MATEMATICAS II y CCSS

PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

https://aprendeconmigomelon.com

17 de noviembre de 2021

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de problemas con Sistemas de Ecuaciones. Son un clásico en los exámenes de y, entre otros problemas de EVAU, podrás encontrar todos los de la Comunidad de Madrid de los últimos 20 años. Espero que te sea de utilidad.

Índice general

Matemáticas CCSS 29

Matemáticas II 40

Ejercicio 1

Una autoescuela tiene abiertas tres sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son tan solo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además la diferencia entre los matriculados en al primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.
Averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº alumnos matriculados en la primera sucursal”} \\ y &\equiv \text{“Nº alumnos matriculados en la segunda sucursal”} \\ z &\equiv \text{“Nº alumnos matriculados en la tercera sucursal”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=352 \\ z=\dfrac{x}{4} \\ x-y+2=2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=352 \\ x-4z=0 \\ x-y-2z=-2 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 352 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 352 \\ 0 & -1 & -5 & -352 \\ 0 & -2 & -3 & -354 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 352 \\ 0 & -1 & -5 & -352 \\ 0 & 0 & 7 & 350 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+102+50=352 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y-5\cdot 50=352 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 7z=350 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=200 \\ y=102 \\ z=50 \end{array}}$$

Ejercicio 2

> *En una reunión hay 60 personas entre altas, medianas y bajas. Se sabe que las bajas y medianas duplican el número de las altas. También se sabe que las altas y el doble de las medianas son el doble de las bajas. ¿Cuál es el número de personas altas, bajas y medianas?*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$
\begin{aligned}
x &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de personas altas”} \\
y &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de personas medianas”} \\
z &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de personas bajas”}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} x+y+z=60 \\ y+z=2x \\ x+2y=2z \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=60 \\ 2x-y-z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}
$$

$$
A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -120 \\ 0 & 1 & -3 & -60 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3+F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -120 \\ 0 & 0 & -12 & -300 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+15+25=60 \\ \Rightarrow -3y-3\cdot 25=-120 \\ \Rightarrow -12z=-300 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=20 \\ y=15 \\ z=25 \end{array}}
$$

Ejercicio 3

Un determinado inversor dispone de un capital M que invierte en tres productos financieros A, B y C. Se desea saber cual es el rédito de A, el de B y el de C sabiendo:

- *Si invierte el* 25 % *en A, el* 45 % *en B y el resto en C obtiene una rentabilidad del* 4,6 %.
- *Si invierte el* 50 % *en A, el* 40 % *en C y el resto en B obtiene una rentabilidad del* 4,8 %.
- *Si invierte exclusivamente y a partes iguales en B y en C obtiene una rentabilidad del* 6,5 %.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Rédito del producto financiero } A\text{”} \\ y &\equiv \text{“Rédito del producto financiero } B\text{”} \\ z &\equiv \text{“Rédito del producto financiero } C\text{”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0{,}25\cancel{M}x + 0{,}45\cancel{M}y + 0{,}30\cancel{M}z = 0{,}046\cancel{M} \\ 0{,}50\cancel{M}x + 0{,}10\cancel{M}y + 0{,}40\cancel{M}z = 0{,}048\cancel{M} \\ 0{,}50\cancel{M}y + 0{,}50\cancel{M}z = 0{,}065\cancel{M} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 25x + 45y + 30z = 4{,}6 \\ 50x + 10y + 40z = 4{,}8 \\ 50y + 50z = 6{,}5 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 25 & 45 & 30 & 4{,}6 \\ 50 & 10 & 40 & 4{,}8 \\ 0 & 50 & 50 & 6{,}5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 25 & 45 & 30 & 4{,}6 \\ 0 & -80 & -20 & -4{,}4 \\ 0 & 50 & 50 & 6{,}5 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 8F_3 + 5F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 25 & 45 & 30 & 4{,}6 \\ 0 & -80 & -20 & -4{,}4 \\ 0 & 0 & 300 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 25x + 45 \cdot 0{,}03 + 30 \cdot 0{,}1 = 4{,}6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -80y - 20 \cdot 0{,}1 = -4{,}4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 300z = 30 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0{,}01 = 1\,\% \\ y = 0{,}03 = 3\,\% \\ z = 0{,}1 = 10\,\% \end{array}}$$

Ejercicio 4

En un instituto donde se imparten primer y segundo ciclo de Enseñanza obligatoria y Bachillerato hay 20 grupos de alumnos en total. Si sumamos los grupos de Bachillerato y de segundo curso de Enseñanza Obligatoria, obtenemos el triple del número de primer ciclo. Si hubiera un grupo más de segundo ciclo, su número igualaría al de grupos de bachillerato.
¿Cuántos grupos de hay de bachillerato, de primer ciclo y de segundo ciclo de enseñanza obligatoria?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de grupos de } 1^{er} \text{ ciclo”} \\ y &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de grupos de } 2^{\text{o}} \text{ ciclo”} \\ z &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de grupos de Bachillerato”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ y+z=3x \\ y+1=z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ 3x-y-z=0 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[F_3 - 3F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 4F_3 + F_2 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & -8 & -64 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+7+8=20 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y-4\cdot 8=-60 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -8z=-64 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=5 \\ y=7 \\ z=8 \end{array}}$$

Ejercicio 5

Un país importa 21000 vehículos mensuales de las marcas X, Y y Z al precio de 12000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. Si el total de la importación asciende a 32,2 millones de euros, y de la marca X se importa el 40 % de la suma de las otras dos marcas, ¿cuántos vehículos de cada marca entran en ese país?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de vehículos de la marca } X\text{”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de vehículos de la marca } Y\text{”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de vehículos de la marca } Z\text{”}$$

$$\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 12000x+15000y+20000z=32200000 \\ x=0{,}4\cdot(y+z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=21000 \\ 12x+15y+20z=320000 \\ 10x-4y-4z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 12 & 15 & 20 & 320000 \\ 10 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-12F_1 \\ F_3-10F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 3 & 8 & 68000 \\ 0 & -14 & -14 & -210000 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 3F_3+14F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 3 & 8 & 68000 \\ 0 & 0 & 70 & 322000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+10400+4600=21000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y+8\cdot 4600=68000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 70z=322000 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=6000 \\ y=10400 \\ z=4600 \end{array}}$$

Ejercicio 6

> *La suma de las cifras de un número comprendido entre* 100 *y* 999 *es* 13*. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en* 198*. Si se intercambian las de las unidades y las decenas, el número aumenta en* 36*. ¿Cuál es este número?*

Solución.

Sean las incógnitas: | x | y | z |

$$
\begin{aligned}
x &\equiv \text{“Cifra de las centenas”}\\
y &\equiv \text{“Cifra de las decenas”}\\
z &\equiv \text{“Cifra de las unidades”}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
x+y+z=13\\
(100x+10y+z)-(100z+10y+x)=198\\
(100x+10z+y)-(100x+10y+z)=36
\end{cases}
\implies
\begin{cases}
x+y+z=13\\
x-z=2\\
-y+z=4
\end{cases}
$$

$$
A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13\\ 0 & -1 & -2 & -11\\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13\\ 0 & -1 & -2 & -11\\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)
\begin{array}{ll}
\Rightarrow x+1+5=13 & \Rightarrow\\
\Rightarrow -y-2\cdot 5=-11 & \Rightarrow\\
\Rightarrow 3z=15 & \Rightarrow
\end{array}
\boxed{\begin{array}{c} x=7\\ y=1\\ z=5 \end{array}}
$$

Ejercicio 7

Con 2000 euros se pueden comprar los artículos A, B, C y D en la tienda "Compre barato", y con 2100 euros se pueden comprar los mismos cuatro artículos en la tienda "Vendemos calidad". En esta segunda tienda los precios de A, B y C son un 20 % superiores a los de la primera tienda, en tanto que el precio de D en la segunda es un 15 % más barato que n la primera. Averiguar razonadamente el precio de D en la primera tienda y justifica que no podemos hallar el precio de A con los datos que nos han dado

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned}
a &\equiv \text{“Precio del artículo } A \text{ en la tienda } \textit{Compre barato}\text{”}\\
b &\equiv \text{“Precio del artículo } B \text{ en la tienda } \textit{Compre barato}\text{”}\\
c &\equiv \text{“Precio del artículo } C \text{ en la tienda } \textit{Compre barato}\text{”}\\
d &\equiv \text{“Precio del artículo } D \text{ en la tienda } \textit{Compre barato}\text{”}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=2000 \\ 1{,}2\cdot(a+b+c)+0{,}85d=2100 \end{cases} \implies \begin{cases} a+b+c+d=2000 \\ 1{,}2a+1{,}2b+1{,}2c+0{,}85d=2100 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 1{,}2 & 0{,}85 & 2100 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-1{,}2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}35 & -300 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll}
\Rightarrow a+\lambda+\mu+857{,}14=2000 & \Rightarrow \\
\Rightarrow b=\lambda & \Rightarrow \\
\Rightarrow c=\mu & \Rightarrow \\
\Rightarrow -0{,}35d=-300 & \Rightarrow
\end{array}
\boxed{\begin{array}{cc}
a=1142{,}86-\lambda-\mu & \\
b=\lambda & \lambda,\ \mu\in\mathbb{R} \\
c=\mu & \\
d=857{,}14 &
\end{array}}$$

El sistema es compatible indeterminado, lo que significa que tiene infinitas soluciones y por tanto no hay datos suficientes para determinar el valor de todas las incógnitas.

Ejercicio 8

De tres amigos, Ana, Pedro y Juan se sabe lo siguiente:

- *El doble de la edad de Ana más el triple de la edad de Pedro es tres años superior a cuatro veces la edad de Juan.*
- *El triple de la edad de Juan menos el doble de la edad de Pedro es siete años inferior al doble de la edad de Ana.*
- *El doble de la edad de Ana más el doble de la edad de Juan es tres años inferior a cinco veces la edad de Pedro.*

Calcula la edad de cada uno de los tres amigos

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Edad de Ana”} \\ y &\equiv \text{“Edad de Pedro”} \\ z &\equiv \text{“Edad de Juan”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=4z+3 \\ 3z-2y+7=2x \\ 2x+2z+3=5y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ 2x+2y-3z=7 \\ 2x-5y+2z=3 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-8F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -38 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x+3\cdot 15-4\cdot 19=3 \\ \Rightarrow -y+19=4 \\ \Rightarrow -2z=-38 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=17 \\ y=15 \\ z=19 \end{array}}$$

Ejercicio 9

Se mezclan tres clases de vinos A, B y C de la siguiente manera:

- 5 *litros de A,* 6 *litros de B y* 3 *de C, dando un vino de* 12 *euros/litro.*
- 1 *litros de A,* 3 *litros de B y* 6 *de C, dando un vino de* 11,1 *euros/litro.*
- 3 *litros de A,* 6 *litros de B y* 6 *de C, dando un vino de* 11,6 *euros/litro.*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Precio del vino } A \text{ (€/litro)”} \\ y &\equiv \text{“Precio del vino } B \text{ (€/litro)”} \\ z &\equiv \text{“Precio del vino } C \text{ (€/litro)”} \end{aligned}$$

En los problemas de mezclas, el truco para obtener las ecuaciones es decir que el precio de los componentes de la mezcla es igual al precio de la mezcla obtenida:

$$\begin{cases} 5x + 6y3z = 14 \cdot 12 \\ x + 3y + 6z = 11{,}1 \cdot 10 \\ 3x + 6y + 6z = 15 \cdot 11{,}6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 6y + 3z = 168 \\ x + 3y + 6z = 111 \\ 3x + 6y + 6z = 174 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 6 & 3 & 168 \\ 1 & 3 & 6 & 111 \\ 3 & 6 & 6 & 174 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 5F_2 - F_1 \\ 5F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 6 & 3 & 168 \\ 0 & 9 & 27 & 387 \\ 0 & 12 & 21 & 366 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 3F_3 - 4F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 6 & 3 & 168 \\ 0 & 9 & 27 & 387 \\ 0 & 0 & -45 & -450 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 5x + 6 \cdot 13 + 3 \cdot 10 = 168 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 9y + 27 \cdot 10 = 387 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -45z = -450 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 12 \\ y = 13 \\ z = 10 \end{array}}$$

Ejercicio 10

> *En cierto comercio, un cliente compra 5 kg de patatas, 3 kg de azúcar y 2 kg de café gastando un total de 185 euros. Otro cliente compra 2 kg de patatas, 2 kg de azúcar y 1 kg de café, gastando 90 euros. Un tercer cliente compra 4 kg de azúcar y 5 kg de café, gastando 320 euros. Halla el precio de cada artículo.*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Precio del kg de patatas”} \\ y &\equiv \text{“Precio del kg de azúcar”} \\ z &\equiv \text{“Precio del kg de café”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 185 \\ 2x + 2y + z = 90 \\ 4y + 5z = 320 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 185 \\ 2 & 2 & 1 & 90 \\ 0 & 4 & 5 & 320 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 5F_2 - 2F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 185 \\ 0 & 4 & 1 & 80 \\ 0 & 4 & 5 & 320 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 185 \\ 0 & 4 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 4 & 240 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 5x + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 60 = 185 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4y + 60 = 80 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = 240 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 10 \\ y = 5 \\ z = 60 \end{array}}$$

Ejercicio 11

Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza, el capitán promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo; el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados. Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo, los restantes reciben un tercio de escudo; y si el primero es sajón, un cuarto de escudo. ¿Cuántos soldados hay en cada compañía?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de suizos”} \\ y &\equiv \text{“Nº de zuavos”} \\ z &\equiv \text{“Nº de sajones”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2} \cdot (y+z) = 901 \\ y + \dfrac{1}{3} \cdot (x+z) = 901 \\ z + \dfrac{1}{4} \cdot (x+y) = 901 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1802 \\ x + 3y + z = 2703 \\ x + y + 4z = 3604 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1802 \\ 1 & 3 & 1 & 2703 \\ 1 & 1 & 4 & 3604 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1802 \\ 0 & 5 & 1 & 3604 \\ 0 & 1 & 7 & 5406 \end{array} \right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 5F_3 - F_2 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1802 \\ 0 & 5 & 1 & 3604 \\ 0 & 0 & 34 & 23426 \end{array} \right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 583 + 689 = 1802 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y + 689 = 3604 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 34z = 23426 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 265 \\ y = 583 \\ z = 689 \end{array}}$$

Ejercicio 12

Si la altura de Carlos aumenta el triple de la diferencia de las alturas de Antonio y Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Antonio equivale a nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Altura de Carlos (cm)”}$$
$$y \equiv \text{“Altura de Antonio (cm)”}$$
$$z \equiv \text{“Altura de Juan (cm)”}$$

$$\begin{cases} x+y+z=515 \\ x+3\cdot(y-z)=z \\ 8y=9x \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=515 \\ x+3y-4z=0 \\ 9x-8y=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 515 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 9 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-9F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 515 \\ 0 & 2 & -5 & -515 \\ 0 & -17 & -9 & -4635 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3+17F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 515 \\ 0 & 2 & -5 & -515 \\ 0 & 0 & -103 & -18025 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+180+175=515 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y-5\cdot 175=-515 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -103z=-18025 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=160 \\ y=180 \\ z=175 \end{array}}$$

Ejercicio 13

Invirtiendo 1 millón de euros en acciones de tipo A y 2 millones en acciones de tipo B, obtendríamos unos intereses totales (anuales) de 280000 euros, y si invertimos 2 millones en A y 1 millón en B obtenemos 260000 euros. ¿Cuáles serían los intereses si se invirtieran 3 millonesen A y 5 millones en B?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Tipo de interés anual de las acciones del tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Tipo de interés anual de las acciones del tipo } B\text{”}$$

Para hallar el sistema de ecuaciones trabajaremos en millones de euros

$$\begin{cases} x + 2y = 0{,}28 \\ 2x + y = 0{,}26 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}28 & 2 \\ 0{,}26 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}24}{-3} = 0{,}08 = 8\,\% \qquad \& \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0{,}28 \\ 2 & 0{,}26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}3}{-3} = 0{,}1 = 10\,\%$$

Así que el interés obtenido al invertir 3 millones de euros en acciones del tipo A y 5 en acciones del tipo B será:

$$0{,}08 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 5 = 0{,}74 \implies 740000 \text{ euros}$$

Ejercicio 14

La suma de las tres cifras de un determinado número es 13. La cifra de las centenas excede en cuatro unidades la de las decenas. Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las centenas el número aumenta en 495 unidades. ¿De qué número se trata?

Solución. Sean las incógnitas: | x | y | z |

$$x \equiv \text{“Cifra de las centenas”}$$
$$y \equiv \text{“Cifra de las decenas”}$$
$$z \equiv \text{“Cifra de las unidades”}$$

$$\begin{cases} x+y+z=13 \\ x=y+4 \\ (100z+10y+x)-(100x+10y+z)=495 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=13 \\ x-y=4 \\ x-z=-5 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & -18 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_2-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+0+9=13 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y-9=-9 \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z=-27 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=4 \\ y=0 \\ z=9 \end{array}}$$

Ejercicio 15

Los estudiantes de cierto curso venden camisetas, gorras y banderines para ayudarse a pagar un viaje. Cada camiseta se vende a 80 euros, cada gorra a 12 euros y cada banderín a 20 euros. Los costes de cada prenda son de 30 euros por camiseta, 2 euros por gorra y 8 euros por banderín. El beneficio neto obtenido es de 6740 euros y el gasto total es de 3460 euros. Sabiendo que se ha vendido un total de 270 unidades en conjunto, calcula cuántas se han vendido de cada clase.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de camisetas vendidas”} \\ y &\equiv \text{“Nº de gorras vendidas”} \\ z &\equiv \text{“Nº de banderines vendidas”} \end{aligned}$$

	Camisetas	Banderines	Banderines
Precio Venta	80	12	20
Coste	30	2	8
Beneficio	50	10	12

$$\begin{cases} x + y + z = 270 \\ 50x + 10y + 12z = 6740 \\ 30x + 2y + 8z = 3460 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 270 \\ 50 & 10 & 12 & 6740 \\ 30 & 2 & 8 & 3460 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 50F_1 \\ F_3 - 30F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 270 \\ 0 & -40 & -38 & -6760 \\ 0 & -28 & -22 & -4640 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 10F_3 - 7F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 270 \\ 0 & -40 & -38 & -6760 \\ 0 & 0 & 46 & 920 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 150 + 20 = 270 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -40y - 38 \cdot 20 = -6760 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 46z = 920 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 100 \\ y = 150 \\ z = 20 \end{array}}$$

Ejercicio 16

En un jardín hay 22 árboles entre naranjos, limoneros y membrillos. El doble del número de limoneros, más el triple del número de membrillos es igual al doble del número de naranjos. Además se sabe que el número de naranjos es el doble del de limoneros, ¿cuántos árboles hay de cada tipo?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“N}^{\underline{o}}\text{ de naranjos”} \\ y &\equiv \text{“N}^{\underline{o}}\text{ de limoneros”} \\ z &\equiv \text{“N}^{\underline{o}}\text{ de membrillos”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=22 \\ 2y+3z=2x \\ x=2y \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=22 \\ 2x-2y-3z=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -4 & -5 & -44 \\ 0 & -3 & -1 & -22 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 4F_3-3F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -4 & -5 & -44 \\ 0 & 0 & 11 & 44 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+6+4=22 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y-5\cdot 4=-44 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 11z=44 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=12 \\ y=6 \\ z=4 \end{array}}$$

Ejercicio 17

Los gastos diarios de tres amigos, Marta, Raúl y Pedro, suman 1545 euros. Si a lo que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtendremos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. Averigua cuál es la cantidad que gasta cada uno.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Gastos de Marta”} \\ y &\equiv \text{“Gastos de Raúl”} \\ z &\equiv \text{“Gastos de Pedro”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1545 \\ x+3\cdot(y-z)=z \\ 8\cdot(y-x)=x \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=1545 \\ x+3y-4z=0 \\ 9x-8y=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1545 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 9 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-9F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1545 \\ 0 & 2 & -5 & -1545 \\ 0 & -17 & -9 & -13905 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3+17F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1545 \\ 0 & 2 & -5 & -1545 \\ 0 & 0 & -103 & -54075 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+540+525=1545 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y-5\cdot 525=-1545 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -103z=-54074 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=480 \\ y=540 \\ z=525 \end{array}}$$

Ejercicio 18

Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6384 euros. El precio original era de 12 euros, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30 % y 40 %. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30 % de descuento.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de videojuegos a precio completo”} \\ y &\equiv \text{“Nº de videojuegos con descuento del 30 \%”} \\ z &\equiv \text{“Nº de videojuegos con descuento del 40 \%”} \end{aligned}$$

El precio con descuento del videojuego será:

- $30\,\% \implies 12 \cdot (1 - 0{,}3) = 8{,}4$ euros
- $40\,\% \implies 12 \cdot (1 - 0{,}4) = 7{,}2$ euros

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 600 \\ 10x + 7y + 6z = 5320 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 10 & 7 & 6 & 5320 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 10F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -3 & -4 & -680 \\ 0 & -3 & -3 & -600 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -3 & -4 & -680 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 120 + 80 = 600 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 4 \cdot 80 = -680 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 80 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 400 \\ y = 120 \\ z = 80 \end{array}}$$

Ejercicio 19

Un cajero automático contiene 95 *billetes de* 10, 20 *y* 50 *euros y un total de* 2000 *euros. Si el número de billetes de* 10 *euros es el doble que el número de billetes de* 20 *euros, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de billetes de 10 euros”} \\ y &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de billetes de 20 euros”} \\ z &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de billetes de 50 euros”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x=2y \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=95 \\ x+2y+5z=200 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 5 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 4 & 105 \\ 0 & -3 & -1 & -95 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3+3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 4 & 105 \\ 0 & 0 & 11 & 220 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+25+20=95 \\ \Rightarrow y+4\cdot 20=105 \\ \Rightarrow 11z=220 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=50 \\ y=25 \\ z=20 \end{array}}$$

Ejercicio 20

Halla un número de tres cifras sabiendo que estas suman 9; que, si del número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.

Solución.

Sean las incógnitas: | x | y | z |

$$x \equiv \text{“Cifra de las centenas”}$$
$$y \equiv \text{“Cifra de las decenas”}$$
$$z \equiv \text{“Cifra de las unidades”}$$

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=198 \\ y=\dfrac{x+z}{z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=9 \\ x-z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3-3F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+3+2=9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y-2\cdot 2=-7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z=12 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}}$$

Ejercicio 21

Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averiguar cuántas monedas había en cada caja.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}} \text{ de monedas de la caja } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}} \text{ de monedas de la caja } B\text{”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}} \text{ de monedas de la caja } C\text{”}$$

$$\begin{cases} x+y+z=36 \\ x=y+z+2 \\ x+1=2\cdot(y-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=36 \\ x-y-z=2 \\ x-2y=-3 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & -3 & -1 & -39 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3-3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+11+6=36 \\ \Rightarrow -2y-2\cdot 6=-34 \\ \Rightarrow 4z=24 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=19 \\ y=11 \\ z=6 \end{array}}$$

Ejercicio 22

Una empresa dispone de 27200 euros para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 euros, para el curso B es de 160 euros y de 200 euros para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº empleados en el curso } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº empleados en el curso } B\text{”}$$
$$z \equiv \text{“Nº empleados en el curso } C\text{”}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 400x + 160y + 200z = 27200 \\ 400x = 5 \cdot 160y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 10 & 4 & 5 & 680 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 10F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -6 & -5 & -320 \\ 0 & -3 & -1 & -100 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -6 & -5 & -320 \\ 0 & 0 & 3 & 120 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 20 + 40 = 100 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -6y - 5 \cdot 40 = -320 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = 120 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 40 \end{array}}$$

Ejercicio 23

La edad de un padre es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años. ¿Qué edad tenía el padre cuando nacieron sus hijos?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Edad del padre"} \\ y &\equiv \text{"Edad del hijo mayor"} \\ z &\equiv \text{"Edad del hijo menor"} \end{aligned}$$

	Edad actual	Hace y-z años	Dentro de y+z años
Padre	x	$x-(y-z)=x-y+z$	$x+(y+z)=x+y+z$
Hijo mayor	y	$y-(y-z)=z$	$y+(y+z)=2y+z$
Hijo menor	z	$z-(y-z)=2z-y$	$z+(y+z)=y+2z$

$$\begin{cases} x=2\cdot(y+z) \\ x-y+z=3\cdot(z+2z-y) \\ (x+y+z)+(2y+z)+(y+2z)=150 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-2y-2z=0 \\ x+2y-8z=0 \\ x+4y+4z=150 \end{cases}$$

$$A/A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 150 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 150 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3-3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x-2\cdot 15-2\cdot 10=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4y-6\cdot 10=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 30z=300 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=50 \\ y=15 \\ z=10 \end{array}}$$

Ejercicio 24

Una tienda ha vendido 330 discos compactos de música clásica, rock y cantautores por un importe total de 7400 euros. El precio de un disco compacto de música clásica es 25 euros, y los de grupos de rock y cantautores un 15 % y un 20 % más baratos que los de música clásica, respectivamente. También se sabe que se ha vendido una cantidad de compactos de cantautores que es igual a los dos tercios del número de compactos de rock vendidos. Averigua cuántos discos compactos se han vendido de cada clase.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº discos de música clásica”} \\ y &\equiv \text{“Nº discos de música rock”} \\ z &\equiv \text{“Nº discos de música de cantautores”} \end{aligned}$$

Los precios de cada uno de los discos son:

- Música clásica 25€
- Música rock $25 \cdot (1 - 0{,}15) = 21{,}25$€
- Música de cantautores $25 \cdot (1 - 0{,}20) = 20$€

$$\begin{cases} x + y + z = 330 \\ 25x + 21{,}25y + 20z = 7400 \\ z = \dfrac{2}{3}y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 330 \\ 25x + 21{,}25y + 20z = 7400 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 330 \\ 25 & 21{,}25 & 20 & 7400 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 25F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 330 \\ 0 & -3{,}75 & -5 & -850 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3{,}75F_3 + 2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 330 \\ 0 & -3{,}75 & -5 & -850 \\ 0 & 0 & -21{,}25 & -1700 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 120 + 80 = 330 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3{,}75y - 5 \cdot 80 = -850 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -21{,}25z = -1700 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 130 \\ y = 120 \\ z = 80 \end{array}}$$

Ejercicio 25

Un autobús de la Universidad transporta en hora punta 80 viajeros de tres tipos:

- *Viajeros que pagan el billete entero, que vale 0,75 euros.*
- *Viajeros con bono de descuento del 20 %.*
- *Estudiantes con bono del 40 % de descuento.*

La recaudación del autobús en ese viaje fue de 39,75 euros.
Calcula el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes es el triple que el número del resto de viajeros.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de viajeros sin descuento”} \\ y &\equiv \text{“Nº de viajeros con bono”} \\ z &\equiv \text{“Nº de estudiantes”} \end{aligned}$$

Los precios que pagarán cada uno serán:

- Viajeros sin descuento: 0,75 euros
- Viajeros con bono: $0{,}75 \cdot (1 - 0{,}2) = 0{,}6$
- Estudiantes: $0{,}75 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}45$

$$\begin{cases} x + y + z = 80 \\ 0{,}75x + 0{,}6y + 0{,}45z = 39{,}75 \\ z = 3 \cdot (x + y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 80 \\ 15x + 12y + 9z = 795 \\ 3x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 15 & 12 & 9 & 795 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 15F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & -3 & -6 & -405 \\ 0 & 0 & -4 & -240 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 15 + 60 = 80 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 6 \cdot 60 = -405 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z = -240 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 5 \\ y = 15 \\ z = 60 \end{array}}$$

Ejercicio 26

De la edad de tres hermanos, Ana, Jesús y Fernando, se sabe que: el doble de la edad de Ana más el triple de la edad de Jesús es tres años superior a cuatro veces la edad de Fernando; el triple de la edad de Fernando menos el doble de la edad de Jesús es siete años inferior al doble de la edad de Ana; y el doble de la edad de Ana más el doble de la edad de Fernando es tres años inferior a cinco veces la edad de Jesús. Calcular la edad de cada uno de los hermanos.

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Edad de Ana”} \\ y &\equiv \text{“Edad de Jesús”} \\ z &\equiv \text{“Edad de Fernando”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4z + 3 \\ 3z - 2y + 7 = 2x \\ 2x + 2z + 3 = 5y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = 7 \\ 2x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 8F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -38 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 3 \cdot 15 - 4 \cdot 19 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + 19 = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -38 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 17 \\ y = 15 \\ z = 19 \end{array}}$$

Ejercicio 27

El lunes de una cierta semana, los artículos A, B y C de unos grandes almacenes se rebajan un 5 %, un 6 % y un 8 % respectivamente. El martes, en cambio, se rebajan un 2 %, un 8 % y un 6 % sobre el precio inicial. Finalmente, el viernes se rebajan un 4 %, un 7 % y un 6 % sobre el precio inicial. Si se sabe que un cliente que compra una unidad de cada uno de dichos artículos cada uno de estos días, se ahorra 210 euros el lunes, 210 el martes y 210 el viernes, ¿cuál es el precio por unidad de dichos artículos?

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Precio del artículo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Precio del artículo } B\text{”}$$
$$z \equiv \text{“Precio del artículo } C\text{”}$$

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}6y + 0{,}8z = 210 \\ 0{,}2x + 0{,}8y + 0{,}6z = 210 \\ 0{,}4x + 0{,}7y + 0{,}6z = 210 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 6y + 8z = 2100 \\ x + 4y + 3z = 1050 \\ 4x + 7y + 6z = 2100 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 8 & 2100 \\ 1 & 4 & 3 & 1050 \\ 4 & 7 & 6 & 2100 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 5F_2 - F_1 \\ 5F_3 - 4F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 8 & 2100 \\ 0 & 14 & 7 & 3150 \\ 0 & 11 & -2 & 2100 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 14F_3 - 11F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 8 & 2100 \\ 0 & 14 & 7 & 3150 \\ 0 & 0 & -105 & -5250 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lc} \Rightarrow 5x + 6 \cdot 200 + 8 \cdot 50 = 2100 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 14y + 7 \cdot 50 = 3150 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -105z = -5250 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 100 \\ y = 200 \\ z = 50 \end{array}}$$

$\boxed{\textbf{Matemáticas CCSS}}$

Ejercicio 28 (3 *puntos*)

Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 *euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a* 1,5 *euros, y un dólar es igual a* 1,1 *euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2000 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Cantidad de euros"} \\ y &\equiv \text{"Cantidad de dólares"} \\ z &\equiv \text{"Cantidad de libras esterlinas"} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + 1{,}1y + 1{,}5z = 264000 \\ x = 2{,}2y \\ 1{,}5z = \dfrac{x}{10} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10x + 11y + 15z = 2640000 \\ 10x - 22y = 0 \\ x - 15z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 11 & 15 & 2640000 \\ 10 & -22 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ 10F_3 - F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 11 & 15 & 2640000 \\ 0 & -33 & -15 & -2640000 \\ 0 & -11 & -165 & -2640000 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 3F_3 - F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 11 & 15 & 2640000 \\ 0 & -33 & -15 & -2640000 \\ 0 & 0 & -480 & -5280000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 10x + 11 \cdot 75000 + 15 \cdot 11000 = 2640000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -33y - 15 \cdot 11000 = -2640000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -480z = -5280000 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 165000 \text{ euros} \\ y = 75000 \text{ dólares} \\ z = 11000 \text{ libras} \end{array}}$$

Ejercicio 29 (3 *puntos*)

Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4 % en un cierto producto A, un 6 % en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8 % sobre el precio inicial de A, un 10 % sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C.
Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 19 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.
Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2001 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

	A	B	C
Sin Oferta	x	y	z
1ª Oferta	$0{,}96x$	$0{,}94y$	$0{,}95z$
2ª Oferta	$0{,}92x$	$0{,}90y$	$0{,}94z$

$$\begin{cases} x+y+z=135 \\ 0{,}96x+1{,}88y+2{,}85z=x+2y+3z-16 \\ 2{,}76x+0{,}90y+4{,}70z=3x+y+5z-29 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=135 \\ 4x+12y+15z=1600 \\ 12x+5y+15z=1450 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 4 & 12 & 15 & 1600 \\ 12 & 5 & 15 & 1450 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-4F_1 \\ F_3-12F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & 8 & 11 & 1060 \\ 0 & -7 & 3 & -170 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 8F_3+7F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & 8 & 11 & 1060 \\ 0 & 0 & 101 & 6060 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+50+60=135 \\ \Rightarrow 8y+11\cdot 60=1060 \\ \Rightarrow 101z=6060 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=25 \\ y=50 \\ z=60 \end{array}}$$

Ejercicio 30 (3 *puntos*)

Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2008 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Superficie dedicada a barbecho (Ha.)”}$$
$$y \equiv \text{“Superficie dedicada a cultivo de trigo (Ha.)”}$$
$$z \equiv \text{“Superficie dedicada a cultivo de cebada (Ha.)”}$$

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ y=z+2 \\ x+6=y+z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=10 \\ y-z=2 \\ x-y-z=-6 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -16 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+5+3=10 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y-3=2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z=-12 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=2 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}}$$

Ejercicio 31 (3 *puntos*)

Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2008 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\underline{o}} \text{ de casas de tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\underline{o}} \text{ de casas de tipo } B\text{”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\underline{o}} \text{ de casas de tipo } C\text{”}$$

	A	B	C	Totales
albañilería	10	15	20	270
fontanería	2	4	6	68
electricidad	2	3	5	58

$$\begin{cases} 10x + 15y + 20z = 270 \\ 2x + 4y + 6z = 68 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 54 \\ x + 2y + 3z = 34 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 54 \\ 1 & 2 & 3 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 58 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 54 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 54 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 2 \cdot 4 = 14 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 10 \\ y = 6 \\ z = 4 \end{array}}$$

Ejercicio 32 (3 *puntos*)

Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando para ello un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta 50 euros y el de un edredón 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado e hoter?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2009 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“N° de almohadas”} \\ y &\equiv \text{“N° de mantas”} \\ z &\equiv \text{“N° de edredones”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ 16x+50y+80z=7500 \\ x=y+z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=200 \\ 8x+25y+40z=3750 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 8 & 25 & 40 & 3750 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-8F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 17 & 32 & 2150 \\ 0 & -2 & -2 & -200 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 17F_3+2F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 17 & 32 & 2150 \\ 0 & 0 & 30 & 900 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+70+30=200 \\ \Rightarrow 17y+32\cdot 30=2150 \\ \Rightarrow 30z=900 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=100 \\ y=70 \\ z=30 \end{array}}$$

Ejercicio 33 (3 *puntos*)

Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2011 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Precio de la mochila”} \\ y &\equiv \text{“Precio del bolígrafo”} \\ z &\equiv \text{“Precio del libro”} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{7}=8 \\ x=y+z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=48 \\ 7x+14y+6z=336 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 7 & 14 & 6 & 336 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-7F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -48 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 7F_3+2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -336 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+3+21=48 \\ \Rightarrow 7y-21=0 \\ \Rightarrow -16z=-336 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=24 \\ y=3 \\ z=21 \end{array}}$$

Ejercicio 34 (3 *puntos*)

Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de socios del equipo } A\text{”} \\ y &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de socios del equipo } B\text{”} \\ z &\equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de espectadores que no son socios} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z=72000 \\ \dfrac{x+y}{13}=\dfrac{z}{3} \\ x+6500=y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=72000 \\ 3x+3y-13z=0 \\ x-y=-6500 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 3 & 3 & -13 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -6500 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_3-3F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0 & 0 & -16 & -216000 \\ 0 & -2 & -1 & -78500 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0 & -2 & -1 & -78500 \\ 0 & 0 & -16 & -216000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+32500+13500=72000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y-13500=-78500 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -16z=-216000 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=26000 \\ y=32500 \\ z=13500 \end{array}}$$

Ejercicio 35 (3 *puntos*)

> *Hemos ido tres días seguidos al bar de la Universidad. El primer día tomamos 3 cafés, 2 refrescos de cola y 3 batidos de cacao, el precio fue de 7 euros. El segundo día tomamos 1 café, 2 refrescos de cola y 2 batidos de cacao, el precio total fue de 5 euros. Por último, el tercer día tomamos 2 cafés y un batido de cacao, el precio fue de 2 euros.*
> *Justifíquese razonadamente si con estos datos podemos determinar o no el precio de un café, de un refresco de cola y de un batido de cacao, suponiendo que estos precios no han variado en los tres días.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Precio de un café (€)”}$$
$$y \equiv \text{“Precio de un refresco de cola (€)”}$$
$$z \equiv \text{“Precio de un batido de cacao (€)”}$$

	cafés	colas	batidos	precio
1º día	3	2	3	7
2º día	1	2	2	5
3º día	2	0	1	2

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3 y como \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$$

$$\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incógnitas} \xrightarrow{Th.\ Rouche} \text{Sistema Compatible}$$

$$\text{Indetermindado (Infinitas soluciones)}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & -3 & -8 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & -3 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 3x + 2 \cdot \left(2 - \frac{3\lambda}{4}\right) + 3\lambda = 7 \\ \Rightarrow 4y + 3\lambda = 8 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 - \lambda/2 \\ y = 2 - 3\lambda/4 \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 36 (2 *puntos*)

Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de juguetes de 1 €”} \\ y &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de juguetes de 2 €”} \\ z &\equiv \text{++N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de juguetes de 5 €”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{5} = y \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{x}{3} \\ x + 2y + 5z = 228 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 228 \\ 5y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -456 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 5F_3 + 7F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -57 & -2280 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 40 = 228 \\ \Rightarrow 5y - 40 = 0 \\ \Rightarrow -57z = -2280 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 12 \\ y = 8 \\ z = 40 \end{array}}$$

Matemáticas II

Ejercicio 37 (2 *puntos*)

Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2002 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Edad de la madre"} \\ y &\equiv \text{"Edad del hijo mayor"} \\ z &\equiv \text{"Edad del hijo menor"} \end{aligned}$$

Rellenamos la tabla de las edades teniendo en cuenta que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre habrán pasado $x - y$ años.

	Edad hoy	Hace 14 años	Dentro de 10 años	Dentro de $x - y$ años
Madre	x	$x - 14$	$x + 10$	$x + (x - y) = 2x - y$
Hijo mayor	y	$y - 14$	$y + 10$	$y + (x - y) = x$
Hijo menor	z	$z - 14$	$z + 10$	$z + (x - y) = x - y + z$

$$\begin{cases} x - 14 = 5 \cdot (y - 14 + z - 14) \\ x + 10 = y + 10 + z + 10 \\ x - y + z = 42 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 5y - 5z = -126 \\ x - y - z = 10 \\ x - y + z = 42 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 4 & 6 & 168 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 5 \cdot 18 - 5 \cdot 16 = 126 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4y + 4 \cdot 16 = 136 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 32 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 44 \\ y = 18 \\ z = 16 \end{array}}$$

Ejercicio 38 (2 *puntos*)

Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7000 euros. Se pide:

a) *(1.5 puntos) Hallar el precio de cada billete.*

b) *(0.5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 % el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2003 - Opción B)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Precio del billete a destinos nacionales"}$$
$$y \equiv \text{"Precio del billete a destinos europeos comunitarios"}$$
$$z \equiv \text{"Precio del billete a destinos europeos no comunitarios"}$$

$$\begin{cases} 10x + 10y + 10z = 12000 \\ 10x + 20z = 13000 \\ 10x + 10y = 7000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1200 \\ x + z = 1300 \\ x + y = 700 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 1 & 0 & 2 & 1300 \\ 1 & 1 & 0 & 700 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & -1 & -500 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow x + 400 + 500 = 1200 & \Rightarrow & x = 300 \\ \Rightarrow -y + 500 = 100 & \Rightarrow & y = 400 \\ \Rightarrow -z = -500 & \Rightarrow & z = 500 \end{array}$$

b) Si el precio de los billetes nacionales baja un 20 % dejaría de ingresar $0{,}2 \cdot 300 = 60$ euros por cada billete que venda. Entre las tres agencias vende 30 billetes, lo que supone una pérdida de $30 \cdot 60 = 1800$ euros que tendrá que compensar con la subida del precio de los billetes europeos comunitarios. Como de este tipo vende en total 20 billetes debe subir cada uno $1800/20 = 90$ euros, lo que supone una subida del:

$$400 \cdot (1 + i) = 490 \Longrightarrow i = 0{,}225 \Longrightarrow 22{,}5\,\%$$

Ejercicio 39 (2 *puntos*)

El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, *de* 20 *y de* 10 *euros. Los viernes depositan en el cajero* 225 *billetes por un importe total de* 7000 *euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de* 50 *y de* 10 *euros es el doble que el número de billetes de* 20 *euros.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2008 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"N}^{\text{o}} \text{ de billetes de 50 euros"}$$
$$y \equiv \text{"N}^{\text{o}} \text{ de billetes de 20 euros"}$$
$$z \equiv \text{"N}^{\text{o}} \text{ de billetes de 10 euros"}$$

$$\begin{cases} x+y+z=225 \\ 50x+20y+10z=7000 \\ x+z=2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=225 \\ 5x+2y+z=700 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 5 & 2 & 1 & 700 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-5F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -3 & -4 & -425 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -3 & -4 & -425 \\ 0 & 0 & 4 & 200 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+75+50=225 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y-4\cdot 50=-425 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 40z=20 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=100 \\ y=75 \\ z=50 \end{array}}$$

Ejercicio 40 (2 *puntos*)

Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide:

a) (1 punto) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Precio de un cuaderno"}$$
$$y \equiv \text{"Precio de un rotulador"}$$
$$z \equiv \text{"Precio de un bolígrafo"}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + y + 6z = 14 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 6 & 14 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 5F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 2 & 3 & 22 \\ 0 & 1 & 24 & 26 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 5x + 2 \cdot (26 - 24\lambda) + 3\lambda = 22 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 24\lambda = 26 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -6 + 9\lambda \\ y = 26 - 24\lambda \\ z = \lambda \end{array}}$$

b) $8x + 3y = 8 \cdot (-6 + 9\lambda) + 3 \cdot (26 - 24\lambda) = 30$ euros

Ejercicio 41 (2 *puntos*)

> *Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)*

Solución.

Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Nº becas a estudiantes de grado universitario"
$y \equiv$ "Nº becas a estudiantes de formación profesional"
$z \equiv$ "Nº becas a estudiantes de postgrado"

El sistema de ecuaciones será:

$$\begin{cases} x+y+z=115 \\ 3000x+2000y+1500z=247000 \\ y=2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=115 \\ 6x+4y+3z=494 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 6 & 4 & 3 & 494 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-6F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 0 & -7 & -196 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+56+28=115 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y-3\cdot 28=-196 & \Rightarrow \\ -7z=-196 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=31 \\ y=56 \\ z=28 \end{array}}$$

Ejercicio 42 (2 *puntos*)

> *A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción B)*

Solución.

Sean las incógnitas

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Nº de rosas de cada ramo"} \\ y &\equiv \text{"Nº de tulipanes de cada ramo"} \\ z &\equiv \text{"Nº de lilas de cada ramo"} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x = 2 \cdot (y + z) \\ 5 \cdot (6x + 4y + 3z) = 610 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 6x + 4y + 3z = 122 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 122 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 6F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -3 & -3 & -24 \\ 0 & -2 & -3 & -22 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 - 2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -3 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \ x + 2 + 6 = 24 \\ \Rightarrow \ -3y - 3 \cdot 6 = -24 \\ \Rightarrow \ -3z = -18 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 16 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{array}}$$

Ejercicio 43 (2 *puntos*)

> *En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del $60\,\%$, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del $75\,\%$, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del $50\,\%$. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Precio del artículo } A \text{ (€)"} \\ y &\equiv \text{"Precio del artículo } B \text{ (€)"} \\ z &\equiv \text{"Precio del artículo } C \text{ (€)"} \end{aligned}$$

Los precios de la segunda unidad de cada producto serán:

$$\begin{cases} \text{A tiene un descuento del } 60\,\% & \rightarrow\ x\cdot(1-0{,}6)=0{,}4x \\ \text{B tiene un descuento del } 75\,\% & \rightarrow\ x\cdot(1-0{,}75)=0{,}25y \\ \text{C tiene un descuento del } 50\,\% & \rightarrow\ x\cdot(1-0{,}5)=0{,}5z \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=26 \\ 1{,}4x+1{,}25y+1{,}5z=35{,}2 \\ 1{,}25y+z=y+1{,}5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=26 \\ 140x+125y+150z=3520 \\ 0{,}25y-0{,}5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=26 \\ 28x+25y+30z=704 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 28 & 25 & 30 & 704 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-28F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -3 & 2 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3+F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -3 & 2 & -24 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad x+12+6=26 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -3y+2\cdot 6=-24 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -4z=-24 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=8 \\ y=12 \\ z=6 \end{array}}$$

Ejercicio 44 (2 *puntos*)

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro(%)	Plata(%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos con una proporción del 72 % de oro y na proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

El lingote tendrá $0{,}72 \cdot 25 = 18$ gramos de oro y $0{,}16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata. Teniendo en cuenta las proporciones de la tabla escribimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x + 0{,}75y + 0{,}6z = 18 \\ 0{,}15y + 0{,}22z = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 25 \\ 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \end{cases}$$

$$A \mid A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 20 & 15 & 12 & 360 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 20F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -5 & -8 & -140 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -5 & -8 & -140 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 12 + 10 = 25 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 8 \cdot 10 = -140 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -20 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 3 \\ y = 12 \\ z = 10 \end{array}}$$

Ejercicio 45 (2,5 *puntos*)

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 *euros diarios en Francia,* 25 *euros diarios en Alemania y* 30 *euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado:* 20 *euros diarios en Francia,* 15 *euros diarios en Alemania y* 25 *euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado* 8 *euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido* 765 *euros por persona, que ha durado* 15 *días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)

Solución. Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Número de días de estancia en Francia"}$$
$$y \equiv \text{"Número de días de estancia en Alemania"}$$
$$z \equiv \text{"Número de días de estancia en Suiza"}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x=2z \\ x\cdot(20+20)+y\cdot(25+15)+z\cdot(30+25)+8\cdot 15=765 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=15 \\ x-2z=0 \\ 8x+8y+11z=129 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & 11 & 129 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-8F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+6+3=15 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y-3\cdot 3=-15 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z=9 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=6 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}}$$

— ∘ —

Ejercicio 46 (2,5 *puntos*)

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Precio de un bocadillo (€)"} \\ y &\equiv \text{"Precio de un refresco (€)"} \\ z &\equiv \text{"Precio de una bolsa de patatas (€)"} \end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y={}^{3}/_{0,6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+2=5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y+1=-1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z=1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}}$$

Ejercicio 47 (2,5 *puntos*)

La aerolínea Air, para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) (0.25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

b) (2.25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"N}^{\text{o}} \text{ de billetes vendidos de la clase (P)"} \\ y &\equiv \text{"N}^{\text{o}} \text{ de billetes vendidos de la clase (T)"} \\ z &\equiv \text{"N}^{\text{o}} \text{ de billetes vendidos de la clase (E)"} \end{aligned}$$

a) Número de plazas vendidas $= 0{,}9 \cdot (12 + 36 + 72) = 108$

b) Escribimos el sistema de ecuaciones teniendo en cuenta que se han vendido 108 plazas, que la recaudación ha sido de 13800€ y que se han vendido el triple de (T) que de (P).

$$\begin{cases} x + y + z = 108 \\ 250x + 150y + 100z = 13800 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$A \mid A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 250 & 150 & 100 & 13800 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \frac{1}{50}F_2 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 5 & 3 & 2 & 276 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \\ 0 & 0 & 3 & 204 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 30 + 68 = 108 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 3 \cdot 68 = -264 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = 204 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 10 \\ y = 30 \\ z = 68 \end{array}}$$

Ejercicio 48 (2,5 *puntos*)

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determínese cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	*Nitrógeno*	*Oxígeno*	*Argón*
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a)

$$\ell \text{ nitrógeno} = 0{,}78 \cdot 2000 = 1560$$
$$\ell \text{ oxígeno} = 0{,}21 \cdot 2000 = 420$$
$$\ell \text{ argón} = 0{,}01 \cdot 2000 = 20$$

b) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{Litros de de la mezcla A}$$
$$y \equiv \text{Litros de de la mezcla B}$$
$$z \equiv \text{Litros de de la mezcla C}$$

Para determinar el sistema de ecuaciones vamos a decir que la cantidad de cada uno de los gases ha de ser la obtenida en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}8x + 0{,}7y + 0{,}6z = 1560 \\ 0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}4z = 420 \\ 0{,}1y = 20 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 2y + 4z = 4200 \\ y = 200 \\ 8x + 7y + 6z = 15600 \end{array}\right\}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 8 & 7 & 6 & 15600 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & -1 & -10 & -1200 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & -10 & -1000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 2 \cdot 200 + 4 \cdot 100 = 4200 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 200 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -10z = -1000 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}}$$

w

Ejercicio 49 (2,5 *puntos*)

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 *millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de* 13740 *toneladas de doradas y* 23440 *toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron* 7400 *toneladas por un valor de* 63,6 *millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue* 11 *céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Precio del kilo de dorada (euros)"} \\ y &\equiv \text{"Precio del kilo de lubina (euros)"} \\ z &\equiv \text{"Precio del kilo de rodaballo (euros)"} \end{aligned}$$

Escribimos las ecuaciones, teniendo en cuenta que expresamos las cantidades en miles de kilos y el precio en miles de euros.

$$\begin{cases} 13740x + 23440y + 7400z = 275800 \\ x = y + 0{,}11 \\ 7400z = 63600 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 13740 & 23440 & 7400 & 275800 \\ 1 & -1 & 0 & 0{,}11 \\ 0 & 0 & 7400 & 63600 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13740 & 23440 & 7400 & 275800 \\ 0 & -37180 & -7400 & -274288{,}6 \\ 0 & 0 & 7400 & 63600 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 13740x + 23440 \cdot 5{,}6667 + 7400 \cdot 8{,}5946 = 275800 && \Rightarrow && x = 5{,}7767 \\ &\Rightarrow -37180y - 7400 \cdot 8{,}5946 = -274288{,}6 && \Rightarrow && y = 5{,}6667 \\ &\Rightarrow 7400z = 63600 && \Rightarrow && z = 8{,}5946 \end{aligned}$$

Ejercicio 50 (2,5 *puntos*)

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Calcularemos los precios de cada una de las acciones que llamaremos a, b y c.

$$b = 1 \qquad \& \qquad a = 3b \implies a = 3 \qquad \& \qquad a = \frac{c}{2} \implies c = 6$$

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"N}^{\text{o}}\text{ de acciones de la empresa A"} \\ y &\equiv \text{"N}^{\text{o}}\text{ de acciones de la empresa B"} \\ z &\equiv \text{"N}^{\text{o}}\text{ de acciones de la empresa C"} \end{aligned}$$

Escribimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ z = \frac{y}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 6 & 1560 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -2 & 3 & -60 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -2 & 3 & -60 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 120 + 60 = 540 \\ \Rightarrow -2y + 3 \cdot 60 = -60 \\ \Rightarrow -z = -60 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 360 \\ y = 120 \\ z = 60 \end{array}}$$

Para obtener un reparto equitativo de las acciones daremos un tercio a cada hermano, es decir: 120 acciones de A, 40 acciones de B y 20 de C.

Ejercicio 51 (2,5 *puntos*)

Una tienda online *de productos* gourmet *elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a* 7,85 *euros/kg), el Paradiso (a* 13,3 *euros/kg) y el Cremissimo (a* 24,85 *euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un* 90 % *de grano tipo Arábica, el Paradiso un* 85 % *y el Cremissimo un* 80 %.
A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27,1 *kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de* 3112,5 *euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Kg de café Gold Cuvée"}$$
$$y \equiv \text{"Kg de café Paradiso"}$$
$$z \equiv \text{"Kg de café Cremissimo"}$$

Del enunciado tenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}15y + 0{,}2z = 27{,}1 \\ 7{,}85x + 13{,}3y + 24{,}85z = 3112{,}5 \\ z = 2 \cdot (x+y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 542 \\ 157x + 266y + 497z = 62250 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 542 \\ 157 & 266 & 497 & 62250 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - 157F_1 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 542 \\ 0 & 61 & 366 & 39406 \\ 0 & -1 & -5 & -542 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \\ \\ 61F_3 + F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 542 \\ 0 & 61 & 366 & 39406 \\ 0 & 0 & 61 & 6344 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 3\cdot 22 + 4 \cdot 104 = 542 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 61y + 366 \cdot 104 = 39406 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 61z = 6344 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 30 \\ y = 22 \\ z = 104 \end{array}}$$

Los kg de grano tipo Arabica utilizados serán:

$$0{,}9x + 0{,}85y + 0{,}8z = 0{,}9 \cdot 30 + 0{,}85 \cdot 22 + 0{,}8 \cdot 104 = 128{,}9\ kg$$

Ejercicio 52 (2,5 *puntos*)

> *Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de* 15000 *seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el* 25 % *de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2021 - Opción A)*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Nº de seguidores de Sara"} \\ y &\equiv \text{"Nº de seguidores de Cristina"} \\ z &\equiv \text{"Nº de seguidores de Jimena"} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=15000 \\ 0{,}75z=3x \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=15000 \\ 12x-3z=0 \\ 10x+4y-5z=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 15000 \\ 12 & 0 & -3 & 0 \\ 10 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-12F_1 \\ F_3-10F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 15000 \\ 0 & -12 & -15 & -180000 \\ 0 & -6 & -15 & -150000 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3-F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 15000 \\ 0 & -12 & -15 & -180000 \\ 0 & 0 & -15 & -120000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+5000+8000=15000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -12y-15\cdot 8000=-180000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -15z=-120000 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=2000 \\ y=5000 \\ z=8000 \end{array}}$$

Ejercicio 53 (2,5 *puntos*)

En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Nº de alumnos matriculados en **inglés**"
$y \equiv$ "Nº de alumnos matriculados en **francés**"
$z \equiv$ "Nº de alumnos matriculados en **alemán**"

$$\begin{cases} x = 0{,}6 \cdot (x+y+z) \\ y - 10 = z + 10 \\ \dfrac{x}{4} = 2 \cdot (y-z) + 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ y - z = 20 \\ x - 8y + 8z = 32 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 1 & -8 & 8 & 32 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & -13 & 19 & 64 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 13F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 324 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 3\cdot 74 - 3\cdot 54 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 54 = 20 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 324 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 192 \\ y = 74 \\ z = 54 \end{array}}$$