MATEMATICAS II

DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

https://aprendeconmigomelon.com

25 de noviembre de 2021

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones entresacados de los exámenes de la EVAU de la Comunidad de Madrid. La discusión de los sistemas de ecuaciones los he resuelto por el método de Rouché y por el de Gauss, pero te recomiendo que tú los hagas por el método de Rouché pues en ocasiones el de Gauss se complica mucho y tienes peligro de llegar a resultados erróneos si no lo haces con cuidado. Espero que te sea de utilidad.

Índice general

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+(4+m-m^2)z=3 \\ 2x+4y+3\cdot(m+2)z=8 \end{cases}$$

se pide:

a) *(2 puntos) Discutir el sistema según los valores de m.*

b) *(1 punto) Resolverlo para $m=-2$.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2013 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3 \\ 2 & 4 & 3\cdot(m+2) & 8 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -m = 0 \implies m = 0$$

- Si $m \neq 0$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $m = 2$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\cdot 3 - 1 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 3\cdot(-1) = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores de a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 4$.

c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2013 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \implies a = \{-1, 2\}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 4$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 4F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 9F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 4x + 7 + 5 \cdot (-3) = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 9y - (-3) = 12 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 10z = -30 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 7 \cdot (-2 - \lambda) + 5\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 3\lambda = 6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 7 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 3 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - 3z = 2\lambda \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutirlo según los valores de λ.

b) (1.5 puntos) Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2013 - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & -3 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 5\lambda + 15 = 0 \implies \lambda = -3$$

- Si $\lambda \neq -3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $\lambda = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE (($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $\lambda \neq -3$ por el método de Gauss. Para resolver un sistema con un parámetro es interesante situar éste lo más a la derecha y abajo posible, tenendo en cuenta que si intercambiamos columnas estaremos intercambiando las incóginitas.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & -3 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} C_1 \leftrightarrow C_3 \\ F_1 \leftrightarrow F_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & \lambda & 2\lambda \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3+\lambda & 3+2\lambda \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow z + 0 + \frac{3+2\lambda}{3+\lambda} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow (3+\lambda)x = 3 + 2\lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} z = \dfrac{-\lambda}{\lambda+3} \\ y = 0 \qquad\qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{3+2\lambda}{3+\lambda} \end{array}}$$

Otra opción menos creativa pero creo que má susceptible al error es resolverlo por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10\lambda + 15}{5\lambda + 15} = \frac{2\lambda + 3}{\lambda + 3} \quad \& \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{5\lambda + 15} = 0$$

$$z == \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5\lambda}{5\lambda + 15} = \frac{-\lambda}{\lambda + 3}$$

———— ∘ ————

Ejercicio 4 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.

c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2013 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & \lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & -2\lambda \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0 \implies \lambda = \{-1, 2\}$$

- Si $\lambda \neq \{-1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $\lambda = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $\lambda = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $|A_{ij}| = 0 \ \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \implies \operatorname{ran}(A) = 1$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 1 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 2 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 2 + 2 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 2 = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - \frac{2+3\lambda}{3} - \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y - 3\lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{4 + 3\lambda}{3} \\ y = \dfrac{2 + 3\lambda}{3} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 3x + 2y + az = 0 \\ 7x + 9y + 9z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2013 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 0 \\ 7 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 7a^2 - 36a + 5 = 0 \implies a = \{1/7, 5\}$$

Se trata de un sistema homogéneo, lo que nos garantiza que sea compatible.

- Si $a \neq \{1/7, 5\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución trivial $x = y = z = 0$).
- Si $a = \{1/7, 5\}$ $\quad \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 5$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 7 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 7F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & 8 & 0 \\ 0 & -26 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 5 \cdot \frac{8\lambda}{13} - \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -13y + 8\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\dfrac{27\lambda}{13} \\ y = \dfrac{8\lambda}{13} \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}(a+2)x+(a+1)y=-6\\ x+5y=a\\ x+y=-5\end{cases}$$

se pide:

a) *(1.5 puntos) Discutir el sistema según los valores de a.*

b) *(0.5 puntos) Resolverlo cuando sea posible.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & a+1 & -6 \\ 1 & 5 & a \\ 1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz ampliada A^*.

$$|A^*| = -21a - 21 = 0 \implies a = -1$$

- Si $a \neq -1 \quad |A^*| \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3 \neq \text{ran}(A) = 2 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ Solución).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{array}\right)$

  $|A^*| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única)

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ sabiendo que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x = -6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -6+5y = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -6 \\ y = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 7 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = a \\ x + y - z = 3a^2 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea posible.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2014 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 3a^2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 3a^2 \end{vmatrix} = 3a^2 - 2a - 1 = 0 \implies a = \{-1/3, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1/3, 1\}$ $\quad |A^*| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3 \neq \operatorname{ran}(A) = 2 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ Solución).

- Si $a = \{-1/3, 1\}$ $\quad |A^*| = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2 = \operatorname{ran}(A) \neq$ nº incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = \{-1/3, 1\}$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

b-I) $a = -1/3$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - \lambda = -\frac{1}{3} & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \lambda - \frac{1}{3} \;, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

b-II) $a = 1$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - (1+\lambda) + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \\ mx + my = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutirlo según los valores de m.

b) (0.5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ m & m & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \implies m = \{-1, 1\}$$

- Si $m \neq \{-1, 1\}$ $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Determinado (Solución única)$\xRightarrow[homogeneo]{Sistema}$ $x = 0 \quad \& \quad y = 0$

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \end{array}\right)$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Determinado (Solución única)$\xRightarrow[homogeneo]{Sistema}$ $x = 0 \quad \& \quad y = 0$

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \end{array}\right)$

  $\text{ran}(A) = 1 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} = 2 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda \qquad\quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 9 (3 *puntos*)

a) (2 puntos) Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & m-1 & 0 \\ 1 & -2 & m & 1 \\ 5 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3m^2 + 24m - 21 = 0 \implies m = \{1, 7\}$$

- Si $a \neq \{1, 7\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & ,2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $m = 7 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 4F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 4x + 3 \cdot \frac{4\lambda - 4}{11} = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -11y + 4\lambda = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{3 - 3\lambda}{11} \\ y = \dfrac{4\lambda - 4}{11} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 10 (3 *puntos*)

a) *(2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + my = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

en función del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

b) *(1 punto) Encontrar el valor o valores de h que hacen incompatible el sistema*

$$\begin{cases} x - y + kz = 2 \\ kx - ky + 4z = -4 \end{cases}$$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & m & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz ampliada A^*.

$$|A^*| = 3m + 12 = 0 \implies m = -4$$

- Si $m \neq -4 \quad |A^*| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3 \neq \operatorname{ran}(A) \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución).

- Si $m = -4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$

  $|A^*| = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única)

Resolvemos el sistema en el caso $m = -4$ por el metodo de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-27}{-9} = 3 \qquad \& \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-9} = -1$$

b) $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 2 \\ k & -k & 4 & -4 \end{array}\right)$

Para que el sistema sea incompatible $\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2$, por lo tanto todos los menores de orden 2 de la matriz de coeficientes han de ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & -k \end{vmatrix} = -k + k = 0 \qquad \& \qquad \begin{vmatrix} -1 & k \\ -k & 4 \end{vmatrix} = -4 + k^2 = 0 \implies k = \pm 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} = 4 - k^2 = 0 \implies k = \pm 2$$

- Si $k = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right)$ $\text{ran}(A) = 1$

  y como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

- Si $k = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right)$ $\text{ran}(A) = 1$

  y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

Luego el sistema es incompatible si $k = \pm 2$

Ejercicio 11 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \implies m = \{1, 2\}$$

- Si $m \neq \{1, 2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 0$ por el método de Gauss. Como $0 \neq \{1, 2\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow z = 0 \\ \Rightarrow x + 3 \cdot 0 = 4 \\ \Rightarrow 2 \cdot 4 - 2y - 0 = 0 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} z = 0 \\ x = 4 \\ y = 4 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $m = 2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow -2x + 2 \cdot \frac{7\lambda - 8}{2} + \lambda = 0 \\ \Rightarrow -2y + 7\lambda = 8 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 4\lambda - 4 \\ y = \dfrac{7\lambda - 8}{2} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 12 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+y+z=k \\ x+(k-1)y+z=0 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k=0$ y para $k=1$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \implies k = \{1,2\}$$

- Si $k \neq \{1,2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $k=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $k=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $k = 0$ por el método de Gauss. Como $0 \neq \{1, 2\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_1 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 1 + 0 = 0 \\ \Rightarrow 2z = 0 \\ \Rightarrow y + 0 = 1 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ z = 0 \\ y = 1 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow y + \lambda = 1 \\ \Rightarrow x + \lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow z = \lambda \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} y = 1 - \lambda \\ x = -\lambda \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 13 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+4y+z=3 \\ kx+2y-z=3 \end{cases}$$

se pide:

a) *(2 puntos) Discutirlo según los valores de k.*

b) *(0.5 puntos) Resolverlo en el caso $k=2$.*

c) *(0.5 puntos) Resolverlo en el caso $k=1$.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -4k^2+6k-2=0 \implies k=\{1/2, 1\}$$

- Si $k \neq \{1/2,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=3=\operatorname{ran}(A^*)=\text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k=1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*)=3$

  $\operatorname{ran}(A)=2 \neq \operatorname{ran}(A^*)=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $k=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*)=2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\ \text{incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 2$ por el método de Gauss. Sabiendo que se trata de un S.C.D. También podríamos haberlo resuelto por el método de Cramer, con la ventaja de que ya conocemos $|A| = -4k^2 + 6k - 2 = -6$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/3 \\ y = 1/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 1$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolveremos tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow 2x + 4\lambda - 1 = 3 \\ \Rightarrow -3z = -3 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - kF_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1-2k & 1 \\ 0 & 2-2k & -1-k^2 & 3-k \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & 2-2k & -1-k^2 & 3-k \\ 0 & 0 & 1-2k & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2k = 0 & \Rightarrow \boxed{k = 1/2} \\ 2 - 2k = 0 & \Rightarrow \boxed{k = 1} \end{cases}$$

- Si $k \neq \{1/2, 1\} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \square & 1 \\ 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 \end{array}\right) \implies$ SIST. COMPATIBLE DETERMINADO

- Si $k = 1/2 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -5/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE

- Si $k = 1 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_3 - F_2 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $\implies$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos el valor $k = 2$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \\ \Rightarrow -2y - 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \\ \Rightarrow -3z = 1 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 1$. Como se trata de un S.C.I. resolveremos tan solo las ecuaciones que se han mantenido tras hacer el método de Gauss en la discusión.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2\lambda - 1 = 1 \\ \Rightarrow -2z = 2 \\ \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = 2 - 2\lambda & \\ y = \lambda & , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 & \end{array}}$$

Ejercicio 14 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

se pide

a) *(2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m.*

b) *(0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.*

c) *(0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m^2 - 4 = 0 \implies m = \{-2, 2\}$$

- Si $m \neq \{-2, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{\textit{Rouche}}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 0$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 0 & 6 & -8 & 14 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 7 + 2 \cdot \frac{7}{2} = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4y - 6 \cdot \frac{7}{2} = 7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 7 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 7 \\ z = \frac{7}{2} \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & m & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 4 & m-6 & 7 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ (m+6) \cdot F_3 - 4F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & m^2-4 & 7m-14 \end{array}\right) \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

- Si $m \neq \{-2, 2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO
- Si $m = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE
- Si $m = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $m = 0$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 7 + 2 \cdot \frac{7}{2} = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6y - 8 \cdot \frac{7}{2} = 14 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z = -14 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 7 \\ z = \frac{7}{2} \end{array}}$$

Ejercicio 15 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \\ ax + 4y + 2z = a \end{cases}$$

se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -5a^2 + a + 6 = -(a+1)\cdot(5a-6) = 0 \implies a = \{-1, 6/5\}$$

- Si $a \neq \{-1, 6/5\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a = 6/5 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6/5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 6/5 & 4 & 2 & 6/5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 6/5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 6/5 & 0 \\ 4 & 2 & 6/5 \end{vmatrix} = -\frac{66}{25} \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche} \text{Sist. Incompatible (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.D. también podríamos haber optado por el método de Crámer, con la ventaja de conocer que $|A| = -5a^2 + a + 6 = 2$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 - 5F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda = 1 \Rightarrow & \Rightarrow \\ \Rightarrow x - 0 + 1 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 + F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \frac{-1-\lambda}{5} - \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y + \lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1+6\lambda}{5} \\ y = \frac{-1-\lambda}{5} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 4 & 2 & a & a \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 4F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 \\ 0 & 6 & 5a & a \end{array}\right) \overset{a \neq -1}{\sim} \begin{bmatrix} \\ \\ (a+1) \cdot F_3 - 6F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+1)\cdot(5a-6) & a\cdot(a+1) \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+1)\cdot(5a-6) = 0 \\ \implies \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 6/5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 6/5\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & \square & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

- Si $a = 6/5 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 0 & 11/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 1$. Hay que tener en cuenta que como hemos cambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$ y $C_1 \leftrightarrow C_2$, las incógnitas han quedado intercambiadas de igual manera, luego las columnas corresponden a las incógnitas y, z, x.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -y+1-1=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z+2\cdot(-1)=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2x=2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} y=0 \\ z=1 \\ x=-1 \end{array}}$$

c) Sustituimos el valor $a = -1$ en el sistema obtenido antes de la última operación de filas (sólo válida si $a \neq -1$). Hay que tener en cuenta que como hemos cambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$ y $C_1 \leftrightarrow C_2$, las incógnitas han quedado intercambiadas de igual manera, luego las columnas corresponden a las incógnitas y, z, x.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -y+\lambda-\frac{1+6\lambda}{5}=0 \\ \Rightarrow 6\lambda-5x=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} y=\frac{-1-\lambda}{5} & \\ z=\lambda & ,\lambda\in\mathbb{R} \\ x=\frac{1+6\lambda}{5} & \end{array}}$$

Ejercicio 16 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y - 2z = a \\ 2x + y - az = 2 \\ -x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea posible.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \implies a = \{-1, 2\}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) - Si $a = 2$, resolvemos el sistema por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow 2x + 0 - 2\lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = 1 + \lambda & \\ y = 0 & ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$, resolvemos el sistema por el método de Cramer ya que es un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{A} = \frac{a^3 - a^2 - 2a}{a^2 - a - 2} = \frac{a \cdot \cancel{(a^2 - a - 2)}}{\cancel{a^2 - a - 2}} = a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{A} = \frac{-a^2 + 4a - 4}{a^2 - a - 2} = \frac{-(a-2)^{\cancel{2}}}{(a+1) \cdot \cancel{(a-2)}} = \frac{-a+2}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}}{A} = \frac{2a^2 - 5a + 2}{a^2 - a - 2} = \frac{(2a-1) \cdot \cancel{(a-2)}}{(a+1) \cdot \cancel{(a-2)}} = \frac{2a-1}{a+1}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 3 & 2-a & 4-2a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ (a+1) \cdot F_3 - 3F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & (a+1)\cdot(2-a) & (2-a)\cdot(2a-1) \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+1)\cdot(2-a) = 0 \\ \Longrightarrow a = \{-1, 2\} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado

- Si $a=-1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $a=2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior los valores $a=2$ y $a \neq \{-1,2\}$.

- Si $a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -x+0+\lambda=-1 \\ \Rightarrow 3y=0 \\ \Rightarrow z=\lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ \quad y=0 \\ \quad z=\lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Si $a \neq \{-1,2\}$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & (a+1)\cdot(2-a) & (2-a)\cdot(2a-1) \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow -x+\frac{2-a}{a+1}+\frac{2a-1}{a+1}=1-a \\ \Rightarrow (a+1)\cdot y=2-1 \\ \Rightarrow (a+1)\cdot(2-a)\cdot z=(2-a)\cdot(2a-1) \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=a \\ y=\frac{2-a}{a+1} \\ z=\frac{2a-1}{a+1} \end{array}}$$

Ejercicio 17 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{cases}$ *, se pide:*

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $a=1$.

c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $a=2$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \implies |A| = a^2-4=0 \implies a=\pm 2$$

- Si $a \neq \{-2,2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=$ nº incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*)=3$

  $\text{ran}(A)=2 \neq \text{ran}(A^*)=3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A)=2=\text{ran}(A^*) \neq$ nº incógitas $=3 \implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \ F_2 - 2F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \underset{9F_3 - 4F_2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 1 \\ 9y - 3 \cdot \frac{4}{3} = -1 \\ 3z = 4 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \underset{F_2 - 2F_1}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 4 \cdot \frac{\lambda}{2} + 3\lambda = 1 \\ 10y - 5\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial intentando que los parámetros se sitúen lo más a la derecha y abajo posible, posteriormente aplicamos el método de Gauss al sistema.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \sim \ 2F_2 - F_1 \ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 0 & -8-a & 2a+1 & 2-a \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \underset{(8+a)F_3 + 4F_2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 0 & -8-a & 2a+1 & 2-a \\ 0 & 0 & -a^2+4 & 8-4a \end{array}\right) \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \{-2, 2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado
- Si $a = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

b) Sustituimos el valor del parámetro $a = 1$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & -9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \\ \Rightarrow -9y + 3 \cdot \frac{4}{3} = 1 \\ \Rightarrow 3z = 4 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array}}$$

c) Sustituimos el valor del parámetro $a = 2$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado a), teniendo en cuenta de que se trata de un S.C.I. por lo que solo escribiremos las dos primeras filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow 2x + 2 \cdot \frac{\lambda}{2} + \lambda = 2 \\ \Rightarrow -10y + 5\lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \\ z = \lambda \end{array}\right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\xRightarrow{t=2\lambda} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = t \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{array}}$$

Ejercicio 18 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+my+3z & = & 4 \\ x+y-2z & = & -2 \\ 3x+(m+1)z & = & m+2 \end{array}\right\}$$

a) *(2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m.*

b) *(0.5 puntos) Resolverlo para $m=-3$.*

c) *(0.5 puntos) Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y=0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m?*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & m & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} |A| = m+1-6m+0-(9+m^2+m+0) \\ = -m^2-6m-8=0 \Longrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=-4 \end{cases} \end{array}$$

- Si $m \neq \{-2,-4\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \Longrightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $m=-2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} \Longrightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $m=-4 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $m=-3$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\1&1&-2&-2\\3&0&-2&-1\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\\F_2-F_1\\F_3-3F_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\0&4&-5&-6\\0&9&-11&-13\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\\\\4F_3-9F_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&3&4\\0&4&-5&-6\\0&0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{r}\Rightarrow\ x-3\cdot1+3\cdot2=4\ \Rightarrow\\\Rightarrow\ 4y-5\cdot2=-6\ \Rightarrow\\\Rightarrow\ z=2\ \Rightarrow\end{array}\boxed{\begin{array}{c}x=1\\y=1\\z=2\end{array}}$$

c) Dos formas de resolver este apartado.

I) <u>Método rápido.</u> Si $y=0$ el sistema nos queda:

$$\left.\begin{array}{rcl}x+3z&=&4\\x-2z&=&-2\\3x+(m+1)z&=&m+2\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1-E_2}5z=6\quad\Longrightarrow\boxed{\begin{array}{c}x=2/5\\y=0\\z=6/5\end{array}}$$

Dependiendo de cómo estén los parámetros el sistema puede ser más difícil de resolver ya que no es un sistema lineal.

II) <u>Método general.</u> Nos dicen que el sistema es compatible. Vamos a suponer que se trata de un S.C.D. y, resolviéndolo por Cramer, obligaremos a que $y=0$.

$$|A|=-m^2-6m-8=-(m+2)\cdot(m+4)\quad\&\quad|A_y|=\begin{vmatrix}1&4&3\\1&-2&-2\\3&m+2&m+1\end{vmatrix}=-(m+2)$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-\cancel{(m+2)}}{-\cancel{(m+2)}\cdot(m+4)}=\frac{1}{m+4}=0\implies 1=0\Rightarrow\ \text{Contradicción!}$$

La contradicción viene de haber supuesto que el sistema era compatible determinado y nos ha salido un valor del parámetro m para el que el sistema es compatible indeterminado. Por tanto para que $y=0$ el sistema ha de ser compatible indeterminado, luego $m=-2$ y resolvemos el S.C.I., para lo cual escribimos tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión

$$A/A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&4\\1&1&-2&-2\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\\F_2-F_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&4\\0&3&-5&-6\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}\Rightarrow x-2\cdot0+3\cdot6/5=4\\\Rightarrow 3y-5\lambda=-6\Rightarrow y=\frac{-6+5\lambda}{3}=0\Rightarrow\lambda=6/5\\\Rightarrow z=\lambda\end{array}\quad\Longrightarrow\boxed{\begin{array}{c}x=2/5\\y=0\\z=6/5\end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial procurando que los parámetros queden lo más abajo y a la derecha posible. Posteriormente aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \sim \; F_1 \leftrightarrow F_2 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & m & 3 & 4 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & m-1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & m+7 & m+8 \end{array}\right) \sim \quad (m-1)F_3 + 3F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & m-1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & m^2+6m+8 & m^2+7m+10 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} m^2+6m+8=0 \\ m=\{-2,-4\} \end{array}$$

- Si $m \neq \{-2,-4\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $m = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Indeterminado
- Si $m = -4 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema Incompatible

b) Resolvemos para el valor de $m = -3$, para lo cual sustituimos el parámetro en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior y resolvemos, teniendo en cuenta de que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+1-2\cdot 2=-2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y+5\cdot 2=6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z=-2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}}$$

c) La resolución de este apartado es la misma que la planteada en la sección de Método de Rouché. Nos remitimos a ella

Ejercicio 19 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=1 \\ ty+z=0 \\ x+(1+t)y+tz=t+1 \end{cases}$ *, se pide:*

a) (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $t=0$.

c) (0.5 puntos) Resolverlo para $t=-1$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = t^2 - t = t\cdot(t-1) = 0 \implies t = \{0,1\}$$

- Si $t \neq \{0,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $t=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $t=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $t = 0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+\lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $t = -1$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + \frac{1}{2} = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 1+t & t+1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & t & t & t \end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\sim} \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - t \cdot F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & -t^2+t & t \end{array}\right) \Longrightarrow -t^2 + t = 0 \Longrightarrow t = \{0, 1\}$$

- Si $t \neq \{0,1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $t = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado
- Si $t = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $t = 0$. Como hemos intercambiado $C_2 \leftrightarrow C_3$, las incógnitas han quedado intercambiadas $y \leftrightarrow z$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+\lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

c) Sustituimos $t = -1$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior. Como hemos intercambiado $C_2 \leftrightarrow C_3$, las incóginitas han quedado intercambiadas $y \leftrightarrow z$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow z - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y = -1 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 20 (2,5 *puntos*)

Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix},$$

se pide:

a) *(2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.*

b) *(0.5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 & 1 \\ 1 & m & m & 2+m \end{array}\right) \implies |A| = m - m^2 = 0 \implies m = \{0, 1\}$$

- Si $m \neq \{0, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $m = -1$ por el método de Gauss. Como $m \neq \{0, 1\}$

estamos antes un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ F_3+F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} x+2-2=1 \\ 2y-2=2 \\ -z=2 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=1 \\ y=2 \\ z=-2 \end{array}}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 21 (2,5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso m = 0.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

- Si $m \neq \{-1, 1\}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 1 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 0$ por el método de Gauss. Como $m \neq \{-1, 1\}$

estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} x = 1 \\ -y + 0 = 1 \\ z = 0 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 22 (2,5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \begin{cases} 10x - 20y - 10z = 8\alpha + 44 \\ 2x - 5y + 3z = 4\alpha + 4 \\ 3x - 7y + 2z = 5\alpha + 9 \end{cases} ,$$

se pide:

a) *(2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real* α.

b) *(0.5 puntos) Resolver el sistema para* $\alpha = -3$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha + 22 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 0 \ , \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \operatorname{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 4\alpha + 22 \\ 2 & -5 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 5\alpha + 9 \end{vmatrix} = (4\alpha + 22) + 5 \cdot (4\alpha + 4) - 5 \cdot (5\alpha + 9)$$
$$= -3 - \alpha = 0 \implies \alpha = -3$$

- Si $\alpha \neq -3 \implies \operatorname{ran}A = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

- Si $\alpha = -3 \implies \operatorname{ran}A = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para $\alpha = -3$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 2 & -5 & 3 & -8 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 5F_2 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & 5x - 10 \cdot (12 + 5\lambda) - 5\lambda = 10 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & -5y + 25\lambda = -60 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 26 + 11\lambda \\ y = 12 + 5\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha+22 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha+4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha+9 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 5F_2-2F_1 \\ 5F_3-3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha+22 \\ 0 & -5 & 25 & 12\alpha-24 \\ 0 & -5 & 25 & 13\alpha-21 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha+22 \\ 0 & -5 & 25 & 12\alpha-24 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+3 \end{array}\right) \Longrightarrow \alpha+3=0 \Longrightarrow \alpha=-3$$

- Si $\alpha \neq -3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & \square \\ 0 & -5 & 25 & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE
- Si $\alpha = -3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $\alpha = -3$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \ x + -2\cdot(12+5\lambda) - \lambda = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ y - 5\lambda = 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ z = \lambda \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 26+11\lambda \\ y = 12+5\lambda \quad ,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 23 (2,5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - my - z = 0 \\ mx - 4y + (6-2m)z = -8m \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$ *, se pide*

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -m^2+8m-12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$$

- Si $m \neq \{2,\, 6\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -16 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -16 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 6 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 6 & -4 & -48 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 6$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden

2 encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \end{array}\right) \sim_{F_2 - 6F_1} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} x - 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \lambda = 0 \\ 32y = -48 \\ z = \lambda \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \lambda - 9 \\ y = -3/2 \\ z = \lambda \end{array} \;,\; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 24 (2,5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$ *, se pide:*

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array}\right)$$

1) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -(k+1)\cdot(k-1) + 1 - [k\cdot(k-1) + 0 + k] = -2k^2 + 2 = 0 \implies k = \pm 1$$

- Si $k \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $k = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

2) Método Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array}\right) \sim \; C_1 \leftrightarrow C_3 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & k & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & -(k+1) \end{array}\right)$$

$$\sim \; F_2 + F_1 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & k & 0 \\ 0 & 2k+1 & k-1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & -(k+1) \end{array}\right) \sim_{(2k+1)\cdot F_3 + F_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & k & 0 \\ 0 & 2k+1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k^2-2 & -2k^2-3k-1 \end{array}\right) \Longrightarrow 2k^2 - 2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$$

- Si $k \neq \{-1, 1\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).
- Si $k = -1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)
- Si $k = 1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $k = -1$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $k = -1$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_2 - F_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -x + \lambda = 0 \\ -y - 2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \qquad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 25 (2,5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1.5 puntos) Resolver el sistema AX = B, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a)

$$\text{ran}(A) = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \circ \text{ Si } t \neq 0 \implies \text{ran}A = 2 \\ \circ \text{ Si } t = 0 \implies \text{ran}A = 1 \end{cases}$$

b) Para que el sistema sea compatible determinado tiene que cumplirse que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $= 2$ por lo que $t \neq 0$. Resolvemos por el método de Gauss.

$$A \mid A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array}\right) \implies \begin{array}{c} \text{Para que ran}(A^*) = 2 \\ 6t+6 = 0 \implies t = -1 \end{array}$$

Si $t = -1$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \implies \boxed{\begin{array}{c} x = 6 \\ y = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 26 (2,5 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) *(2 puntos) Discutir el sistema según los diferente valores de a.*

b) *(0.5 puntos) Resolver el sistema para $a=0$.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 + a = a\cdot(a+1) = 0 \implies a = \{0,-1\}$$

- Si $a \neq \{-1,0\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=-1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

- Si $a=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \ x+\lambda=1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ y-\lambda=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ z=\lambda \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \qquad ,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ -1 & 1 & -a & 2a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 3a \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} -a = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ a+1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-1, 0\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \square \\ 0 & \square & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad z=1 \\ \Rightarrow \quad z=-1/3 \end{array} \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $a = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \ x+\lambda=1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ y-\lambda=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ z=\lambda \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \qquad ,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 27 (2,5 *puntos*)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -3$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 3 & k & 1 \\ 3 & k+1 & 2 & k-1 \\ k & 2 & k & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = k^2 - 4 = 0 \implies k = \{-2, 2\}$$

- Si $k \neq \{-2, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $k = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMIDADO (Infinitas soluciones)

- Si $k = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMIDADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = -3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$, estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + 3F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} -2x + 3\cdot 1 - 3\cdot 2 = 1 \\ 5y - 5\cdot 2 = -5 \\ 2z = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

Cuando el sistema en forma matricial tiene tantos parámetros no merece la pena intentar hacerlo por el método de Gauss porque se complica sobremanera.

Ejercicio 28 (2,5 *puntos*)

Dados la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ *y el vector* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*, determine el valor o valores de* a *para los que:*

a) (1.5 puntos) El sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ *no tenga solución*

b) (1 punto) $A = A^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & -3 & a & 1 \\ a-1 & -3 & a & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \cancel{a^2} - a + \cancel{3a} - \cancel{3a} + 3 - \cancel{a^2} = 3 - a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^{*}) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^{*}) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^{*}) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible

Luego el valor de a para el cual el sistema no tiene solución es $a = 3$.

b) $A = A^{-1} \implies A^2 = A \cdot A^{-1} = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-4a & 9-2a & a^2-4a \\ a^2-4a & 2a+8 & a^2-4a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \implies \begin{cases} a^2 - 4a = 0 & \Rightarrow a = \{0, 4\} \\ 9 - 2a = 1 & \Rightarrow a = 4 \\ 2a + 8 = 0 & \Rightarrow a = 4 \\ a^2 - 4a + 1 = 1 & \Rightarrow a = \{0, 4\} \end{cases}$$

Por lo que el valor del parámetro a que hace que $A = A^{-1}$ es $a = 4$.

Ejercicio 29 (2,5 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} ax - 2y + (a-1)z &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -ax + y - 6z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3a^2 - 29a + 26 = 0 \implies a = \{1, 26/3\}$$

- Si $a \neq \{1, 26/3\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 26/3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 26/3 & -2 & 23/3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 23/3 & 4 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -\dfrac{368}{3} \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2 \cdot (-10 - 6\lambda) = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 6\lambda = 10 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -16 - 12\lambda \\ y = -10 - 6\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$