MATEMATICAS CCSS

INTERVALOS DE CONFIANZA

https://aprendeconmigomelon.com

9 de febrero de 2022

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Intervalos de Confianza, entre los cuales se encuentran todos los que se han propuestos en los exámenes de la EVAU de la Comunidad de Madrid de los últimos 9 años. En total más de 60 ejercicios resueltos que espero que te resulten de utilidad. Este tipo de ejercicios es un clásico de la EVAU que aparece en las dos opciones del examen, así que no dejes de ponerles un poco de cariño.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Índice general

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Modelo - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido en alquitrán (mg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 4)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 22$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = 1{,}47$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (20{,}53; 23{,}47)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0{,}5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \frac{4}{0{,}5}\right)^2 = 173{,}18 \implies \boxed{n = 174}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

El número de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transporte se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) (1 punto) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

$$40 \quad 28 \quad 41 \quad 102 \quad 95 \quad 33 \quad 108 \quad 20 \quad 64$$

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) (1 punto) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 %, construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Modelo - Opción B)

Solución.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

$$X \equiv \text{“Distancia recorrida por un conductor (km/día)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 30) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = \dfrac{40+28+41+102+95+33+108+20+64}{9} = 59$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{9}} = 19{,}6$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (39{,}4; 78{,}6)}$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 50) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{50}{\sqrt{4}} = 25\right)$

$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{4}} = 41{,}125$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) (1 punto) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6,6 kW, si $\mu = 6{,}3$ kW.

b) (1 punto) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza (6,1; 6,9) para la media del consumo familiar diario.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Modelo - Opción A)

Solución.

$$X: \text{“Consumo familiar diario de electricidad (kW)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}2)$$

a) $X : \mathcal{N}(6{,}3, 1{,}2) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6{,}3, \dfrac{1{,}2}{\sqrt{50}} = 0{,}17\right)$

$$\begin{aligned} P\left(6 \leq \overline{X} \leq 6{,}6\right) &= P\left(\frac{6-6{,}3}{0{,}17} \leq Z \leq \frac{6{,}6-6{,}3}{0{,}17}\right) = P(-1{,}77 \leq Z \leq 1{,}77) \\ &= P(Z \leq 1{,}77) - P(Z \leq -1{,}77) = P(Z \leq 1{,}77) - P(Z \geq 1{,}77) \\ &= P(Z \leq 1{,}77) - \left[1 - P(Z \leq 1{,}77)\right] = 2P(Z \leq 1{,}77) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}9616 - 1 = 0{,}9232 \end{aligned}$$

b) $I.C. = (6{,}1; 6{,}9) \implies E = \dfrac{6{,}9 - 6{,}1}{2} = 0{,}4$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 0{,}4 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{50}} \implies z_{\alpha/2} = 2{,}36 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}9909$$

$$\implies \alpha/2 = 0{,}0091 \implies \alpha = 0{,}0182 \implies 1 - \alpha = 0{,}9818 = 98{,}18\,\%$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) (1 punto) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Modelo - Opción B)

Solución.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

a) X : "Nº de días de tratamiento contra el insomnio"

$X : \mathcal{N}(\mu, 34{,}5) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{290+275+290+325+285+365+375+310+290+300}{10} = 310{,}5$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{34{,}5}{\sqrt{10}} = 21{,}38$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (289{,}12; 331{,}88)}$

b) $n = ?$ & $E < 10$ & $1 - \alpha = 0{,}95$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{34{,}5}{\sqrt{n}} < 10 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \dfrac{34{,}5}{10}\right)^2 = 45{,}72 \implies \boxed{n = 46}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.*

b) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de reacción } (ms)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 250)$$

a) $$I.C. = (701; 799) \implies \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{701 + 799}{2} = 750 \\ E = \dfrac{799 - 701}{2} = 49 \end{cases}$$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{250}{49}\right)^2 = 100$$

b) $E = ?$ & $n = 25$ & $1 - \alpha = 0{,}8$

$$1 - \alpha = 0{,}8 \implies \alpha = 0{,}2 \implies \alpha/2 = 0{,}1 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}9 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}285$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}285 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 64{,}25$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100$ h?

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración componente (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 8000$

$$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{1000}{\sqrt{81}} = 286{,}11$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (7713{,}89; 8286{,}11)}$$

b) $X : \mathcal{N}(8100, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8100, \dfrac{1000}{\sqrt{100}} = 100\right)$

$$\begin{aligned} P(7904 \le \overline{X} \le 8296) &= P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \le \frac{8296 - 8100}{100}\right) = P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96) \\ &= P(Z \le 1{,}96) - P(Z \le -1{,}96) \\ &= P(Z \le 1{,}96) - P(Z \ge 1{,}96) \\ &= P(Z \le 1{,}96) - \left[1 - P(Z \le 1{,}96)\right] \\ &= 2 \cdot P(Z \le 1{,}96) - 1 = 2 \cdot 0{,}9750 - 1 = 0{,}95 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

El consumo de agua, medido en litros, en una ducha puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ litros.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 duchas, obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 100$ litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar μ mediante la media muestral, el error cometido sea menor que 2 litros, con un nivel de confianza del 99 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de agua } (\ell)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 100$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} = 3{,}92$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (96{,}08; 103{,}92)}$$

b) $n = ?\qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}99$

$$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}005 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2{,}575 \cdot \frac{10}{2}\right)^2 = 165{,}77 \implies \boxed{n = 166}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

El nivel de colesterol total en sangre en adultos de 50 años, medido en miligramos por decilitro (mg/dl), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 20\ mg/dl$.

a) *(1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple se obtiene el intervalo de confianza $(191{,}2; 210{,}8)$, expresado en mg/dl, para estimar μ con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra considerada.*

b) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcúlese la amplitud del intervalo de confianza al 98 % para μ.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nivel de colesterol } (mg/ml)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $I.C._{95\,\%}(\mu) = (191{,}2; 210{,}8) \implies \overline{x} = \dfrac{191{,}2 + 210{,}8}{2} = 201$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = \frac{210{,}8 - 191{,}2}{2} = 9{,}8 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=100}$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies \alpha/2 = 0{,}01 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2{,}325 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \implies \boxed{2E = 9{,}3}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) (1 punto) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) (1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2,35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de fruta (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{16000}{100} = 160$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1{,}96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (158{,}04; 161{,}96)}$$

b) $n = 64 \quad \& \quad E = 2{,}35 \quad \& \quad 1 - \alpha = ?$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 2{,}35 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{64}} \implies z_{\alpha/2} = 1{,}88$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}88 \xRightarrow{Tabla} 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}9699 \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}0301 \Rightarrow \alpha = 0{,}602 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}9398}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) (1 punto) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) (1 punto) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto familiar en gas (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 75)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 15 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} < 15 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{75}{15}\right)^2 = 96{,}04 \implies \boxed{n = 97}$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 75) \xrightarrow{n=81} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(250, \frac{75}{\sqrt{81}} = 8{,}33\right)$

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230-250}{8{,}33}\right) = P(Z \geq -2{,}4) = P(Z \leq 2{,}4) = 0{,}9918$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 11 (2 *puntos*)

La producción por hectárea, medida en kg/ha (kilogramos por hectárea) del olivar de alta densidad en cultivo intensivo de Córdoba se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a $1000\ kg/ha$.

a) *(1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 400 parcelas de una hectárea se ha obtenido $(9917{,}75; 10082{,}25)$ como intervalo de confianza para la media μ, expresado en kg/ha. Determínese la media de la muestra y el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 98 % tenga de amplitud a lo sumo $50\ kg/ha$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción del olivar } (kg/ha)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=400} I.C.(\mu) = (9917{,}75; 10082{,}25)$

$$\overline{x} = \frac{9917{,}75 + 10082{,}25}{2} = 10000$$

$$E = \frac{10082{,}25 - 9917{,}75}{2} = 82{,}25 \Longrightarrow E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 82{,}25 \cdot \frac{\sqrt{400}}{1000}$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha = 0{,}1 \Longrightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}9}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 50 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}98$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \Longrightarrow \alpha = 0{,}02 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2{,}325 \cdot \frac{1000}{\sqrt{n}} \leq 50 \Longrightarrow n \geq \left(2 \cdot 2{,}325 \cdot \frac{1000}{50}\right)^2 = 8649$$

$$\Longrightarrow \boxed{n = 8649}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 12 (2 *puntos*)

El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 50 de esas bolsas de patatas y la media de pesos de sus contenidos ha sido de $\overline{X} = 100$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) (1 punto) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o iggual que 2625 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de patatas (gr)”} \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=50} \overline{x} = 100$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{50}} = 2{,}326$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (97{,}674; 102{,}326)}$

b) $X : \mathcal{N}(10, 100) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(10, \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2\right) \qquad \& \qquad \overline{X} = \dfrac{2625}{25} = 105$

$\left(\overline{X} \le 105\right) = P\left(Z \le \dfrac{105 - 100}{2}\right) = P(Z \le 2{,}5) = 0{,}9938$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 13 (2 *puntos*)

El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) (1 punto) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 98 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

$$x \equiv \text{"Tiempo dedicado a actividades deportivas (min)"}$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=250} \overline{x} = 90$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}} = 2{,}08$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (87{,}92; 92{,}08)}$$

b) $n = ?\quad \&\quad E < 1\quad \&\quad 1-\alpha = 0{,}9$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1{,}645 \cdot \frac{20}{1}\right)^2 = 1082{,}4 \implies \boxed{n = 1083}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 14 (2 *puntos*)

El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$ euros.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(2265{,}375; 2424{,}625)$ para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestran y el tamaño de la muestra elegida.

b) (1 punto) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del 99 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95 \quad \& \quad I.C. = (2265{,}375; 2424{,}625)$

$$\left.\begin{array}{r} \overline{x} - E = 2265{,}375 \\ \overline{x} + E = 2424{,}625 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{2265{,}375 + 2424{,}625}{2} = 2345 \\ E = \dfrac{2424{,}625 - 2265{,}375}{2} = 79{,}625 \end{cases}$$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{650}{\sqrt{n}} = 79{,}625 \Longrightarrow n = \left(1{,}96 \cdot \frac{650}{79{,}625}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{n = 256}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad n = 225 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}99$

$$1-\alpha = 0{,}99 \Longrightarrow \alpha = 0{,}01 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}005 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{650}{\sqrt{225}} = 111{,}58$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 15 (2 *puntos*)

La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) (1 punto) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas $\overline{X}$ sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción diaria de leche } (\ell)\text{”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 30)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95 \qquad \& \qquad 2E \leq 10$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$2E \leq 10 \Rightarrow 2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow n \geq \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{50}{10}\right)^2 = 384{,}16 \Rightarrow \boxed{n = 385}$$

b) $X : \mathcal{N}(950, 50) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(950, \dfrac{50}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}(950, 10)$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{940-950}{10}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$$
$$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 16 (2 *puntos*)

El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{x} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) (1 punto) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de la gamba Palamós (g)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 70$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} = 1{,}96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (68{,}04; 71{,}96)}$$

b) $X : \mathcal{N}(70, 5) \xrightarrow{n=12} \overline{X} : \mathcal{N}\left(70, \dfrac{5}{\sqrt{12}}\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq \frac{855}{12}\right) = P\left(\overline{X} \geq 71{,}25\right) = P\left(Z \geq \frac{71{,}25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P(Z \geq 0{,}87)$$
$$= 1 - P(Z < 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = 0{,}1922$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 17 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos kg de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0{,}60$ kg.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{x} = 3{,}250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0,2 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los recién nacidos (kg)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}6)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}6) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3{,}25$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}01 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}99 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} = 0{,}1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (3{,}1105; 3{,}3895)}$$

b) $n = ?\qquad \& \qquad 1 - \alpha = 95\,\% \qquad \& \qquad E \leq 0{,}2$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{n}} \leq 0{,}2 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}2}\right)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 18 (2 *puntos*)

La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza $(159; 165)$. Determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

b) (1 punto) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrido (km)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=81} I.C. = (159; 165)$

$\overline{x} = \dfrac{159 + 165}{2} = 162$

$E = \dfrac{165 - 159}{2} = 3 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{16}{\sqrt{81}} = 3 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}6875$

$z_{\alpha/2} = 1{,}69 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9545 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0455 \Rightarrow \alpha = 0{,}091 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}909}$

b) $X : \mathcal{N}(160, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(160, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(160, 2)$

$P(\overline{X} > 156) = P\left(Z > \dfrac{156 - 160}{2}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0{,}9772$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 19 (2 *puntos*)

El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{x} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud al lo sumo de 10 minutos?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en regresar a casa (minutos)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 30$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{64}} = 1{,}225$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Rightarrow \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (28{,}775; 31{,}225)}$

b) $n = ?$ & $1 - \alpha = 0{,}99$ & $2E \leq 10$

$1 - \alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies \alpha/2 = 0{,}005 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2{,}575 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow n \geq \left(2 \cdot 2{,}575 \cdot \dfrac{5}{10}\right)^2 = 6{,}63 \Rightarrow \boxed{n = 7}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 20 (2 *puntos*)

El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\overline{x} = 8{,}1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) (1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(7{,}766; 10{,}233)$ para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Antiüedad de socio (meses)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 9)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 8{,}1$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1{,}48$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (6{,}62; 9{,}58)}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \xrightarrow{n=144} I.C.(7{,}766; 10{,}233)$

$$\overline{x} = \frac{7{,}766 + 10{,}233}{2} = 8{,}9995$$

$$E = \frac{10{,}233 - 7{,}766}{2} = 1{,}2335 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{9}{\sqrt{144}} = 1{,}2335 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0{,}9}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 21 (2 *puntos*)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\overline{X} = 7{,}8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}9) \quad \xrightarrow{n=324} \quad \overline{X} = 7{,}8$

$$1-\alpha = 0{,}992 \implies \alpha = 0{,}008 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}004 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}996 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}65$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}65 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{324}} = 0{,}1325$$

$$I.C._{99{,}2\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99{,}2\,\%}(\mu) = (7{,}67, 7{,}93)}$$

b) $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}9) \quad \xrightarrow{n=?} \quad 2E = 0{,}2$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$2E \le 0{,}2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0{,}2 \implies 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{n}} \le 0{,}2 \implies n \ge \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{0{,}2}\right)^2$$

$$\implies n \ge 311{,}17 \implies \boxed{n = 312}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 22 (2 *puntos*)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria smple de 484 contenedrores.

a) Si la media de la muestra es $\overline{X} = 25{,}9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 3) \quad \stackrel{n=484}{\longrightarrow} \quad \overline{X} = 25{,}9$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}} = 0{,}2243$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (25{,}68; 26{,}12)}$$

b) $\quad X : \mathcal{N}(23, 3) \quad \stackrel{n=484}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(23, 3/\sqrt{484} = 0{,}136)$

Nos piden la probabilidad de que los 484 contenedores puedan ser transportados en un barco con capacidad máxima de 11000 T. Es decir, $484 \cdot \overline{X} \leq 11000$, o lo que es lo mismo, que $\overline{X} \leq 22{,}73$ T.

$$P(\overline{X} \leq 22{,}73) = P\left(Z \leq \frac{22{,}73 - 23}{0{,}136}\right) = P(Z \leq -1{,}98) = P(Z \geq 1{,}98)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1{,}98) = 1 - 0{,}9761 = 0{,}0239$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 23 (2 *puntos*)

La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197,5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \qquad n = ? \qquad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

La amplitud del tintervalo ha de ser menor que 2, por lo que $2E \leq 2$

$$2E \leq 2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \implies 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \leq 2$$

$$\implies n \geq \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 = 311{,}17 \implies \boxed{n = 312}$$

b) $X : \mathcal{N}(202, 9) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(202, 9/\sqrt{16}) = \mathcal{N}(202, 2{,}25)$

$$P\left(\overline{X} \leq 197{,}5\right) = P\left(Z \leq \frac{197{,}5 - 202}{2{,}25}\right) = P(Z \leq -2)$$
$$= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 24 (2 *puntos*)

El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\qquad X : \mathcal{N}(\mu, 25) \quad \overset{n=10}{\longrightarrow} \quad \overline{X} = 505$

$$1 - \alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}005 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}995 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 20{,}36$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu)(484{,}64, 525{,}36)}$$

b) $\qquad X : \mathcal{N}(500, 25) \quad \overset{n=10}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(500, {}^{25}/_{\sqrt{10}}) = \mathcal{N}(500, 7{,}91)$

$$P\Big(10\overline{X} \geq 5030\Big) = P\Big(\overline{X} \geq 503\Big) = P\left(Z \geq \frac{503 - 500}{7{,}91}\right) = P(Z \geq 0{,}38)$$
$$= 1 - P(Z \leq 0{,}38) = 1 - 0{,}6480 = 0{,}3520$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 25 (2 *puntos*)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16, calcúlese:

a) *La probabilidad de que la media muestral del tiempo $\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.*

b) *El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24{,}24, 47{,}76)$ para μ.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 24) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(36, {}^{24}/\sqrt{16} = 6)$$

$$\begin{aligned} P\left(\overline{X} \geq 48\right) &= P\left(Z \geq \frac{48-36}{6}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2) \\ &= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 \end{aligned}$$

b) $$I.C. = (24{,}24, 47{,}76) \implies 2E = 47{,}76 - 24{,}24 \implies E = 11{,}76$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 11{,}76 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{24}{\sqrt{16}} \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96 \implies 1 - {}^{\alpha}/2 = 0{,}975$$
$$\implies {}^{\alpha}/2 = 0{,}025 \implies \alpha = 0{,}05 \implies 1 - \alpha = 0{,}95$$

Por lo que el nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza en cuestión es del 95 %.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 26 (2 *puntos*)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0{,}6$ cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}6) \overset{n=100}{\longrightarrow} \overline{X} = 7$

$$1-\alpha = 0{,}98 \Longrightarrow \alpha = 0{,}02 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}99 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} = 0{,}1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu)(6{,}8605, 7{,}1395)}$$

b) $n = ?\qquad E \leq 0{,}1 \qquad 1-\alpha = 0{,}98 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$E \leq 0{,}1 \Longrightarrow E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1 \Longrightarrow n \geq \left(2{,}325 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}1}\right)^2$$

$$\Longrightarrow n \geq 194{,}6 \Longrightarrow \boxed{n = 195}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 27 (2 *puntos*)

El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. estos precios son los siguientes:

$$140;\ 125;\ 140;\ 175;\ 135;\ 165;\ 175;\ 110;\ 150;\ 130.$$

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \quad \xrightarrow{n=10} \quad \overline{X} = \frac{140+125+140+175+135+165+175+110+150+130}{10} = 144{,}5$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{15}{8} = 9{,}3$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (135{,}2, 153{,}7)}$$

b) $n = ? \qquad E \leq 8 \qquad 1 - \alpha = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E \leq 8 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right)^2 13{,}5$$

$$\implies \boxed{n = 14}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 28 (2 *puntos*)

El consumo de combustible, en litros cada 100 *kilómetros* ($l/100\,km$), *de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media* μ *desconocida y desviación típica* $\sigma = 1{,}2\ l/100\,km$. *Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño* 49.

a) *Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza* $(4{,}528, 5{,}2)$ *para* μ.

b) *Supóngase ahora que* $\mu = 4{,}8\ l/100\,km$. *Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra,* $\overline{X}$, *esté comprendida entre* 4,5 *y* 5,1 $l/100\,km$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 1{,}2) \quad \overset{n=49}{\longrightarrow} \quad \overline{X} :$

$$2E = 5{,}2 - 4{,}528 = 0{,}672 = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{0{,}672 \cdot \sqrt{49}}{2 \cdot 1{,}2} = 1{,}96 \implies 1 - \alpha = 0{,}95$$

b) $\quad X : \mathcal{N}(4{,}8, 1{,}2) \quad \overset{n=49}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(4{,}8, {}^{1{,}2}/\sqrt{49} = 0{,}1714)$

$$\begin{aligned} P(4{,}5 \leq \overline{X} \leq 5{,}1) &= P\left(\frac{4{,}5 - 4{,}8}{0{,}1714} \leq Z \leq \frac{5{,}1 - 4{,}8}{0{,}1714}\right) = P(-1{,}75 \leq Z \leq 1{,}75) \\ &= P(Z \leq 1{,}75) - P(Z \leq -1{,}75) = P(Z \leq 1{,}75) - P(Z \geq 1{,}75) \\ &= P(Z \leq 1{,}75) - [1 - P(Z \leq 1{,}75)] = -0{,}9599 - (1 - 0{,}9599) \\ &= 0{,}9198 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 29 (2 *puntos*)

Un determinado partido político desea estimar la proporción de votantes, p, que actualmente se decantaría por él.

a) Asumiendo que $p = 0{,}5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de votantes para garantizar que, con una confianza del $90\,\%$, el margen de error en la estimación no supera el $2\,\%$ ($\pm 2\,\%$).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 1200 votantes de los cuales 240 afirmaron que votarían por el partido en cuestión. Obténgase un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la proporción de votantes de ese partido en la población.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C. = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

a) $n = ? \quad \& \quad E \leq 0{,}02 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}90$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} \leq 0{,}02 \implies n \geq \left(\frac{1{,}645\cdot 0{,}5}{0{,}02}\right)^2 = 1691{,}27$$

$$\implies \boxed{n = 1692}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{240}{1200} = 0{,}2 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}8 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{1200}} = 0{,}023$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (0{,}1774, 0{,}2226)}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 30 (2 *puntos*)

El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ kilogramos.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

$$37,\ 40,\ 42,\ 39,\ 41,\ 40,\ 39,\ 42,\ 40$$

b) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 99 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 3) \quad \overset{n=9}{\Longrightarrow} \quad \overline{X} = \frac{37+40+42+39+41+40+39+42+40}{9} = 40$$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{9}} = 1{,}96$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (38{,}04, 41{,}96)}$

b) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 1$, siendo $1 - \alpha = 0{,}99$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}005 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}995 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies 2{,}325 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies n \geq \left(2{,}325 \cdot \dfrac{3}{1}\right)^2 = 48{,}65 \implies \boxed{n = 49}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 31 (2 *puntos*)

La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media $\mu = 4$ gramos y desviación típica $\sigma = 0{,}5$ gramos.

a) *Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0,25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral , $\overline{X}$, pese más de 12,25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(4, 0{,}5) \quad \xrightarrow{n} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(4, {}^{0{,}5}/\sqrt{n})$$

a) $n = ? \quad \& \qquad \& \quad E \leq 0{,}25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \leq 0{,}25 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}25}\right)^2 = 15{,}36 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $$X : \mathcal{N}(12, 0{,}5) \quad \xrightarrow{n=25} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(12, {}^{0{,}5}/\sqrt{25}) = \mathcal{N}(12, 0{,}1)$$

$$P\left(\overline{X} > 12{,}25\right) = P\left(Z > \frac{12{,}25 - 12}{0{,}1}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z < 2{,}5)$$
$$= 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 32 (2 *puntos*)

El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 10$ descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99,5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra de 10 horas la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \overset{n=40}{\longrightarrow} \overline{X} = 99{,}5$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{40}} = 3{,}1$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (96{,}4, 102{,}6)}$$

b) $X : \mathcal{N}(100, 10) \overset{n=10}{\longrightarrow} \overline{X} : \mathcal{N}(100, 10/\sqrt{10}) = \mathcal{N}(100, 3{,}16)$

$$P\Big(100 < \overline{X} < 110\Big) = P\left(\frac{100-100}{3{,}16} < Z < \frac{110-100}{3{,}16}\right) = P(0 < Z < 3{,}16)$$
$$= P(Z < 3{,}16) - P(z < 0) = 0{,}9992 - 0{,}5 = 0{,}4992$$

HTTPS://APRUEBECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 33 (2 *puntos*)

El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ h y desviación típica $\sigma = 0{,}25$ h.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 15 individuos y se obtiene una media muestral $\overline{x} = 2$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 2$ h. calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1,85 y 2,15 horas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 2 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}25}{\sqrt{15}} = 0{,}127$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1{,}873; 2{,}127)}$$

b) $X : \mathcal{N}(2, 0{,}25) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2, \dfrac{0{,}25}{\sqrt{20}} = 0{,}056\right)$

$$\begin{aligned} P(1{,}85 \le \overline{X} \le 2{,}15) &= P\left(\frac{1{,}85-2}{0{,}056} \le Z \le \frac{2{,}15-2}{0{,}056}\right) = P(-2{,}68 \le Z \le 2{,}68) \\ &= P(Z \le 2{,}68) - P(Z \le -2{,}68) = P(Z \le 2{,}68) - P(Z \ge 2{,}68) \\ &= P(Z \le 2{,}68) - [1 - P(Z \le 2{,}68)] = 2 \cdot P(Z \le 2{,}68) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}9963 - 1 = 0{,}9926 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 34 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0{,}2$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0,05 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1{,}5$ kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}2) \quad \& \quad n =? \quad \& \quad E < 0{,}05 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{n}} < 0{,}05 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}05}\right)^2 = 61{,}46 \implies \boxed{n = 62}$$

b) $X : \mathcal{N}(1{,}5, 0{,}2) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1{,}5, \dfrac{0{,}2}{\sqrt{20}} = 0{,}045\right)$

Si la suma de los pesos de 20 ejemplares es de 32 kg, quiere decir que la media será $\overline{x} = \dfrac{32}{20} = 1{,}6$ kg

$$P(\overline{X} > 1{,}6) = P\left(Z > \frac{1{,}6-1{,}5}{0{,}045}\right) = P(Z > 2{,}22) = 1 - P(Z < 2{,}22)$$
$$= 1 - 0{,}9868 = 0{,}0132$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 35 (2 *puntos*)

La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para μ sea a lo sumo de 23550 km.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 24000) \qquad \& \qquad n = ? \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0{,}95 \qquad \& \qquad 2E \le 23550$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 23550 \implies n \ge \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{24000}{23550}\right)^2 = 15{,}95 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(150000, 24000) \quad \xrightarrow{n=25} \quad \overline{X} : \mathcal{N}\left(150000, \frac{24000}{\sqrt{25}} = 4800\right)$

$$\begin{aligned} P(144240 \le \overline{X} \le 153840) &= P\left(\frac{144240-150000}{4800} \le \overline{X} \le \frac{153840-150000}{4800}\right) \\ &= P(-1{,}2 \le Z \le 0{,}8) = P(Z \le 0{,}8) - P(Z \le -1{,}2) \\ &= P(Z \le 0{,}8) - P(Z \ge 1{,}2) = P(Z \le 0{,}8) \\ &- [1 - P(Z \le 1{,}2)] = 0{,}7881 - (1 - 0{,}8849) = 0{,}673 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 36 (2 *puntos*)

Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3 % (±3 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

El intervalo de confianza para una proporción es el siguiente:

$$I.C. = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \le 0{,}03$, siendo $1-\alpha = 0{,}95$ y $\hat{p} = 0{,}5$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E \le 0{,}03 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \le 0{,}03 \implies 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} \le 0{,}03$$

$$\implies n \ge \left(\frac{1{,}96\cdot 0{,}5}{0{,}03}\right)^2 = 1067{,}11 \text{ y por tanto } \boxed{n = 1068}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{90}{450} = 0{,}2$ & $\hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}8$ & $1-\alpha = 0{,}9$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{450}} = 0{,}031$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (0{,}169, 0{,}231)}$$

Ejercicio 37 (2 *puntos*)

Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes, P, que estarían dispuestos a contratarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}5$, Determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % (±2 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C. = \hat{p} \pm \varepsilon, \text{ siendo el error } \varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $\varepsilon \leq 0{,}02$, siendo $1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tablaa} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$\varepsilon \leq 0{,}02 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \leq 0{,}02 \implies 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} \leq 0{,}02$$

$$\implies n \geq \left(\frac{1{,}96\cdot 0{,}5}{0{,}02}\right)^2 = 2401 \quad \text{y por tanto} \quad \boxed{n = 2401 \text{ encuestados}}$$

b)

$$\hat{p} = \frac{85}{500} = 0{,}17 \implies \hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}83$$

$$1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}10 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$I.C. = \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 0{,}17 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}17\cdot 0{,}83}{500}} \implies \boxed{I.C = (0{,}1424; 0{,}1976)}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 38 (2 *puntos*)

El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0{,}1$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimción de μ sea menor que 0,025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Sabiendo que $\mu = 0{,}7$ kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0,65 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Llamamos $X \equiv$ "Contenido en azúcares en los botes de miel (kg)"

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $\varepsilon \leq 0{,}025$, siendo $1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$\varepsilon < 0{,}025 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}025 \implies 1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}025$$

$$\implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}025}\right)^2 = 61{,}46 \text{ y por tanto } \boxed{n = 62}$$

b) $$X : \mathcal{N}(0{,}7, 0{,}1) \quad \overset{n=20}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}\left(0{,}7; \frac{0{,}1}{\sqrt{20}} = 0{,}022\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 0{,}65) = P\left(Z \leq \frac{0{,}65 - 0{,}7}{0{,}022}\right) = P(Z \leq -2{,}24) = P(Z \geq 2{,}24)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2{,}27) = 1 - 0{,}9875 = 0{,}0125$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 39 (2 *puntos*)

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2 % para estimar el precio medio mensual μ, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Nos dice que la varianza $\sigma^2 = 49 \implies \sigma = 7$

$$X : \mathcal{N}(\mu, 7) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(\mu, 0{,}875)$$

$1 - \alpha = 0{,}992 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}65 \qquad \& \qquad \overline{x} = 34$

$I.C. = \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 34 \pm 2{,}65 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{64}} = (31{,}68; 36{,}32)$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 95\,\% \qquad \& \qquad \varepsilon < 3$

$1 - \alpha = 0{,}95 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1{,}96 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{n}} < 3 \Rightarrow n > \left(\dfrac{1{,}96 \cdot 7}{3}\right)^2 = 20{,}92 \Rightarrow \boxed{n = 21 \text{ centros}}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 40 (2 *puntos*)

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5° y 6° de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1{,}5$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos.
Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu; 1,5) \xrightarrow{n=?}$ I.C. de amplitud $2\varepsilon = 0{,}49$

$$1-\alpha = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies \frac{0{,}49}{2} = 1{,}96 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 1{,}5}{0{,}245}\right)^2 \implies \boxed{n = 144 \text{ mochilas}}$$

b) $X : \mathcal{N}(6; 1{,}5) \xrightarrow{n=225} \overline{X} : \mathcal{N}\Big(6; \frac{1{,}5}{\sqrt{225}}\Big) = \mathcal{N}(6; 0{,}1)$

$$P(\overline{X} \geq 5{,}75) = P\left(Z \geq \frac{5{,}75-6}{0{,}1}\right) = P(Z \geq -2{,}5)$$
$$= P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 41 (2 *puntos*)

El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 5 min, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0{,}1587$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad n =? \quad \& \quad E < 5 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{10}{5}\right)^2 = 15{,}36 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(40, 5) \xrightarrow{n=?} \overline{X} : \mathcal{N}\left(40, \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{{}^{10}/_{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0{,}1587 \implies P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0{,}8413$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{\sqrt{n}}{5} = 1{,}00 \implies \sqrt{n} = 5 \implies \boxed{n = 25}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 42 (2 *puntos*)

En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) Suponiendo $\mu = 3000$ €, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 € sea 0,20.

b) Suponiendo una desviación típica poblacional igual a 1000 € y el valor de μ desconocido, determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ, basado en la información de una muestra aleatoria simple de 100 locales comerciales en la que se observó un alquiler mensual medio de 3300 €.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(3000, \sigma) \xrightarrow{n=49} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} > 3125) = P\left(Z > \frac{3125 - 3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z > \frac{875}{\sigma}\right) = 1 - P(Z < \frac{875}{\sigma}) = 0{,}20$$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{875}{\sigma}\right) = 0{,}80 \xrightarrow{Tabla} \frac{875}{\sigma} = 0{,}845 \Longrightarrow \boxed{\sigma = 1035{,}5}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3300$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Longrightarrow \alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1000}{\sqrt{100}} = 196$$

$$I.C. = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C. = (3104, 3496)}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 43 (2 *puntos*)

Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

Sea $X \equiv$ Peso de los paquetes de harina, entonces $X : \mathcal{N}(\mu, 25)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 560 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0{,}95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$I.C. = \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 560 \pm 1{,}96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}} \Longrightarrow \boxed{I.C. = (547{,}35; 572{,}65)}$$

b) $X : \mathcal{N}(560, 25) \xrightarrow{n=50} \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(560, \dfrac{25}{\sqrt{50}}\right) = \mathcal{N}(560, 3{,}54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565 - 560}{3{,}54}\right) = P(Z \geq 1{,}41) = 1 - P(Z \leq 1{,}41)$$
$$= 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 44 (2 *puntos*)

Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0{,}22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 habían faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $p = 0{,}22 \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}99 \quad \& \quad \varepsilon < 0{,}04$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < 0{,}04 \implies n > \left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sqrt{pq}}{0{,}04}\right)^2 = \left(2{,}575\cdot\frac{\sqrt{0{,}22\cdot 0{,}78}}{0{,}04}\right)^2 = 711{,}13$$

Luego $\boxed{n = 712 \text{ trabajadores}}$

b) $n = 1000 \quad \& \quad p = \dfrac{250}{1000} = 0{,}25 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$I.C. = \overline{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 0{,}25 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}25\cdot 0{,}75}{1000}} \implies \boxed{I.C. = (0{,}2231; 0{,}2768)}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 45 (2 *puntos*)

En las especificaciones de una máquina tragaperras se establece que la proporción P de veces que la máquina devuelve algo a quien la use es $1/4$.

a) (1 punto) Utilice la aproximación por la distribución normal para calcular la probabilidad de obtener al menos 20 devoluciones de 100 veces que se juega.

b) (1 punto) Sin tomar en cuenta las especificaciones, si en 100 juegos la máquina devolvió algo al jugador sólo en 15 ocasiones, calcúlese un intervalo de confianza del 99 % para la proporción P.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{B}(100, {}^1\!/\!_4) \begin{cases} n > 10 \\ np = 100 \cdot {}^1\!/\!_4 = 25 > 5 \\ nq = 100 \cdot {}^3\!/\!_4 = 75 > 5 \end{cases} \xrightarrow{Yates} Y : \mathcal{N}\Big(np = 25, \sqrt{npq} = 4{,}33\Big)$

$$P(X \geq 20) = P(Y > 19{,}5) = P\left(Z > \frac{19{,}5 - 25}{4{,}33}\right) = P(Z > -1{,}27)$$
$$= P(Z < 1{,}27) = 0{,}9880$$

b) $\hat{p} = \dfrac{15}{100} = 0{,}15 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}85 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}99$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^\alpha\!/\!_2 = 0{,}005 \implies 1-{}^\alpha\!/\!_2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}} = 0{,}092$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0{,}058; 0{,}242)}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 46 (2 *puntos*)

La factura, en euros, de una cena para una persona, reservando en pucherodelujo.com *se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media* $\mu = 25$ *y desviación típica* $\sigma = 5$.

a) Calcúlese la probabilidad de que el coste medio por comensal, de 9 personas escogidas al azar que reserven en la página, no sea mayor que 30 euros.

b) Determínese el número mínimo de comensales que debería tener una muestra aleatoria simple para que el coste medio por comensal no exceda los 30 euros con probabilidad no inferior a 0,95.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(25, 5) \quad \xrightarrow{n=9} \quad \overline{X} : \mathcal{N}\left(25, \frac{5}{\sqrt{9}} = 1{,}67\right)$$

$$P(\overline{X} < 30) = P\left(Z < \frac{30 - 25}{1{,}67}\right) = P(Z < 3) = 0{,}9987$$

b) $n = ?$ & $1 - \alpha = 0{,}95$ & $E \le 5$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \le 5 \implies n \ge \left(1{,}96 \cdot \tfrac{5}{5}\right)^2 = 3{,}84 \implies \boxed{n = 4}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 47 (2 *puntos*)

La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0,09 mg^2.

a) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.

b) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0,05 mg con un nivel de confianza del 98 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) Nos dicen que la varianza $\sigma^2 = 0{,}09 \implies \sigma = 0{,}3$

$X \equiv$ "Cantidad de principio activo" $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}3) \xrightarrow{n=400} \overline{x} = 13$

$1-\alpha = 0{,}99 \implies \alpha = 0{,}01 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}005 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \dfrac{0{,}3}{\sqrt{400}} = 0{,}039$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (12{,}961; 13{,}039)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1-\alpha = 98\,\% \qquad \& \qquad E < 0{,}05$

$1-\alpha = 0{,}98 \implies \alpha = 0{,}02 \implies \alpha/2 = 0{,}1 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325 \cdot \dfrac{0{,}3}{\sqrt{n}} < 0{,}05 \implies n > \left(\dfrac{2{,}325 \cdot 0{,}3}{0{,}05}\right)^2 = 194{,}6 \implies \boxed{n = 195}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 48 (2 *puntos*)

En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450$ g.

a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\overline{x} = 2700$ g, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

b) Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000$ g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pesen en media entre 3000 g y 3450 g.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Peso sandías (g)" & $X : \mathcal{N}(\mu, 450) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 2700$ & $1 - \alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{450}{\sqrt{25}} = 176{,}4$$

$$I.C. = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C. = (2523{,}6, 2876{,}4)}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 450) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\Big(3000, \frac{450}{\sqrt{4}}\Big) = \mathcal{N}(3000, 225)$

$$P(3000 < X < 3450) = P\Big(\frac{3000-3000}{225} < Z < \frac{3450-3000}{225}\Big) = P(0 < Z < 2)$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0{,}9772 - 0{,}5 = 0{,}4772$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 49 (2 *puntos*)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

a) $n =? \quad \& \quad X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}5) \quad \& \quad E \leq 0{,}05 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9544$

$$1-\alpha = 0{,}9544 \Rightarrow \alpha = 0{,}0456 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}0228 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}9772 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}00$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05 \implies n \geq \left(2 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}05}\right)^2 = 400 \implies \boxed{n = 400 \text{ bolígrafos}}$$

b) $X : \mathcal{N}(2, 0{,}5) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(2, \dfrac{0{,}5}{\sqrt{16}} = 0{,}125)$

$$P\left(\overline{X} \geq \frac{30}{16}\right) = P(\overline{X} \geq 1{,}875) = P\left(Z \geq \frac{1{,}875-2}{0{,}125}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0{,}8413$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 50 (2 *puntos*)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este producto fueron los siguientes:

$$40 \quad 45 \quad 38 \quad 44 \quad 41 \quad 40 \quad 35 \quad 50 \quad 40 \quad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

$X \equiv$ Consumo de agua (litros)

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}7) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \dfrac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = 41$

$$1-\alpha = 0{,}90 \implies \alpha = 0{,}10 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 3{,}64$$

$$I.C. = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (37{,}36; 44{,}64)$$

b) $n = 64 \quad \& \quad 2E = 5 \implies E = 2{,}5$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{64}} = 2{,}5 \implies z_{\alpha/2} = 2{,}857 \xrightarrow{Tabla} 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}9979$$

$$1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}9979 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}0021 \implies \alpha = 0{,}0042 \implies 1-\alpha = 0{,}9958 \implies 99{,}58\,\%$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 51 (2 *puntos*)

El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{"Salario medio bruto anual (euros)"} \longrightarrow X : (\mu, 900)$$

a) $n =?$ & $E \leq 200$ & $1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}056 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 200 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{900}{200}\right)^2 = 77{,}79 \implies \boxed{n = 78 \text{ euros}}$$

b) $X : \mathcal{N}(1889, 900) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1889, \dfrac{900}{\sqrt{64}} = 112{,}5\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 1900\right) = P\left(Z \geq \frac{1900-1889}{112{,}5}\right) = P(Z \geq 0{,}098) = 1 - P(Z \leq 0{,}098)$$
$$= 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 52 (2 *puntos*)

Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$ euros.

a) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.

b) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 5100$

$$1 - \alpha = 0{,}90 \implies \alpha = 0{,}10 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{500}{\sqrt{100}} = 82{,}25$$

$$I.C. = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (5017{,}75; 5182{,}25)$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \quad \& \quad n = 36 \quad \& \quad E = 160$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{500}{\sqrt{36}} = 160 \implies z_{\alpha/2} = 1{,}92$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}92 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}9726 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0274 \Rightarrow \alpha = 0{,}0548 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9452$$

HTTPS://APRENDECONMICOMELON.COM

Ejercicio 53 (2 *puntos*)

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $\mu = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0{,}9940$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 20 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} < 20 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{60}{20}\right)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = 6\right)$

$$P(\overline{X} \leq 220) = P(Z < \frac{220 - \mu}{6}) = 0{,}9940 \xrightarrow{Tabla} 2{,}51 = \frac{220 - \mu}{6} \implies \boxed{\mu = 204{,}94}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 54 (2 *puntos*)

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarde en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximare por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 *minutos.*

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26{,}9, 37{,}1)$*, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido,* μ*, con un nivel de confianza del* $98{,}92\,\%$*. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.*

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ *minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de* 16 *días elegidos al azar, esta persona tarde entre* 25 *y* 36 *minutos de media para completar el recorrido.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad I.C.(26{,}9, 37{,}1) \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}9892$

$$1-\alpha = 0{,}9892 \Rightarrow \alpha = 0{,}0108 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0054 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}9946 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}55$$

$$\overline{x} = \frac{26{,}9+37{,}1}{2} = 32$$

$$E = \frac{37{,}1-26{,}9}{2} = 5{,}1$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}55\cdot\frac{10}{\sqrt{n}} = 5{,}1 \implies n > \left(2{,}55\cdot\frac{10}{5{,}1}\right)^2 \implies \boxed{n=25}$$

b) $X : \mathcal{N}(30, 10) \xrightarrow{n=160} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{16}} = 2{,}5\right)$

$$\begin{aligned} P(25 \le \overline{X} \le 35) &= P\left(\frac{25-30}{2{,}5} < Z < \frac{35-30}{2{,}5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) \\ &= P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - P(Z \ge 2) \\ &= P(Z \le 2) - \big[1 - P(Z \le 2)\big] = 2P(Z \le 2) - 1 \xrightarrow{Tabla} \\ &= 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 55 (2 *puntos*)

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0{,}1) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 30$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}25 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4{,}38$$
$$I.C. = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (25{,}62; 34{,}38)$$

b) $X : \mathcal{N}(28, 10) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = 3{,}16\right)$

$$P\left(28 \leq \overline{X} \leq 30\right) = P\left(\frac{28-28}{3{,}16} \leq Z \leq \frac{30-28}{3{,}16}\right) = P(0 \leq Z \leq 0{,}63)$$
$$= P(Z \leq 0{,}63) - P(Z \leq 0) = 0{,}7357 - 0{,}5 = 0{,}2357$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 56 (2 *puntos*)

Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar un muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 100 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} < 100 \implies n > \left(1{,}96 \cdot \frac{300}{100}\right)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 300) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{300}{\sqrt{50}} = 42{,}43\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 2700\right) = P\left(Z \geq \frac{2700 - 3000}{42{,}43}\right) = P(Z \geq -7{,}07) = P(Z \leq 7{,}07) \simeq 1$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 57 (2 *puntos*)

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) *(1 punto) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.*

b) *(1 punto) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $n = 500 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{320}{500} = 0{,}64 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}36 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}96$

$$1 - \alpha = 0{,}96 \implies \alpha = 0{,}04 \implies \alpha/2 = 0{,}02 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}98 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}055$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{500}} = 0{,}0441$$

$$I.C = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C. = (0{,}5959; 0{,}6841)}$$

b) $p = 0{,}5 \quad \& \quad q = 1 - p = 0{,}5 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95 \quad \& \quad E \leq 0{,}05$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} \leq 0{,}05 \implies n \geq 384{,}16 \implies \boxed{n = 385}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 58 (2 *puntos*)

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) (1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117{,}3444; 124{,}6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Consumo de pan (kg)"

$$X : \mathcal{N}(120, 20) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}\left(120, \frac{20}{\sqrt{36}} = 3{,}33\right)$$

$$P(\overline{X} < 125) = P\left(Z < \frac{125 - 120}{3{,}33}\right) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$$

b) $n = 81 \quad \& \quad I.C.(117{,}3444; 124{,}6556)$

$$\overline{x} = \frac{117{,}3444 + 124{,}6556}{2} = 121 \qquad \& \qquad E = \frac{124{,}6556 - 117{,}3444}{2} = 3{,}6556$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{3{,}6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1{,}645 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}95$$

$$1 - \alpha/2 = 0{,}95 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0{,}9 = 90\,\%}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 59 (2 *puntos*)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) (1 punto) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) (1 punto) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución. $X \equiv$ "Peso barra mantequilla (gr)" & $X : \mathcal{N}(\mu, 4)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 254$

$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} = 2{,}024$$

$$I.C_{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{E} + E) \implies \boxed{I.C_{95\,\%}(\mu) = (251{,}98; 256{,}02)}$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 4) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}(250, 0{,}8)$

$$P(\overline{X} \geq 248) = P\left(Z \geq \frac{248 - 250}{0{,}8}\right) = P(Z \geq -2{,}5) = P(Z < 2{,}5) = 0{,}9938$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 60 (2 *puntos*)

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0{,}2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) (1 punto) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$P \equiv \text{“Proporción de cajas grandes sobre el total”}$$

a) $n = ? \quad \& \quad p = 0{,}2 \quad \& \quad q = 1 - p = 0{,}8 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}99$

$$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{n}} \leq 0{,}08 \implies n \geq 165{,}77 \implies \boxed{n = 166}$$

b) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{25}{200} = 0{,}125 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}875 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0{,}95$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{200}} = 0{,}046$$

$$I.C_{95\,\%}(\mu) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C_{95\,\%}(\mu) = (0{,}079; 0{,}171)}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 61 (2 *puntos*)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los huevos (gr)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 60$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 3{,}506$$

$$I.C_{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C_{95\,\%}(\mu) = (56{,}494; 63{,}506)}$$

b) $X : \mathcal{N}(59, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(59, \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right)$

$$\begin{aligned} P(57 < \overline{X} < 61) &= P\left(\frac{57-59}{8/\sqrt{10}} < Z < \frac{61-59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0{,}79 < Z < 0{,}79) \\ &= P(Z < 0{,}79) - P(Z < -0{,}79) = P(Z < 0{,}79) - P(Z > 0{,}79) \\ &= P(Z < 0{,}79) - \big[1 - P(Z < 0{,}79)\big] = 2 \cdot P(Z < 0{,}79) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}7852 - 1 = 0{,}5704 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 62 (2 *puntos*)

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) *(1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *(1 punto) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo para hacer el test (minuotos)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $n =?$ $\quad \& \quad E < 1 \quad \& \quad 1-\alpha = 0{,}95$

$$1-\alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1-\alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (1{,}96 \cdot 3)^2 = 34{,}57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(32, 3) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}\left(32, \dfrac{3}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}(32, 0{,}75)$

$$P(\overline{X} < 30{,}5) = P\left(Z < \frac{30{,}5 - 32}{0{,}75}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 63 (2 *puntos*)

El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0,25 horas.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2,9 horas si $\mu = 2{,}75$ horas.

b) (1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(2{,}9388, 3{,}0613)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(2{,}75, 0{,}25) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2{,}75, \dfrac{0{,}25}{\sqrt{25}} = 0{,}05\right)$

$$P\left(\overline{X} < 2{,}9\right) = P\left(Z < \dfrac{2{,}9 - 2{,}75}{0{,}05}\right) = P(Z < 3) = 0{,}9987$$

b) $n = 64 \qquad \& \qquad IC = (2{,}9388, 3{,}0623)$

$$E = \dfrac{3{,}0623 - 2{,}9388}{2} = 0{,}06125 \xRightarrow{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{0{,}25}{\sqrt{64}} = 0{,}06125 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0{,}95}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 64 (2 *puntos*)

Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) (1 punto) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 98 % para estimar μ.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 6) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 44$

$1 - \alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies \alpha/2 = 0{,}05 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{81}} = 1{,}0967$

$I.C = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C. = (42{,}9033; 45{,}0967)}$

b) $n =?$ & $2E \leq 3 \implies E \leq 1{,}5$ & $1 - \alpha = 0{,}95$

$1 - \alpha = 0{,}95 \implies \alpha = 0{,}05 \implies \alpha/2 = 0{,}025 \implies 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{n}} \leq 1{,}5 \implies n \geq \left(1{,}96 \cdot \dfrac{6}{1{,}5}\right)^2 = 61{,}47 \implies \boxed{n = 62}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM