MATEMATICAS CCSS

DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

https://aprendeconmigomelon.com

7 de abril de 2022

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Discusión y Resolución de Sistemas de Ecuaciones, entre los cuales se encuentran todos los que se han propuesto en los exámenes de la EVAU de la Comunidad de Madrid de los últimos 22 años. Más de 60 problemas resueltos que espero que te resulten de utilidad. Muchos de ellos están resueltos por el Método de Rouché y por el de Gauss; mi recomendación que lo hagas siempre por el Método de Rouché.

Índice general

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a \cdot (a-1) z = 2a \end{cases}$$

a) *Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real a.*

b) *Resuélvase dicho sistema para $a = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2000 Modelo - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a\cdot(a-1) & 2a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a = a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 9 & 7 \\ 1 & -1 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - (-1/2) + 0 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 9 \cdot 1/2 = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 5/2 \\ y = -1/2 \\ z = 1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Siendo a un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{cases}$$

a) Discútase dicho sistema en función del valor de a.

b) Encuéntrese todas las soluciones para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2000 Junio - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 2a - 1 = (a-1)^2 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\lambda - \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \qquad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 3 (3 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} mx + my = 6 \\ x + (m-1)y = 3 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real m.

b) Resuélvase dicho sistema para $m = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2001 Modelo - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} m & m & 6 \\ 1 & m-1 & 3 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m^2 - 2m = m \cdot (m-2) = 0 \implies m = \{0{,}2\}$$

- Si $a \neq \{0{,}2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $m = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) = 1$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $m = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) = 1$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 1$

  $\text{ran}(A) = 1 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 2 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 2$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \end{array} , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 4 (3 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

a) *Discútase el sistema según los valores de a.*

b) *Resuélvase el sistema para $a = -1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2001 Junio - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2 \cdot (a+2) = 0 \implies a = \{-2, 1\}$$

- Si $a \neq \{-2, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  Observamos que todas las filas son iguales por lo tanto: $\operatorname{ran}(A) = 1 = \operatorname{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow -x + 1 + 0 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 5 (3 *puntos*)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 4y - az = -2 \\ y - z = 0 \\ ax + 2z = 2 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores de a.

b) Resolver el sistema para el valor $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2002 Modelo - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -a & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2 = 0 \implies a = -2$$

- Si $a \neq -2 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 4F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - 4 \cdot 1/2 - 2 \cdot 1/2 = -2 \\ \Rightarrow y - 1/2 = 0 \\ \Rightarrow 8z = 4 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 6 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x+y+2z=5 \\ -x+(m+2)z=3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de m.

b) Resolver el sistema para $m=3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2003 Modelo - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m-1=0 \implies m=1$$

- Si $m \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=\text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A)=2=\text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.}=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m=3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2-F_1 \\ 2F_3+F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x+8-0=2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y+5\cdot 0=8 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z=10 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=8 \\ z=0 \end{array}}$$

Ejercicio 7 (3 *puntos*)

Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2003 Junio - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

- Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Resolvemos el sistema. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot (1 - \lambda) + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 8 (3 *puntos*)

> *Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro* m*:*
>
> $$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m+2)z = 3 \end{cases}$$
>
> *a) Discutir el sistema para los distintos valores de* m*:*
>
> *b) Resolver el sistema para* $m = 3$*.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2004 Modelo - Opción A)*

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m - 1 = 0 \implies m = 1$$

- Si $m \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 0 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 8 - 0 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 5 \cdot 0 = 8 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 8 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 9 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} mx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ x + my - mz = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b) Resuélvase el sistema para $m = 2$

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2004 Septiembre - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2m^2 + 2m + 4 = 0 \implies m = \{-1, 2\}$$

- Si $m \neq \{-1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $m = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 2$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 1 + \lambda/3 - 3\lambda = 5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y - \lambda = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 + 4\lambda/3 \\ y = -1 + \lambda/3 \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 10 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2005 Junio - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 7k + 56 = 0 \implies k = -8$$

- Si $k \neq -8 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = -8 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b)
- Si $k \neq -8$ el sistema es S.C.D. y como se trata de un sistema homogéneo la solución es la trivial $x = y = z = 0$.
- Resolvemos el sistema para $k = -8$. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de

orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 3 \cdot {}^{7\lambda}/_{19} + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 19y - 7\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = {}^{\lambda}/_{19} \\ y = {}^{7\lambda}/_{19} \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 11 (3 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones que depende del parámetro real p.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+pz=-3 \\ x-2y-z=p \end{cases}$$

a) *Discutir el sistema según los distintos valores de p.*

b) *Resolver el sistema para $p=2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2005 Septiembre - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & p & -3 \\ 1 & -2 & -1 & p \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3p-3=0 \implies p=1$$

- Si $p \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=3=\operatorname{ran}(A^*)=$ nº incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $p=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*)=3$

  $\operatorname{ran}(A)=2 \neq \operatorname{ran}(A^*)=3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $p=2$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 5F_3+F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+0-1=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y+3\cdot(-1)=-3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 10z=10 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{array}}$$

Ejercicio 12 (3 *puntos*)

Sea el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámtro a:

$$\begin{cases} x+y+(a+1)z=9 \\ 3x-2y+z=20a \\ x+y+2az=9 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas souciones.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a=2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2006 Modelo - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20a \\ 1 & 1 & 2a & 9 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -5a+5 = 0 \implies a=1$$

- Si $a \neq 1$ $|A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=1$. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + {}^7\!/_5 - \lambda + 2\lambda = 9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 5\lambda = -7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = {}^{38}\!/_5 - \lambda \\ y = {}^7\!/_5 - \lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = 2$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -8 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - {}^{13}\!/_5 + 3 \cdot 0 = 9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 8 \cdot 0 = 13 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 6 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = {}^{58}\!/_5 \\ y = -{}^{13}\!/_5 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 13 (3 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 3z = 3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2006 Septiembre - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 20 - 5a = 0 \implies a = 4$$

- Si $a \neq 4 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 5F_3 - 3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 0 + 2 \cdot 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y + 5 \cdot 1 = 5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 10z = 10 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 14 (3 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -2x+3y+z=1 \\ -x+ay+3z=3 \end{cases}$$

a) *Discutir el sistema para los distintos valores de a.*

b) *Resolver el sistema para $a=2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2007 Modelo - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 20-5a = 0 \implies a=4$$

- Si $a \neq 4 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=2$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2+2F_1 \\ F_3+F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 5F_3-3F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+0+2\cdot 1 = 2 \\ \Rightarrow 5y+5\cdot 1 = 5 \\ \Rightarrow 10z = 10 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}}$$

Ejercicio 15 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+2y-2z=3 \\ 2x+2y+az=8 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2007 Junio - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 8a+14 = 0 \implies a = -7/4$$

- Si $a \neq -7/4 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -7/4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -7/4 & 8 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 46 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=4$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 4F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 23 & 23 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - -2 + 1 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 8y - 5 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 23z = 23 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 16 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a:

b) Resolver el sistema para $a = 3$ y $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2007 Septiembre - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a = a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 3 \cdot 0 + 2/3 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3z = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = 1$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 1 - \lambda/2 + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda/2 \\ y = 1 - \lambda/2 \;, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 17 (3 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + kz = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2009 Junio - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 5k - 5 = 0 \implies k = 1$$

- Si $k \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 1$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distitno de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 1 + \lambda = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 1 \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 + 4F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 1 + 3 \cdot 0 = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 4 \cdot 0 = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -10z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 18 (3 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ky + z = 3 \\ kx - 3z = 6 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2009 Septiembre - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -k^2 - 2k + 3 = 0 \implies k = \{-3, 1\}$$

- Si $k \neq \{-3, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $k = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -60 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 1$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 3 - 4\lambda + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 4\lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 6 + 3\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 0 + 1/2 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3 \cdot 0 - 6z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 5/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 19 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ 2y + kz = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2010 Modelo - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = k^2 - k = k \cdot (k-1) = 0 \implies k = \{0, 1\}$$

- Si $k \neq \{0,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $k = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 1$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 1 - \lambda/2 + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda/2 \\ y = 1 - \lambda/2 \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 3 \cdot 0 + 2/3 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3z = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array}}$$

Ejercicio 20 (3 *puntos*)

> *Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real* k*:*
>
> $$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x - y + kz = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$
>
> *a) Discútase el sistema para los distintos valores de* k*.*
>
> *b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.*
>
> *c) Resuélvase el sistema para* $k = 0$*.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2010 Junio - Opción B)*

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -k^2 + k + 2 = 0 \implies a = \{-1, 2\}$$

- Si $k \neq \{-1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 12 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $k = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 2$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesrio resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 2\lambda + 7 \cdot {}^4\!/_3 = 8 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = -{}^2\!/_3 + \lambda & \\ y = \lambda & ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = {}^4\!/_3 & \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 0$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 10 = 2 \\ \Rightarrow -2y + 7 \cdot 4 = 8 \Rightarrow z = 4 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{array}}$$

Ejercicio 21 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax+y+z=a \\ ay+z=1 \\ ax+y+az=a \end{cases}$$

a) *Discútase el sistema según los diferentes valores de a.*

b) *Resuélvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.*

c) *Resuévase el sistema para $a=3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2011 Junio - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - a^2 = a^2 \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0,1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow x + 1 - \lambda + \lambda = 1 \Rightarrow y + \lambda = 1 \Rightarrow z = \lambda \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = 3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow 3x + {}^1\!/_3 + 0 = 3 \Rightarrow 3y + 0 = 1 \\ \Rightarrow 2z = 0 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -{}^8\!/_9 \ y = {}^1\!/_3 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 22 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 5 \\ x + y + 3z = 1 \\ 2x + ay + (a^1 - 2)z = 3 \end{cases}$$

a) Escríbase el sistema en forma matricial.

b) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

c) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2011 Septiembre - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & a & a^2-2 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - 7a + 6a = 0 \implies a = \{1, 6\}$$

b)

- Si $a \neq \{1, 6\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 6 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 34 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

c) Resolvemos el sistema para $a = 1$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 4F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow 4x + 3 \cdot (-1 - 7\lambda) + 5\lambda = 5 \\ \Rightarrow y + 7\lambda = -1 \Rightarrow z = \lambda \end{array} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 + 4\lambda \\ y = -1 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array}}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 23 (3 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k.

$$\begin{cases} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2012 Modelo - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \implies k = \{1, 2\}$$

- Si $k \neq \{1,2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $k = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $k = 1$. Teniendo en cuenta de que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 1 - 2\lambda + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 2\lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 4$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 + 4F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 3 \cdot (-2) = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -6z = 12 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}}$$

Ejercicio 24 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ x + (1+a)y - (a+6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - 2 \end{cases}$$

a) *Discútase el sistema según los diferentes valores de a.*

b) *Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.*

c) *Resuélvase el sistema en el caso $a = -3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2012 Junio - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a - 6 = 0 \implies a = \{-2, 3\}$$

- Si $a \neq \{-2, 3\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = -2$. Como estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2\cdot(4-3\lambda) - 7\lambda = -9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 3\lambda = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1+\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = -3$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 1 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 3\cdot 7/3 - 7\cdot 2/3 = -13 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 4\cdot 2/3 = 5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -4/3 \\ y = 7/3 \\ z = 2/3 \end{array}}$$

Ejercicio 25 (3 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ ky+2z=5 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$$

a) *Discútase el sistema según los diferentes valores de k.*

b) *Resuélvase el sistema para $k=0$.*

c) *Resuélvase el sistema para $k=2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2012 Septiembre - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -k^2+3k-2=0 \implies k=\{1,2\}$$

- Si $k \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $k=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 0$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 + 2 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + 2 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 2$. Teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 3 - \lambda + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 26 (2 *puntos*)

Discútase el sistema siguiente en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + az = 0 \\ 2x - y + a^2 z = 1 \end{cases}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Modelo - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & -1 & a^2 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a = a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Ejercicio 27 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 3x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Junio - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a + 8 = 0 \implies a = -4$$

- Si $a \neq -4 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2 \cdot (-4/5) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y - 3 = -7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 6 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2/5 \\ y = -4/5 \\ z = 3 \end{array}}$$

Ejercicio 28 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ x+ay=-2a-1 \\ 4x+y+5z=-1 \end{cases}$$

a) *Resuélvase en el caso* $a=1$.

b) *Discútase en función del parámetro* $a \in \mathbb{R}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Resolvemos el sistema para $a=1$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-7F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+2\cdot(-2)+3=-2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y-3=-1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 14z=14 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{array}}$$

b) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & a & 0 & -2a-1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -7a-7=0 \implies a=-1$$

- Si $a \neq -1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=\text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A)=2=\text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.}=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Ejercicio 29 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro k:

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky - 2z = 1 \\ kx - 3y + kz = 0 \end{cases}$$

a) *Discútase el sistema según los diferentes valores de k.*

b) *Resuélvase el sistema para $k = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Septiembre - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & -3 & k & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = k^3 - 9k = k \cdot (k^2 - 9) = 0 \implies k = \{0, \pm 3\}$$

- Si $k \neq \{-3, 0, 3\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = -6 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $k = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $k=3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $k=1$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - {}^1\!/_8 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y - {}^1\!/_2 = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = {}^1\!/_8 \\ y = -{}^1\!/_8 \\ z = -{}^1\!/_2 \end{array}}$$

Ejercicio 30 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - 2ay + z = 1 \\ x + (2+a)y + z = 0 \\ 3x + a^2y + 2z = a \end{cases}$$

a) Discútase, en función del parámetro real a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Septiembre - Opción B - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2a & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 0 \\ 3 & a^2 & 2 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 - a + 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$$

- Si $a \neq \{-2, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 1/2 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4y - 3 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1/2 \\ z = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 31 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+ay+4z=1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Modelo - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & a & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a+3 = 0 \implies a=-3$$

- Si $a \neq -3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=-3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+2=1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z=-2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y+5\cdot 2=2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=7 \\ z=2 \\ y=-8/3 \end{array}}$$

Ejercicio 32 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+az=2 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

a) *Discútase el sistema según los diferentes valores de a.*

b) *Resuélvase el sistema en el caso $a=-1$*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Junio - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a-3 = 0 \implies a=3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=-1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x-2-(-1)=2 \\ \Rightarrow y+5\cdot(-1)=-7 \\ \Rightarrow -4z=4 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=3 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{array}}$$

Ejercicio 33 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax+2y+z=2 \\ 2x+4y=1 \\ x+2y+3z=5 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a=2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Junio - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 12a - 12 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).
- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y - \frac{3}{2} = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 9 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 1/4 \\ z = 3/2 \end{array}}$$

Ejercicio 34 (2 *puntos*)

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$$

a) Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.

b) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción A)

Solución.

a) Vamos a discutir el sistema por el método de Gauss, para lo cual escribiremos el mismo en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda - 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda - 3 \end{array}\right) \sim$$

Por lo tanto para que el sistema sea incompatible: $3\lambda - 3 \neq 0 \implies \boxed{\lambda \neq 1}$

b) Para $\lambda = 1$ el sistema queda:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - \lambda + \mu = -1 \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\lambda - \mu - 1}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} , \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 35 (2 *puntos*)

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - ay = 4 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción B - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -a & 4 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a - 2 = 0 \implies a = -2$$

- Si $a \neq -2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $|1| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 1$

  $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 4 = 8 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y = -12 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 4 \\ y = 4 \end{array}}$$

Ejercicio 36 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + 4ay + z = 2a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Modelo - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -4a^2 + 6a - 2 = 0 \implies a = \{1/2, 1\}$$

- Si $a \neq \{1/2, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SIST. COMP. INDETER. (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SIST. INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{1/2, 1\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3/4 \\ y = 1/2 \\ z = -3/4 \end{array}}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 37 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

- Si $a \neq -2$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos para $a = 1$ por el método de Gauss, sabiendo estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + y - 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 4 \cdot (-1) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 38 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+wz=1 \end{cases}$$

a) *Discútase para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.*

b) *Resuélvase para $a=1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - 3a + 2 = 0 \implies a = \{1, 2\}$$

- Si $a \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 3 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión del sistema.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda + 0 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \qquad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

——————— ∘ ———————

Ejercicio 39 (2 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)^2 \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incog.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) = 1$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xRightarrow{Rouche}$ SIST. INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-1, 1\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 + 2 \cdot 2 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 3 \cdot 2 = -5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -6 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 40 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + 3y - 2z = a \end{cases}$$

a) *Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

b) *Resuélvase para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a - 1 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \implies \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ Solución).
- Si $a = 1 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot (-1 + 3\lambda) + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 3\lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 4 - 7\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 41 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-3z=3 \\ 3x+ay-2z=5 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a=2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3+a = 0 \implies a=3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=2$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 3$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad x-3-(-1)=1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -y+(-1)=2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -z=1 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-3 \\ z=-1 \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\, C_2 \leftrightarrow C_3 \,\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & a & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 0 \\ \boxed{a = 3} \end{cases}$$

- Si $a \neq 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 2$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x - (-1) + (-3) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \qquad\qquad\qquad -z = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \qquad\qquad\qquad -y = 3 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ z = -1 \\ y = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 42 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

a) *Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

b) *Resuélvase para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 4 - 2a = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - \frac{1}{2} = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/2 \\ y = 1/4 \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[C_2 \leftrightarrow C_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2a-4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow 2a - 4 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \square & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compat. Determinado
- Si $a = 2 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{rl} \Rightarrow x - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/2 \\ y = 1/4 \end{array}}$$

Ejercicio 43 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente de $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + y + az = a - 2 \\ ax - y + z = a - 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = \{-2, 2\}$$

- Si $a \neq \{-2, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\text{ incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-2, 2\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 3x + 1 = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 1 = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 8z = -8 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 & a-2 \\ 1 & 3 & a & a-2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 3 & 2a-4 \\ 0 & 5 & 2a-1 & 2a-4 \end{array}\right) \overset{a \neq -1/2}{\sim} \left[\begin{array}{c} \\ \\ (2a+1)F_3 - 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 3 & 2a-4 \\ 0 & 0 & 4a^2-16 & 4\cdot(a-2)^2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 - 16 = 0 \\ \boxed{a = \pm 2} \end{array} \right.$$

- Si $a = -1/2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO

- Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \square & 3 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO

- Si $a = -2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE

- Si $a = 2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_2$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow y$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2y + -1 - 1 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 3\cdot(-1) = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -16z = 16 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} y = 1 \\ x = -1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 44 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} (a-1)x+y+z&=1\\ x+(a-1)y+(a-1)z&=1\\ x+az&=1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discútase el sistema según los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a=3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & a-1 & 1\\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3-2a^2 = a^2\cdot(a-2)=0 \implies a=\{0,2\}$$

- Si $a\neq\{0,2\}$ $\quad |A|\neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=\text{n}^\text{o}\text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2\neq 0 \implies \text{ran}(A^*)=3$

  $\text{ran}(A)=2\neq\text{ran}(A^*)=3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A)=2=\text{ran}(A^*)\neq\text{n}^\text{o}\text{ incog.}=3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos antes un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = 1 \\ \Rightarrow 3y + 3 \cdot \frac{2}{9} = 1 \\ \Rightarrow 18z = 4 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1/3 \\ y = 1/9 \\ z = 2/9 \end{array}}$$

Método de Gauss

Debido al gran número de parámetros que tiene el sistema no merece la pena realizar la discusión por el Método de Gauss pues es fácil cometer errores.

Ejercicio 45 (2 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-ay+2z & = & 0 \\ ax-4y-4z & = & 0 \\ (2-a)x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) *Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *Resuélvase para $a=3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -6a^2+6a+36=0 \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-2,3\}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)=3=\operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única $x=0,\ y=0,\ z=0$).

- Si $a=-2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)=2$

  $\operatorname{ran}(A)=2=\operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)=2$

  $\operatorname{ran}(A)=2=\operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=3$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_2-3F_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x-6\lambda+2\lambda=0 \\ 5y-10t=0 \\ z=\lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=4\lambda \\ y=2\lambda \quad ,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 46 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+3y+3z & = & 0 \\ -x+3y+z & = & 1 \\ -x+ay+2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

1) <u>Método de Gauss</u>

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \; C_2 \leftrightarrow C_3 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-6 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow 2a - 6 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \times & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).
- Si $a = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución).

2) <u>Método Rouché-Frobenius</u>

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).
- Si $a = 3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -x + 3(1/4) + 3(-1/2) = 0 \\ -2z = 1 \\ -2y - (-1/2) = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 47 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y-z & = & -2 \\ -2x-az & = & 2 \\ y+az & = & -2 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \implies |A| = 2-3a = 0 \implies a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 2/3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=4$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \; F_2+2F_1 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \quad F_3 \leftrightarrows F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{array}\right) \sim \quad F_3+4F_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x-2\cdot 2-(-1) = -2 \\ y+4\cdot(-1) = -2 \\ 10z = 10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial procurando que los parámetros estén situados los más abajo a la derecha posible. Posteriormente hacemos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \sim \; F_2 + 2F_1 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \underset{4F_3 + F_2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 0 & -2+3a & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow -2+3a=0 \Longrightarrow a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & -10 \end{array}\right) \Rightarrow$Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow$Sistema Incompatible

b) Sustituimos $a = 4$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 2\cdot 2 - (-1) = -2 \\ \Rightarrow -4y - 6\cdot(-1) = -2 \\ \Rightarrow 10z = -10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 48 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcr} -x+ay+z &=& 3 \\ 2y+2z &=& 0 \\ x+3y+2z &=& -3 \end{array}\right\}$$

a) *Discútase el sistema para los diferentes valores de a.*

b) *Resuélvase para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Septiembre - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

1) <u>Método Rouché-Frobenius</u>

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} -x+\lambda = 3 \\ 2y+2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 49 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ 2x+y+z & = & 2 \\ 5x+3y+z & = & a+4 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & a+4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2$$

- $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 3 = \text{ran}A^* = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sist. Comp. Det.

b) Resolvemos el sistema para $a=1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -10 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ F_3-2F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x+3+1=3 \\ -y-1=-4 \\ -2z=-2 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=-1 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}}$$

Ejercicio 50 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay+z &=& 1 \\ ax+y+(a-1)z &=& a \\ x+y+z &=& a+1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = \cancel{1} + \cancel{a} + a(a-1) - \left(\cancel{1} + a^2 + \cancel{a} - 1\right)$$

$$= -a + 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- $\boxed{\text{Si } a \neq 1}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 3 = \text{ran}A^* = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ SIST. COMP. DET.

- $\boxed{\text{Si } a = 1}$ $\quad \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}A < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A^* = 3$

  $$\text{ran}A = 2 \neq \text{ran}A^* = 3 \Longrightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

b) Resolvemos el sistema para $a=3$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x + 3\cdot(-3/2) + 12 = 1 \\ -8\cdot(-3/2) - z = 0 \\ -2y = 3 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = -13/2 \\ y = -3/2 \\ z = 12 \end{array}}$$

Ejercicio 51 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y + az = -1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para a = 0.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como se trata de un S.C.I. solo tenemos que resolver las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrl} \Rightarrow & 2x + \frac{3-\lambda}{3} + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & 3y + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{3-\lambda}{3} \quad, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2a-1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_2 + F_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 0}$$

- Si $a \neq 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \quad 2x + \frac{3-\lambda}{3} + \lambda = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 3y + \lambda = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{3-\lambda}{3} \, , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 52 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y+z & = & a \\ 2x+ay-6z & = & 8 \\ x-3y-5z & = & 4 \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuélvase para $a = 4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -6a - 12 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

- Si $a \neq -2 \quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 4$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \quad F_3 - 3F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 = 4 \\ -2y - 8\cdot 0 = 0 \\ 18z = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 53 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x+2y+z &=& 1 \\ x+3y+z &=& 2 \\ 5x-y+az &=& -1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \implies |A| = 16a = 0 \implies a=0$$

- Si $a \neq 0$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \; F_1 \leftrightarrow F_2 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \; F_2 - 6F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & -5 & -11 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x + 3\cdot\frac{11-5\lambda}{16} + \lambda = 2 \\ -16y - 5\lambda = -9 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \frac{21-11\lambda}{16} \\ y = \frac{11-5\lambda}{16} \quad, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 54 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{cases}$$

a) Determínese los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.

b) Resuélvase el sistema para $m=1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -m & 0 \end{array}\right)$$

a) Los sistemas homogéneos son siempre compatibles, pues tienen al menos la solución trivial. Para tener soluciones distintas de la trivial el sistema ha de ser COMPATIBLE INDETERMINADO, lo que implica que ran$A<3$, es decir que $|A|=0$.

$$|A| = m^2-1=0 \implies m=\{-1,1\}$$

Si $m=\{-1,1\}$ el sistema es SCI (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema cuando $m=1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -x+0+\lambda=0 \Rightarrow \\ 2y=0 \Rightarrow \\ z=\lambda \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \qquad , \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 55 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$*:*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + (a+2)z = 1 \\ x + y + az = 0 \\ (a-1)x + 2z = a+1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a*.*

b) Resuélvase para $a = 2$*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a-1 & 0 & 2 & a+1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - 3a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{0, 3\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} x + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = 1 \\ -y - 2 \cdot 2 = -1 \\ 2z = 4 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 56 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ ax-z=3 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discútase la unicidad de la solución del sistema en función del valor de a.

b) Resuélvase el sistema para $a=1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a+2=0 \implies a=2$$

- Si $a \neq 2$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=$ nº incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*)=3$

  $\text{ran}(A)=2 \neq \text{ran}(A^*)=3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=1$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3+2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad x+4=1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -y-(-6)=2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -z=6 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=4 \\ z=-6 \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[F_2 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[C_1 \leftrightarrow C_3 \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_2 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a - 2 = 0 \\ \boxed{a = 2} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE DETERMINADO
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$SIST. INCOMPATIBLE

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 1$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad z + 2 \cdot 4 = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad y - 3 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -x = 3 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} z = -6 \\ y = 4 \\ x = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 57 (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ay + z = 6 \\ 2x - y + z = a - 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -1 - 3a = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

- Si $a \neq -\dfrac{1}{3}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{\text{Rouché}}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 6 \\ 2 & -1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{56}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\text{Rouché}}$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Como $a \neq -1/3$, estamos ante un S. C. D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 5F_2 + 3F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x + 2 \cdot 2 + 1 = 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -5y - 1 = -11 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 7z = 7 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 58 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay=0 \\ x+2z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 - a = -a \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-1, 0\}$$

- Si $a \neq \{-1,0\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es neceesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -2 & 0 \\ 0 & a & a-1 & a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-1, 0\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $a = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 59 (2 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a + 4 = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} -x - (-7/2) - (-5/4) = 2 \\ -2y = 7 \\ -4z = 5 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 11/4 \\ y = -7/2 \\ z = -5/4 \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 + 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2a+6 \\ 0 & 0 & a-2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-2=0 \\ \boxed{a=2} \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} -x - (-5/4) - (-7/2) = 2 \\ -2z - (-7/2) = 6 \\ -2y = 7 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 11/4 \\ z = -5/4 \\ y = -7/2 \end{array}}$$

Ejercicio 60 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 3a + 4 = 0 \implies a = \{-1, 4\}$$

- Si $a \neq \{-1, 4\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-1, 4\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 5F_3 - 9F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} x - 3 \cdot (-1/2) = 1 \\ 5y - (-3/2) = -1 \\ 4z = -6 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ F_1 \leftrightarrow F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & a-4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & a+4 & 2-a & a-6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ (a+4) \cdot F_2 + a \cdot F_3 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+3a+4 & a^2-5a+4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a^2 + 3a + 4 = 0 \\ \boxed{a = \{-1, 4\}} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 4\} \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compat. Determinado
- Si $a = -1 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $a = 4 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 1$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} -z - 4 \cdot (-1/2) + 3 \cdot (-1/2) = 2 \\ -3y - 1/2 = 1 \\ 4x = -2 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} z = -3/2 \\ y = -1/2 \\ x = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 61 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z &= 2a-1 \\ 2x+y+az &= 1 \\ x+ay+z &= 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2+3a-2 = 0 \implies a = \{1,2\}$$

- Si $a \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SIST. INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrl} \Rightarrow & x - 2 - {}^1\!/_2 = -1 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(-2) - 2z = 3 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow & -y = 2 \ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = {}^3\!/_2 \\ y = -2 \\ z = -{}^1\!/_2 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -4a+3 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-2a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & a-2 & -1 & -4a+3 \\ 0 & 0 & a-1 & 2-2a \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 1, 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \square \\ -1 & \square & -1 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPAT. DETERMINADO
- Si $a = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. INDETERMINADO
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE (Depende dónde despejes $z = -1$ o $z = 5$)

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{rrl} \Rightarrow & x - 2 - {}^1\!/_2 = -1 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow & -2z - (-2) = 3 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow & -y = 2 \ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = {}^3\!/_2 \\ y = -2 \\ x = -{}^1\!/_2 \end{array}}$$

Ejercicio 62 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3a^2 - 3 = 3 \cdot \left(a^2 - 1\right) = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \vee a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Sabiendo que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + (\lambda - 2) - \lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y + 2\lambda = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda - 2 \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[F_2 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & a^2+1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[3F_3 - 2F_2 \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3a^2-3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a^2 - 3 = 0 \\ \boxed{a = \pm 1} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 1\} \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \square & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Deter.
- Si $a = 1 \vee a = -1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Indet.

b) La resolución del sistema para $a = 1$ no tiene diferencias respecto a lo que hemos hecho anteriormente.

Ejercicio 63 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+2ay+z=0 \\ -x-ay=1 \\ -y-z=-a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a=3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a+1 = 0 \implies a=1$$

- Si $a \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3+F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x-6+4=0 \\ \Rightarrow 3y+4=1 \\ \Rightarrow -2z=-8 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right) \sim \left[\ C_2 \leftrightarrow C_3\ \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ -1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\ F_2 + F_1\ \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right) \overset{a\neq -1/2}{\sim} \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a-1=0 \\ \boxed{a=1} \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \square & 0 \\ 0 & 1 & \square & 1 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO
- Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 3$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+4-6=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z-3=1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y=-2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ z=4 \\ y=-1 \end{array}}$$

Ejercicio 64 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rl} x-y+z &= 2 \\ x-y+az &= -1 \\ 2x+y+z &= 6 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a=-2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3a+3 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=-2$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrl} \Rightarrow & x-1+1=2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & -3z=-3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & 3y-1=2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=2 \\ z=1 \\ y=1 \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ \boxed{a = 1} \end{array} \right.$$

- Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \square & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = -2$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad x - 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 3y - 1 = 2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -3z = -3 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}}$$