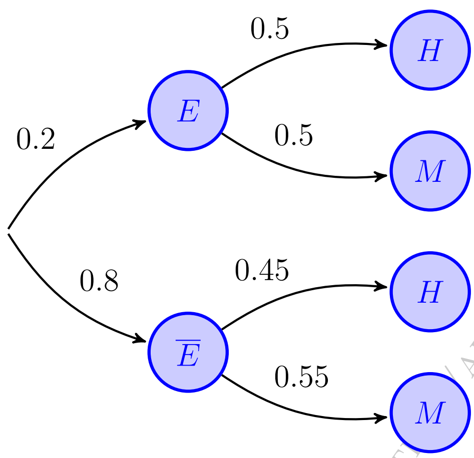
b) (1 punto) Sea una mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El cliente es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“El cliente es mujer”}$$
$$E \equiv \text{“El cliente es español”}$$



a) $P(M \mid E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0.1}{0.2} = 0.5$

$\implies P(H \mid E) = 1 - 0.5 = 0.5$

b) $P(M) = P\Big((E \cap M) \cup (\overline{E} \cap M)\Big)$

$= P(E \cap M) + P(\overline{E} \cap M)$

$= P(E) \cdot P(M \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(M \mid \overline{E})$

$= 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.55 = 0.54$

Ejercicio 63 (2 *puntos*)

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0.60*. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a* 0.30 *mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es* 0.15*. Seleccionado un niño al azar de esta región,*

a) (1 punto) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

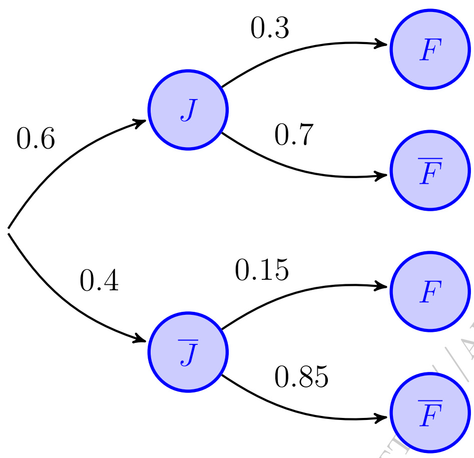
b) (1 punto) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$J \equiv \text{“El niño juega más de lo recomendado”}$$
$$F \equiv \text{“El niño tiene fracaso escolar”}$$



a) $$\begin{aligned} P(F) &= P\big((J\cap F)\cup(\overline{J}\cap F)\big) \\ &= P(J\cap F)+P(\overline{J}\cap F) \\ &= P(J)\cdot P(F\mid J)+P(\overline{J})\cdot P(F\cap \overline{J}) \\ &= 0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.15 = 0.24 \end{aligned}$$

b) $$P(\overline{J}\mid F)=\frac{P(\overline{J}\cap F)}{P(F)}=\frac{P(\overline{J})\cdot P(F\mid \overline{J})}{P(F)}$$

$$P(\overline{J}\mid F)=\frac{0.4\cdot 0.15}{0.24}=0.25$$

Ejercicio 64 (2 *puntos*)

En una panadería se elabora pan de dos tipos: blanco y cereales. Uno de cada tres panes es de cereales. Un pan blanco tiene la misma probabilidad de estar elaborado con masa congelada que con masa fresca, mientras que la probabilidad de que un pan de cereales se elabore con masa fresca es de 0.6. Se elige un pan al azar. Determínese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Esté elaborado con masa fresca.

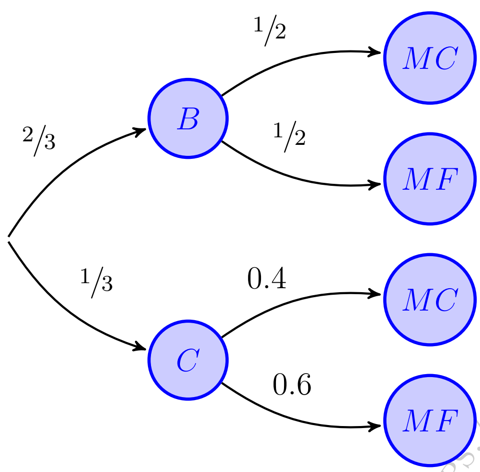
b) (1 punto) Sea de cereales sabiendo que está elaborado con masa congelada.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$B \equiv$ "El pan es blanco" $\quad C \equiv$ "El pan es de cereales"

$MC \equiv$ "El pan es de masa congelada" $\quad MF \equiv$ "El pan es de masa fresca"



a) $$\begin{aligned} P(MF) &= P\big((B \cap MF) \cup (C \cap MF)\big) \\ &= P(B \cap MF) + P(C \cap MF) \\ &= P(B) \cdot P(MF \mid B) + P(C) \cdot P(MF \mid C) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0.6 = 0.53 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(C \mid MC) &= \frac{P(C \cap MC)}{P(MC)} \\ &= \frac{P(C) \cdot P(MC \mid C)}{1 - P(MF)} \\ &= \frac{1/3 \cdot 0.4}{1 - 0.53} = 0.286 \end{aligned}$$

Ejercicio 65 (2 *puntos*)

Una única carta, escogida al azar, es eliminada, sin ser vista, de una baraja española de 40 cartas, 10 cartas de cada palo (espadas, copas, oros y bastos). Una vez eliminada se escoge al azar otra carta, entre las qe quedan en el mazo, y se observa.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que la carta observada sea del palo de espadas.

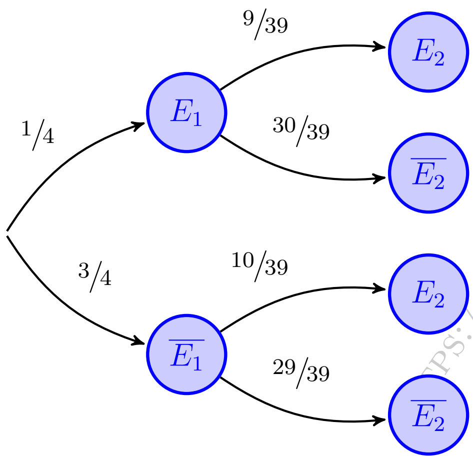
b) (1 punto) Si la carta observada no es del palo de espadas, calcúlese la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$$E_1 = \text{“La carta eliminada es de espadas”}$$
$$E_2 = \text{“La carta observada es de espadas”}$$



a) $$P(E_2) = P\Big((E_1 \cap E_2) \cup (\overline{E_1} \cap E_2)\Big) = P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E_1} \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) + P(\overline{E_1}) \cdot P(E_2 \mid \overline{E_1}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} + \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{39} = \frac{1}{4}$$

b) $$P(\overline{E_1} \mid \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_2})} = \frac{P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1})}{1 - P(E_2)} = \frac{3/4 \cdot 29/39}{1 - 1/4} = \frac{29}{39}$$

Ejercicio 66 (2 *puntos*)

Se lanza un dado para decidir si se va al cine o al teatro. Si sale 1 *o* 6 *se va al teatro, en caso contrario al cine. Luego, se escoge una función al azar, de cine o teatro, según lo que haya indicado el dado. El* 50 % *de las funciones de teatro son comedias mientras que sólo* 112 *de las* 448 *funciones de cine lo son.*

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de ver una comedia.

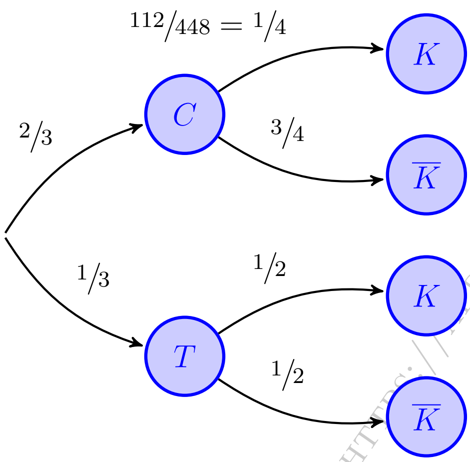
b) (1 punto) Si el resultado fue no ver comedia, calcúlese la probabilidad de que haya sido en el teatro.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“Se va al cine”}$$
$$T \equiv \text{“Se va al teatro”}$$
$$K \equiv \text{“Se ve una comedia”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(K) &= P\big((C\cap K)\cup(T\cap K)\big) \\ &= P(C\cap K)+P(T\cap K) \\ &= P(C)\cdot P(K\mid C)+P(T)\cdot P(K\mid T) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(T\mid \overline{K}) &= \frac{P(T\cap\overline{K})}{P(\overline{K})}=\frac{P(T)\cdot P(\overline{K}\mid T)}{1-P(K)} \\ &= \frac{1/3\cdot 1/2}{1-1/3}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 67 (2 *puntos*)

En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que solo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

a) (1 punto) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.

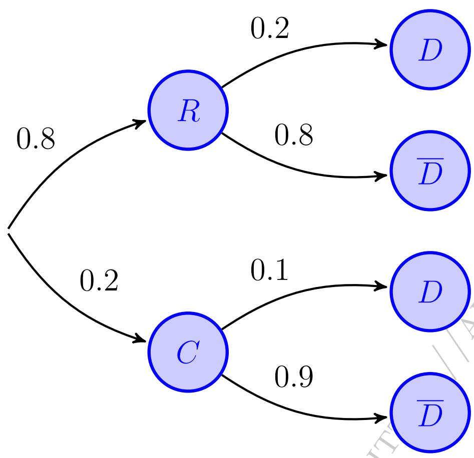
b) (1 punto) Sea devuelta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R \equiv \text{“La venta es de ropa”}$$
$$C \equiv \text{“La venta es de complementos de moda”}$$
$$D \equiv \text{“La compra es devuelta”}$$



a) $P(R \cap D) = P(R) \cdot P(D \mid R)$
$= 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

b) $P(D) = P\big((R \cap D) \cup (C \cap D)\big)$
$= P(R \cap D) + P(C \cap D)$
$= P(R) \cdot P(D \mid R) + P(C) \cdot P(D \mid C)$
$= 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.18$

Ejercicio 68 (2 *puntos*)

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % *de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el* 35 % *a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en* 0.5, 0.6 *y* 0.45, *respectivamente. Elegido un socio al azar:*

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) (1 punto) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

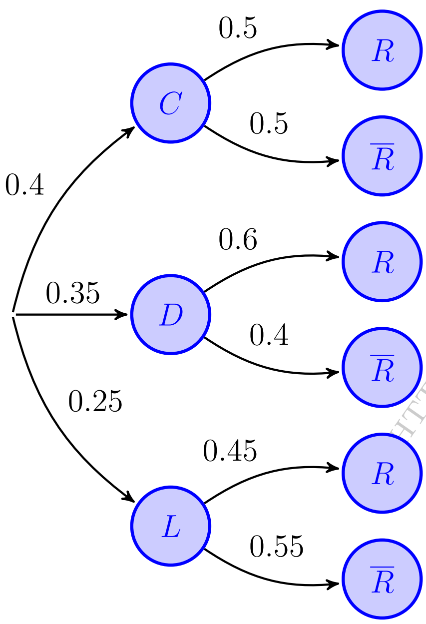
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ "Senderismo en río Cuervo" $\qquad D \equiv$ "Senderismo en río Duratón"

$L \equiv$ "Senderismo en río Lobos" $\qquad R \equiv$ "Llueve durante la excursión"



a) $P(\overline{R}) = P\big(C \cap \overline{R}) \cup (D \cap \overline{R}) \cup (L \cap \overline{R})\big)$

$= P(C \cap \overline{R}) + P(D \cap \overline{R}) + P(L \cap \overline{R})$

$= P(C) \cdot P(\overline{R} \mid C) + P(D) \cdot P(\overline{R} \mid D)$

$+ P(L) \cdot P(\overline{R} \mid L) = 0.4 \cdot 0.5$

$+ 0.35 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.55 = 0.4775$

b) $P(C \mid R) = \dfrac{P(C \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(C) \cdot P(R \mid C)}{1 - P(\overline{R})}$

$= \dfrac{0.4 \cdot 0.5}{1 - 0.4775} = 0.3828$

Ejercicio 69 (2 *puntos*)

En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) El espectáculo sea gratuito y no se realize en la calle.

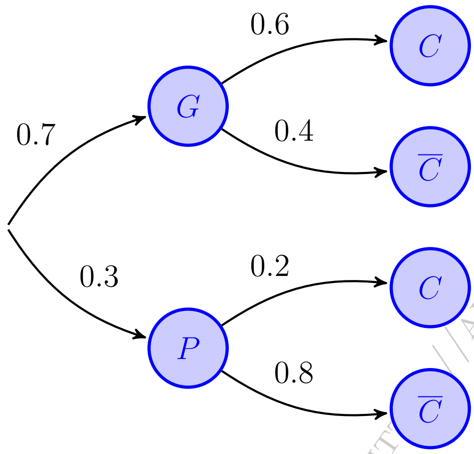
b) (1 punto) El espectáculo se realice en la calle.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$G \equiv \text{“El espectáculo es gratuito”}$$
$$P \equiv \text{“El espectáculo es de pago”}$$
$$C \equiv \text{“El espectáculo se hace en la calle”}$$



a) $P(G \cap \overline{C}) = P(G) \cdot P(\overline{C} \mid G) = 0.7 \cdot 0.4$
$= 0.28$

b) $P(C) = P\big((G \cap C) \cup (P \cap C)\big)$
$= P(G \cap C) + P(P \cap C)$
$= P(G) \cdot P(C \mid G) + P(P) \cdot P(C \mid P)$
$= 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.48$

Ejercicio 70 (2 *puntos*)

> *En un instituto se decide que los alumnos solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de* 0.7*. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es* 0.2*. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que*
>
> *a) (1 punto) Sea el examen de un alumno.*
>
> *b) (1 punto) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)*

Solución.

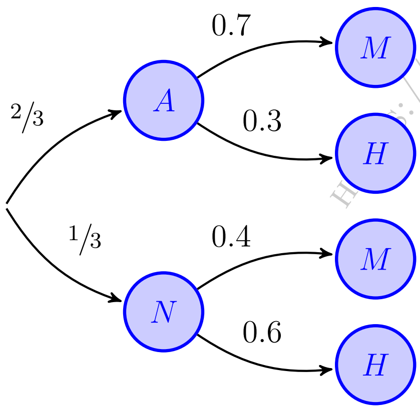
Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{“El examen está escrito en azul”} \\ N &\equiv \text{“El examen está escrito en Negro”} \\ M &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumna”} \\ H &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumno”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \& \quad P(M \mid A) = 0.7 \quad \& \quad P(N \cap H) = 0.2$$

$$P(N \cap H) = P(N) \cdot P(H \mid N) = \frac{1}{3} \cdot P(H \mid N) = 0.2 \implies P(H \mid N) = 0.6$$



a) $$\begin{aligned} P(H) &= P\big((A \cap H) \cup (N \cap H)\big) \\ &= P(A \cap H) + P(N \cap H) \\ &= P(A) \cdot P(H \mid A) + P(N) \cdot P(H \mid N) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.6 = 0.4 \end{aligned}$$

b) $$P(H \mid N) = \frac{P(N \cap H)}{P(N)} = \frac{0.2}{1/3} = 0.6$$

Ejercicio 71 (2 *puntos*)

En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

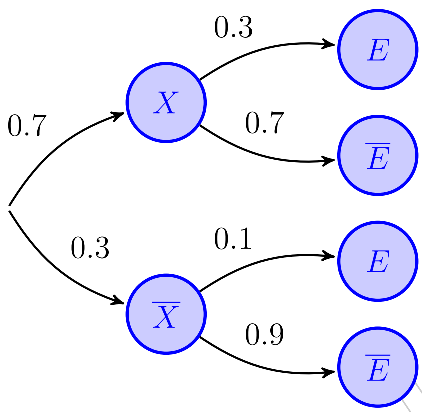
b) (1 punto) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los siguientes sucesos:

$$X \equiv \text{“La verdura es de proximidad”}$$
$$E \equiv \text{“La verdura es ecológica”}$$



$$\begin{aligned}\text{a) } P(\overline{E}) &= P\big((X \cap \overline{E}) \cup (\overline{X} \cap \overline{E})\big)\\ &= P(X \cap \overline{E}) + P(\overline{X} \cap \overline{E})\\ &= P(X) \cdot P(\overline{E} \mid X) + P(\overline{X}) \cdot P(\overline{E} \mid \overline{X})\\ &= 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.76\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } P(X \cup E) &= P(X) + P(E) - P(X \cap E)\\ &= P(X) + 1 - P(\overline{E}) - P(X) \cdot P(E \mid X)\\ &= 0.7 + 1 - 0.76 - 0.7 \cdot 0.3 = 0.73\end{aligned}$$

Ejercicio 72 (2 *puntos*)

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

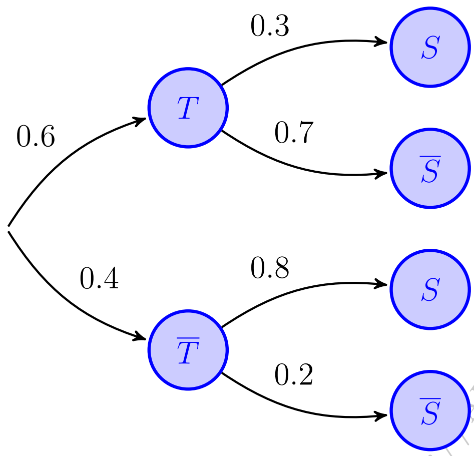
b) (1 punto) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$T \equiv \text{“El empleado teletrabaja”}$$
$$S \equiv \text{“El empleado tiene trastorno del sueño”}$$



a) $P(\overline{S} \cap T) = P(T) \cdot P(\overline{S} \mid T)$
$= 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

b) $P(\overline{T} \mid \overline{S}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} \overset{\circledast}{=} \dfrac{0.4 \cdot 0.2}{0.5} = 0.16$

$\circledast$ $P(\overline{S}) = P\Big((T \cap \overline{S}) \cup (\overline{T} \cap \overline{S})\Big)$
$= P(T \cap \overline{S}) + P(\overline{T} \cap \overline{S})$
$= P(T) \cdot P(\overline{S} \mid T) + P(\overline{T}) \cdot P(\overline{S} \mid \overline{T})$
$0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.5$

Ejercicio 73 (2 *puntos*)

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0.02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0.06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) (1 punto) No sufra fracaso escolar.

b) (1 punto) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

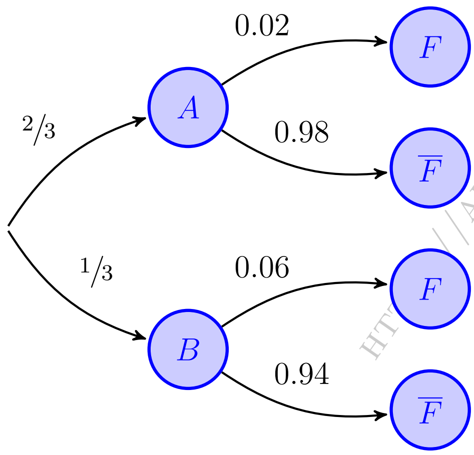
(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El alumno reside en el municipio } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“El alumno reside en el municipio } B\text{”}$$
$$F \equiv \text{“El alumno tiene fracaso escolar”}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 2\cdot P(B) \\ P(A)+P(B)=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\cdot P(B)+P(B)=1 \Longrightarrow P(B)=\frac{1}{3} \Longrightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$



a) $$P(\overline{F}) = P\big((A\cap\overline{F})\cup(B\cap\overline{F})\big)$$
$$= P(A\cap\overline{F}) + P(B\cap\overline{F})$$
$$= P(A)\cdot P(\overline{F}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{F}\mid B)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 0.98 + \frac{1}{3}\cdot 0.94 = 0.967$$

b) $$P(A\mid F) = \frac{P(A\cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)\cdot P(F\mid A)}{1-P(\overline{F})}$$
$$= \frac{{}^{2}/_{3}\cdot 0.02}{1-0.967} = 0.4$$

Ejercicio 74 (2 *puntos*)

Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El $60\,\%$ *de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el* $40\,\%$ *restante del segundo. El* $50\,\%$ *de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un* $80\,\%$ *para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:*

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

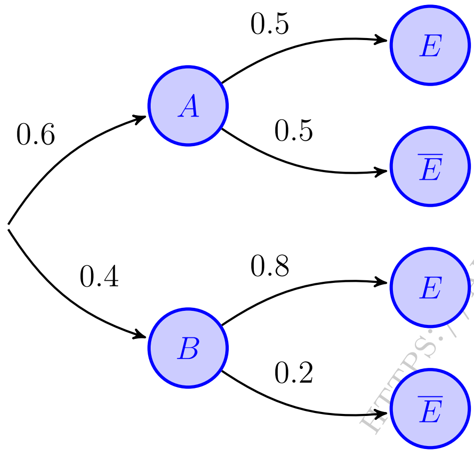
b) (1 punto) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \text{“El plato es del primer restaurante”}\\
B &\equiv \text{“El plato es del segundo restaurante”}\\
E &\equiv \text{“El plato es productos ecológicos”}
\end{aligned}
$$



a)
$$
\begin{aligned}
P(E) &= P\big((A\cap E)\cup(B\cap E)\big)\\
&= P(A\cap E)+P(B\cap E)\\
&= P(A)\cdot P(E\mid A)+P(B)\cdot P(E\mid B)\\
&= 0.6\cdot 0.5+0.4\cdot 0.8 = 0.62
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
P(B\mid\overline{E}) &= \frac{P(B\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(B)\cdot P(\overline{E}\mid B)}{1-P(E)}\\
&= \frac{0.4\cdot 0.2}{1-0.62} = 0.2105
\end{aligned}
$$

Matemáticas II - EVAU Madrid

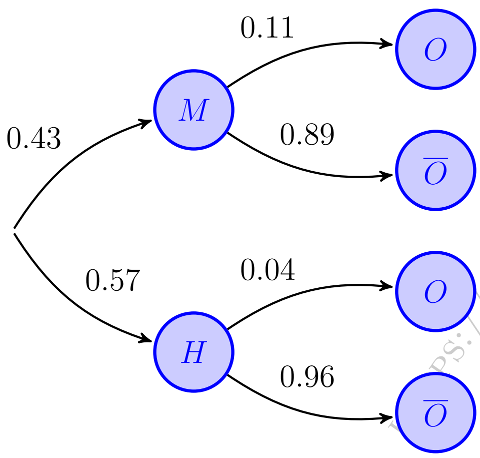
Ejercicio 75 (2 *puntos*)

> *En una población de cierta especie de cérvidos, el 43 % de los adultos son machos y el 57 % hembras. Se sabe que el 11 % de los machos adultos y el 4 % de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:*
>
> *a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.*
>
> *b) (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción B)*

Solución.

Sean los sucesos

$$M \equiv \text{“El cérvido es macho adulto”}$$
$$H \equiv \text{“El cérvido es hembra adulta”}$$
$$O \equiv \text{“El cérvido tiene una afección ocular”}$$



a) $P(O) = P\big((M\cap O)\cup(H\cap O)\big)$
$= P(M\cap O) + P(H\cap O)$
$= P(M)\cdot P(O \mid M) + P(H)\cdot P(O \mid H)$
$= 0.43\cdot 0.11 + 0.57\cdot 0.04 = 0.0701$

b) $$P(M \mid O) = \frac{P(M\cap O)}{P(O)} = \frac{P(M)\cdot P(O \mid M)}{P(O)} = \frac{0.43\cdot 0.11}{0.0701} = 0.6747$$

Ejercicio 76 (2 *puntos*)

En una empresa el 20 % de los empleados son matemáticos, el 50 % ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40 % ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5 %. Elegido un empleado al azar, se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) (1 punto) Si no ocupa un cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

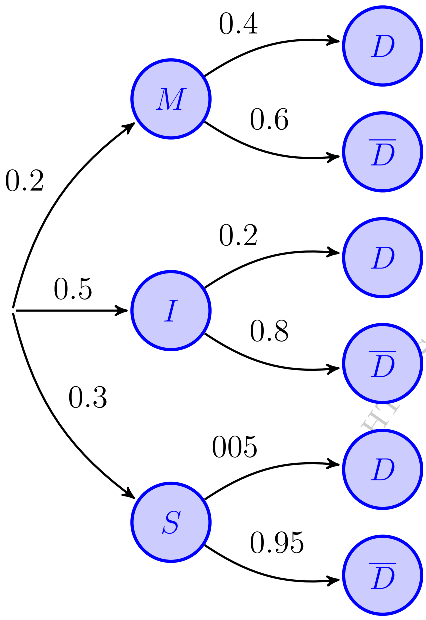
(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$M \equiv$ "El empleado es matemático" $\quad I \equiv$ "El empleado es ingeniero"

$S \equiv$ "El empleado no tiene carrera" $\quad D \equiv$ "El empleado ocupa un cargo directivo"



a) $P(D) = P\big((M \cap D) \cup (I \cap D) \cup (S \cap D)\big)$

$$= P(M \cap D) + P(I \cap D) + P(S \cap D)$$

$$= P(M) \cdot P(D \mid M) + P(I) \cdot P(D \mid I)$$

$$+ P(S) \cdot P(D \mid S) = 0.2 \cdot 0.4$$

$$+ 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.05 = 0.195$$

b) $P(M \mid \overline{D}) = \dfrac{P(M \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(M) \cdot P(\overline{D} \mid M)}{1 - P(D)}$

$$= \frac{0.2 \cdot 0.6}{1 - 0.195} = 0.149$$

Ejercicio 77 (2 *puntos*)

Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, B y M. El 20 % de los móviles fabricados son de la marca A y el 40 % de la marca B. Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software espía se instala en el 15 % de los móviles de la marca A, en un 10 % de la marca B y en un 12 % de los móviles de la marca M. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) (1 punto) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

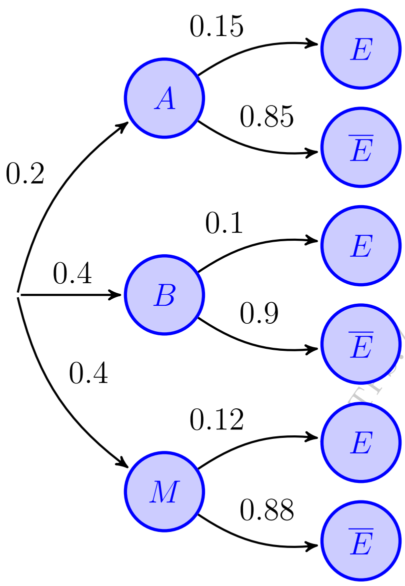
(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El móvil es de la marca A" $\qquad B \equiv$ "El móvil es de la marca B"

$M \equiv$ "El móvil es de la marca M" $\qquad E \equiv$ "El móvil tiene software espía"



a) $P(E) = P\big((A\cap E)\cup(B\cap E)\cup(M\cap E)\big)$
$= P(A\cap E) + P(B\cap E) + P(M\cap E)$
$= P(A)\cdot P(E \mid A) + P(B)\cdot P(E \mid B)$
$+ P(M)\cdot P(E \mid M) = 0.2\cdot 0.15$
$+ 0.4\cdot 0.1 + 0.4\cdot 0.12 = 0.118$

b) $$P(A \mid E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)\cdot P(E\mid A)}{P(E)} = \frac{0.2\cdot 0.15}{0.118} = 0.254$$

Ejercicio 78 (2.5 *puntos*)

El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artícuos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

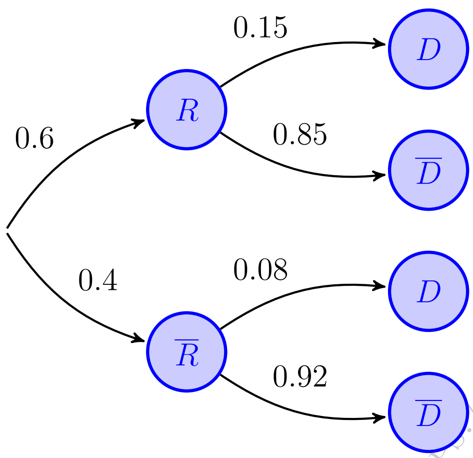
b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Sean los sucesos:

$$R \equiv \text{"El artículo tiene precio rebajado"}$$
$$D \equiv \text{"El cliente devuelve el artículo"}$$



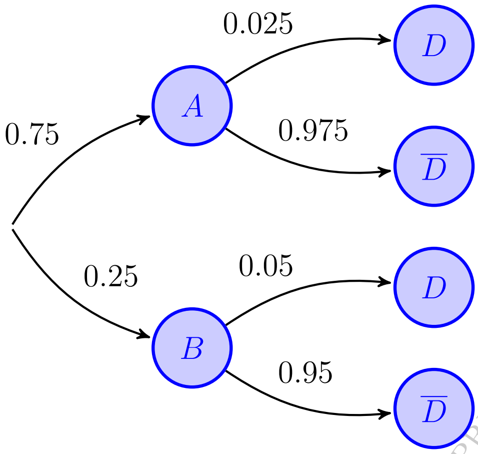
a)
$$\begin{aligned} P(D) &= P\Big((R\cap D)\cup(\overline{R}\cap D)\Big) \\ &= P(R\cap D)+P(\overline{R}\cap D) \\ &= P(R)\cdot P(D\mid R)+P(\overline{R})\cdot P(D\mid \overline{R}) \\ &= 0.6\cdot 015+0.4\cdot 0.08 = 0.122 = 12.2\,\% \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(R\mid D) &= \frac{P(R\cap D)}{P(D)} = \frac{P(R)\cdot P(D\mid R)}{P(D)} \\ &= \frac{0.6\cdot 0.15}{0.122} = 0.737 = 73.7\,\% \end{aligned}$$

Ejercicio 79 (2.5 *puntos*)

> *En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5 % de las veces.*
>
> *a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?*
>
> *b) (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)*

Solución.



a) Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El producto es de tipo A”}$$
$$B \equiv \text{“El producto es de tipo B”}$$
$$D \equiv \text{“El producto es defectuoso”}$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P\big((A \cap D) \cup (B \cap D)\big) \\ &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) \\ &= 0.75 \cdot 0.025 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.03125 \end{aligned}$$

$5000 \cdot 0.03125 \simeq 157$ prod. defectuosos

b) Ahora solo se fabrica un tipo de producto, que puede ser defectuoso o no. El número de productos defectuosos X se distribuye como una variable binomial $\mathcal{B}(6000, 0.025)$. Para poder aproximar la variable X a una normal tiene que cumplirse:

$$X : \mathcal{B}(6000, 0.025) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 6000 > 20 \checkmark \\ np = 150 > 5 \checkmark \\ nq = 5850 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(150, 12.09)$$

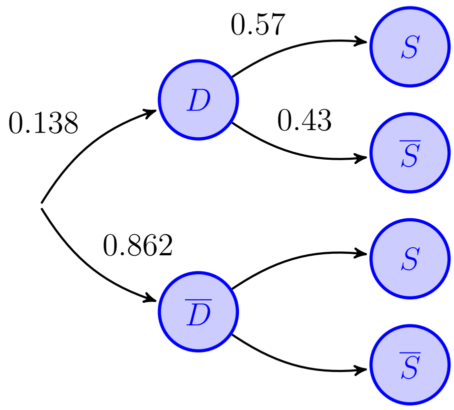
Aplicando la corrección por continuidad de Yates.

$$\begin{aligned} P(X > 160) = P(Y \geq 160.5) &= P\left(Z \geq \frac{160.5 - 150}{12.09}\right) = P(Z \geq 0.87) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922 \end{aligned}$$

Ejercicio 80 (2.5 *puntos*)

> *Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13.8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.*
>
> a) *(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?*
>
> b) *(1.5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)*

Solución.



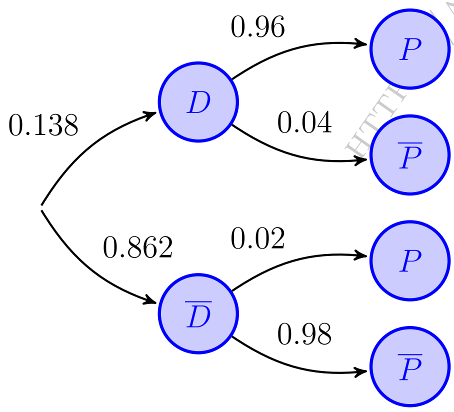
a) Sean los sucesos:

$D \equiv$ "La persona tiene diabetes"
$S \equiv$ "La persona sabe que tiene diabetes"

$$P(D \cap S) = P(D) \cdot P(S \mid D)$$
$$= 0.138 \cdot 0.57 = 0.0787$$
$$P(\overline{D} \cup \overline{S}) = P(\overline{D \cap S}) = 1 - P(D \cap S)$$
$$= 1 - 0.0787 = 0.9213$$

b) Sean los sucesos:

$D \equiv$ "La persona tiene diabetes"
$P \equiv$ "El test da positivo"



$$P(D \mid P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{P(D) \cdot P(P \mid D)}{P(P)}$$
$$\overset{\circledast}{=} \frac{0.138 \cdot 0.96}{0.1497} = 0.8849$$

$$\circledast \; P(P) = P\big((D \cap P) \cup (\overline{D} \cap P)\big)$$
$$= P(D \cap P) + P(\overline{D} \cap P)$$
$$= 0.138 \cdot 0.96 + 0.862 \cdot 0.02 = 0.1497$$

Ejercicio 81 (2.5 *puntos*)

El grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de una escuela de idiomas, está compuesto por un 60 % de mujeres y el resto varones. Se sabe que el 30 % del grupo estudia alemán y que la cuarta parte de las mujeres estudia alemán. Se recibe un mensaje en el grupo. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que el o la remitente estudia alemán.

b) (1.25 puntos) Si en el mensaje no hay ninguna información sobre el sexo y estudios del remitente, calcular la probabilidad de que sea varón y estudie alemán.

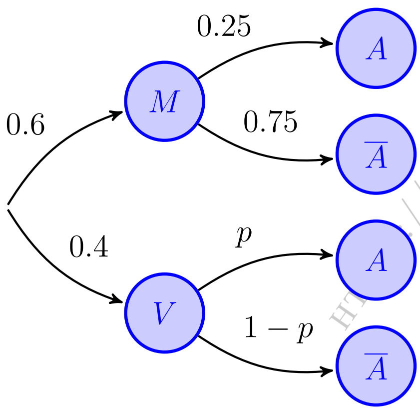
(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Denominamos los sucesos:

$$M \equiv \text{“El mensaje lo envía una mujer”}$$
$$V \equiv \text{“El mensaje lo envía un hombre”}$$
$$A \equiv \text{“El remitente estudia alemán”}$$

a) $P(M \mid A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(M) \cdot P(A \mid M)}{P(A)} = \dfrac{0.6 \cdot 0.25}{0.3} = 0.5$



b)
$$\begin{aligned} P(A) &= P\big((M \cap A) \cup (V \cap A)\big) \\ &= P(M \cap A) + P(V \cap A) \\ &= P(M) \cdot P(A \mid M) + P(V) \cdot P(A \mid V) \\ &= 0.6 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot p = 0.3 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow p = 0.375$

$$\begin{aligned} P(V \cap A) &= P(V) \cdot P(A \mid V) \\ &= 0.4 \cdot 0.375 = 0.15 \end{aligned}$$

Ejercicio 82 (2.5 *puntos*)

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

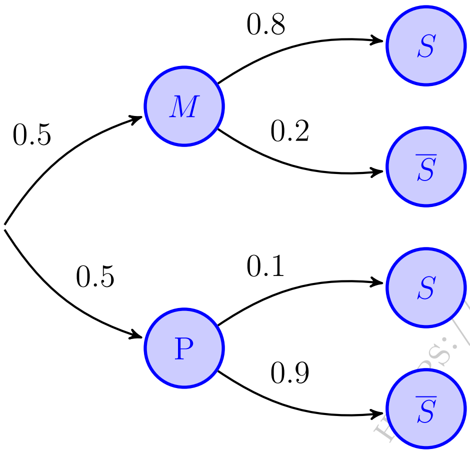
b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{"El paciente toma el medicamento"}$$
$$P \equiv \text{"El paciente toma el placebo"}$$
$$S \equiv \text{"El paciente sana"}$$



a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\big((M\cap S)\cup(P\cap S)\big) \\ &= P(M\cap S)+P(P\cap S) \\ &= P(M)\cdot P(S \mid M)+P(P)\cdot P(S\cap P) \\ &= 0.5\cdot 0.8+0.5\cdot 0.1 = 0.45 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(M\cap S) &= \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{P(M)\cdot P(S\mid M)}{P(S)} \\ &= \frac{0.5\cdot 0.8}{0.45} = 0.889 \end{aligned}$$

Ejercicio 83 (2.5 *puntos*)

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es el 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.*

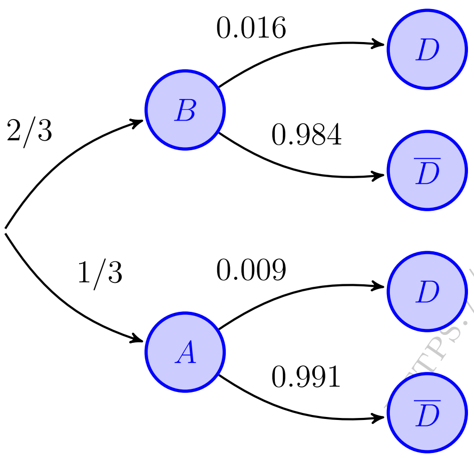
b) *(1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$B \equiv \text{“El vehículo es de baja gama”}$$
$$A \equiv \text{“El vehículo es de alta gama”}$$
$$D \equiv \text{“El vehículo es defectuoso”}$$



a) $$P(D) = P\Big((B \cap D) \cup (A \cap D)\Big) = P(B \cap D) + P(A \cap D) = P(B) \cdot P(D \mid B) + P(A) \cdot P(D \mid A) = \frac{2}{3} \cdot 0.016 + \frac{1}{3} \cdot 0.009 = 0.0137 \simeq 1.37\,\%$$

b) $$P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{P(D)} = \frac{{}^{2}\!/_{3} \cdot 0.016}{0.0137} = 0.7785 \simeq 78\,\%$$

Ejercicio 84 (2.5 *puntos*)

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) *(1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.*

b) *(1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.*

c) *(0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.*

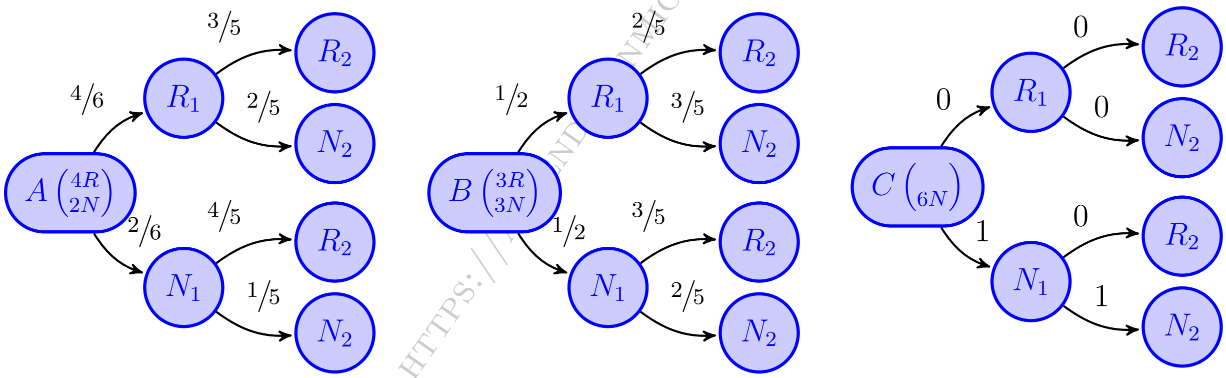
(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

Asumiendo que la probabilidad de elegir cualquier urna es la misma tenemos que:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Se muestra a continuación, para cada una de las urnas, la probabilidad de elegir una bola roja o una negra en cada una de las dos extracciones.



a) $$\begin{aligned} P(R_1) &= P\big((A\cap R_1)\cup(B\cap R_1)\cup(C\cap R_1)\big) \\ &= P(A\cap R_1)+P(B\cap R_1)+P(C\cap R_1) \\ &= P(A)\cdot P(R_1\mid A)+P(B)\cdot P(R_1\mid B)+P(C)\cdot P(R_1\mid C) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{7}{18}=0.3889 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(R_1\cap N_2) &= P\big((A\cap R_1\cap N_2)\cup(B\cap R_1\cap N_2)\cup(C\cap R_1\cap N_2)\big) \\ &= P(A\cap R_1\cap N_2)+P(B\cap R_1\cap N_2)+P(C\cap R_1\cap N_2) \\ &= P(A)\cdot P(R_1\cap N_2\mid A)+P(B)\cdot P(R_1\cap N_2\mid B) \\ &+P(C)\cdot P(R_1\cap N_2\mid C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{17}{90}=0.1889 \end{aligned}$$

c) $$P(N_2\mid R_1)=\frac{P(R_1\cap N_2)}{P(R_1)}=\frac{17/90}{7/18}=\frac{17}{35}=0.4857$$

Ejercicio 85 (2.5 *puntos*)

Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece.
Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) (0.5 puntos) Que la prueba dé resultado positivo.

b) (0.75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.

c) (0.75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.

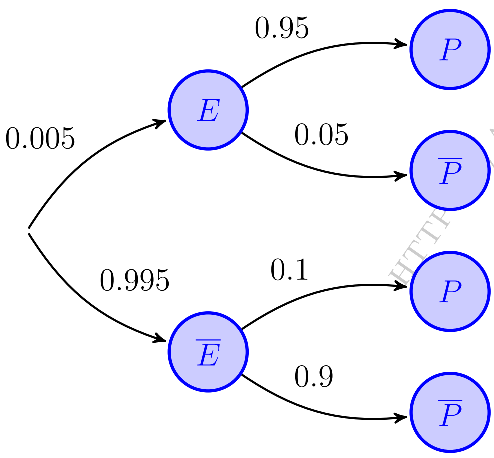
d) (0.5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{"La persona tiene la enfermedad"}$$
$$P \equiv \text{"La prueba diagnóstica da positivo"}$$



a) $P(P) = P\big((E \cap P) \cup (\overline{E} \cap P)\big)$
$= P(E \cap P) + P(\overline{E} \cap P)$
$= P(E) \cdot P(P \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(P \mid \overline{E})$
$= 0.005 \cdot 0.95 + 0.995 \cdot 0.1 = 0.1042$

b) $P(E \mid P) = \dfrac{P(E \cap P)}{P(P)} = \dfrac{P(E) \cdot P(P \mid E)}{P(P)}$
$= \dfrac{0.005 \cdot 0.95}{0.1042} = 0.04556$

c) $P(\overline{E} \mid \overline{P}) = \dfrac{P(\overline{E} \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{P(\overline{E}) \cdot P(\overline{P} \mid \overline{E})}{1 - P(P)} = \dfrac{0.995 \cdot 0.9}{1 - 0.1042} = 0.9997$

d) $P\big((E \cap \overline{P}) \cup (\overline{E} \cap P(P)\big) = P(E \cap \overline{P}) + P(\overline{E} \cap P(P)$
$= P(E) \cdot P(\overline{P} \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(P \mid \overline{E})$
$= 0.005 \cdot 0.05 + 0.995 \cdot 0.1 = 0.0998$

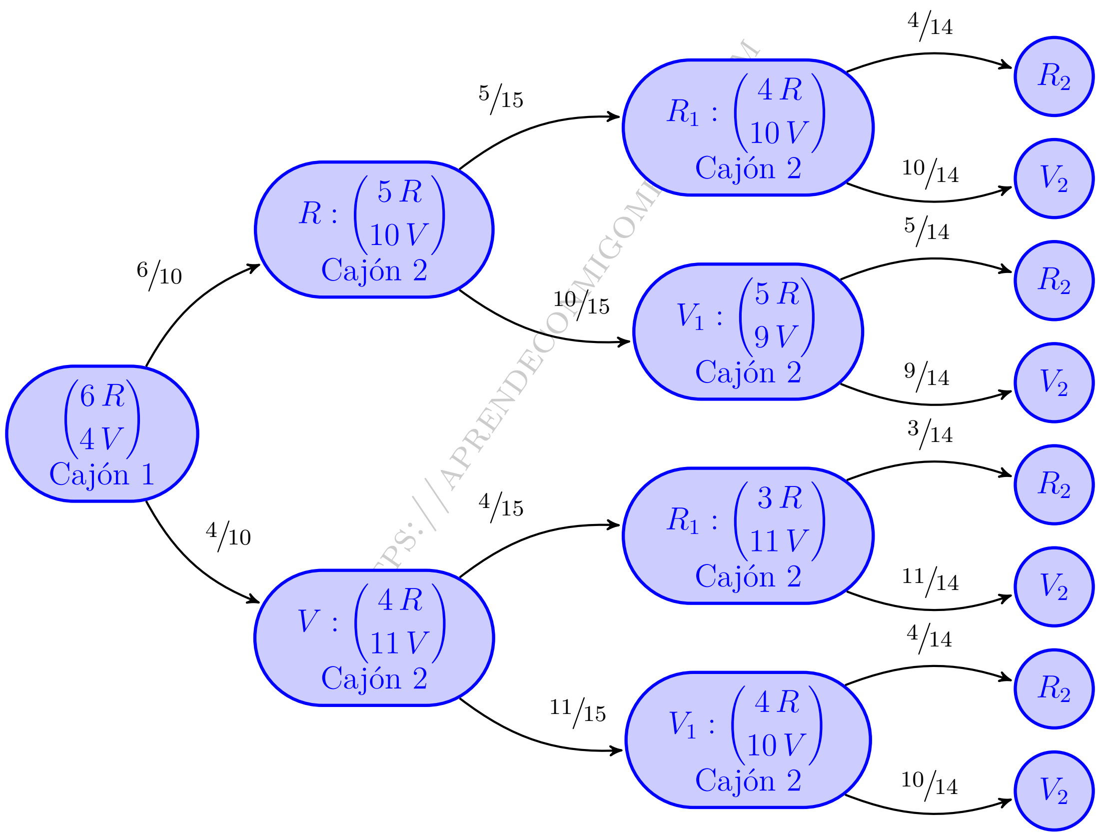
Ejercicio 86 (2.5 *puntos*)

> *En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$R \equiv$ ”Pasar calcetín rojo al cajón 2” $\quad V \equiv$ ”Pasar calcetín verde al cajón 2”
$R_i \equiv$ ”Calcetín rojo en extracción i” $\quad V_i \equiv$ ”Calcetín verde en extracción i”



$$
\begin{aligned}
P(\text{mismo color}) &= P(\text{dos rojos}) \cup (\text{dos verdes}) \\
&= P\Big((R \cap R_1 \cap R_2) \cup (V \cap R_1 \cap R_2) \cup (R \cap V_1 \cap V_2) \cup (V \cap V_1 \cap V_2)\Big) \\
&= (R \cap R_1 \cap R_2) + P(V \cap R_1 \cap R_2) + P(R \cap V_1 \cap V_2) + P(V \cap V_1 \cap V_2) \\
&= P(R) \cdot P(R_1 \mid R) \cdot P(R_2 \mid R \cap R_1) + P(V) \cdot P(R_1 \mid V) \cdot P(R_2 \mid V \cap R_1) \\
&+ P(R) \cdot P(V_1 \mid R) \cdot P(V_2 \mid R \cap V_1) + P(V) \cdot P(V_1 \mid V) \cdot P(V_2 \mid V \cap V_1) \\
&= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{41}{75} \approx 0.5467
\end{aligned}
$$

Ejercicio 87 (2.5 *puntos*)

Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

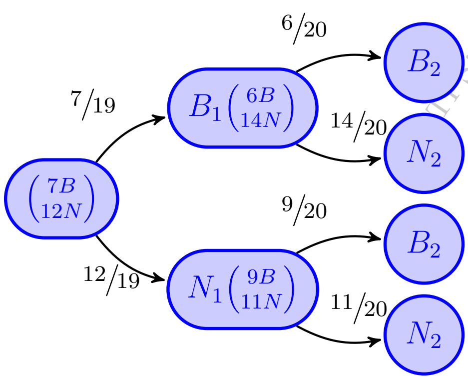
(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$B_i \equiv \text{"Sale bola } \textbf{blanca} \text{ en la extracción } i\text{"}$$
$$N_i \equiv \text{"Sale bola } \textbf{negra} \text{ en la extracción } i\text{"}$$

a) $$P(B_2) = P\Big((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)\Big) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2)$$
$$= P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2 \mid N_1) = \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{20} + \frac{12}{19} \cdot \frac{9}{20}$$
$$= \frac{15}{38} \simeq 0.3947$$



b) $$P\Big((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)\Big)$$
$$= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$$
$$= P(B_1) \cdot P(N_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2 \mid N_1)$$
$$= \frac{7}{19} \cdot \frac{14}{20} + \frac{12}{19} \cdot \frac{9}{20} = \frac{103}{190} \simeq 0.5421$$

c) $$P(N_1 \mid B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(N_1) \cdot P(B_2 \mid N_1)}{P(B_2)}$$
$$= \frac{{}^{12}/_{19} \cdot {}^{9}/_{20}}{{}^{15}/_{38}} = \frac{18}{25} = 0.72$$